Симплекс-метод решения ЗЛП

Содержание

Симплекс-метод решения ЗЛП

Пусть требуется решить задачу

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \to \max$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad , \quad i=\overline{1,m} \qquad (1)$$

$$x_j \ge 0 \quad , \quad j=\overline{1,n} \quad , \quad b_i \ge 0 \quad , \quad i=\overline{1,m}$$

Или

$$f(x)=(\overline{c},\overline{x}) \to \max$$

$$A\overline{x}=\overline{b} \qquad (2)$$

$$\overline{x} \ge \overline{0} \quad , \quad \overline{b} \ge \overline{0}$$

Так как решением задачи (2) является крайняя точка множества P ее допустимых решений, или, что то же самое, неотрицательное базисное решение системы линейных уравнений $A\bar{x} = \bar{b}$, то метод решения задачи (1) должен содержать 4 момента:

1) обоснование способа перехода от одного опорного плана (К-матрицы) к другому;

2) указание признака оптимальности, позволяющего проверить, является ли данный опорный план оптимальным;

3) указание способа построения нового опорного плана, более близкого к оптимальному;

4) указание признака отсутствия конечного решения.

Определение К-матрицы в КЗЛП

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования (КЗЛП):

$$f(\overline{x}) = (\overline{c}, \overline{x}) \to \max$$

$$A\overline{x} = \overline{b}$$

$$\overline{x} \ge \overline{0}, \quad \overline{b} \ge \overline{0}.$$

Будем считать, что ранг матрицы А равен m, причем m<n.

Запишем КЗЛП в векторном виде:

$$\max(\overline{c}, \overline{x})$$

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j = \overline{b}$$

$$\overline{x} \ge \overline{0}, \quad \overline{b} \ge \overline{0},$$

где $\overline{a}_j$ – j-й столбец матрицы А.

Дадим одно из определений опорного плана. ОП ЗЛП будем называть такой план $\overline{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$, что векторы $\overline{a}_j$, входящие в разложение $\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j x_j = \overline{b}$ со строго положительными x_j, линейно независимы.

К-матрицей КЗЛП будем называть расширенную матрицу системы линейных уравнений, равносильной системе (*), содержащую единичную подматрицу на месте первых n своих столбцов и все элементы (n+1)-го которой неотрицательны. Число К-матриц конечно и не превышает C_n^m. Каждая К-матрица определяет ОП КЗЛП и наоборот.

Переход от одной К-матрицы ЗЛП к другой К-матрице.

Пусть известна К-матрица

$$K^{(S)}=\begin{pmatrix} a_{11}^{(S)} & a_{12}^{(S)} & \dots & a_{1n}^{(S)} & b_1^{(S)} \\ a_{21}^{(S)} & a_{22}^{(S)} & \dots & a_{2n}^{(S)} & b_2^{(S)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(S)} & a_{m2}^{(S)} & \dots & a_{mn}^{(S)} & b_m^{(S)} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Обозначим через $\overline{N}^{(S)}=\left(N_1^{(S)},\dots,N_m^{(S)}\right)$ вектор номеров базисных (единичных) столбцов матрицы $K^{(S)}$, $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}=\left(b_1^{(S)},\dots,b_m^{(S)}\right)$ - вектор, компоненты которого есть базисные компоненты опорного плана, определяемого матрицей $K^{(S)}$, и могут быть отличны от нуля.

Остальные (n - m) компонент опорного плана, определяемого матрицей $K^{(S)}$, равны нулю. Очевидно, что векторы $\overline{N}^{(S)}$ и $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$ полностью задают опорный план, определяемый матрицей $K^{(S)}$. Например, пусть:

$$K^{(S)} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 3 & 1 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 8 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

тогда $\overline{N}^{(S)} = (3,1,6)$; $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}} = \overline{b}^{(S)} = (1,2,4)$ и, следовательно, опорный план, определяемый $K^{(S)}$, имеет вид:

$$\overline{X} = (2,0,1,0,0,4)$$

Итак, пусть К-матрица (3) определяет невырожденный опорный план $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}} = \left(b_1^{(S)},\dots,b_m^{(S)}\right)$

$$\overline{N}^{(S)} = \left(N_1^{(S)},\dots,N_m^{(S)}\right)$$

Выберем в матрице $K^{(S)}$ столбец $\overline{a}_k^{(S)}$, не принадлежащий единичной подматрице, т. е. $K \neq N_i^{(S)}$, $i = \overline{1,m}$, и такой, что в этом столбце есть хотя бы один элемент больше нуля.

Пусть $a_{lk}^{(S)} > 0$. Считая $a_{lk}^{(S)}$ направляющим элементом, совершим над матрицей $K^{(S)}$ один шаг метода Жордана - Гаусса. В результате получим новую матрицу

$$K^{(S+1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(S+1)} & a_{12}^{(S+1)} & \dots & a_{1n}^{(S+1)} & b_1^{(S+1)} \\ a_{21}^{(S+1)} & a_{22}^{(S+1)} & \dots & a_{2n}^{(S+1)} & b_2^{(S+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, \\ a_{m1}^{(S+1)} & a_{m2}^{(S+1)} & \dots & a_{mn}^{(S+1)} & b_m^{(S+1)} \end{pmatrix}$$

в которой $\overline{a}_k^{(S)}$ стал единичным, но которая может и не быть К-матрицей, т.к. среди величин $b_i^{(S+1)}$ могут быть отрицательные.

Теорема 1.

Пусть в каком-либо столбце К-матрицы $K^{(S)}$ $\bar{a}_k^{(S)}$ есть хотя бы один строго положительный элемент ($K \neq N_i^{(S)}, i = \overline{1,m}$) . Тогда с помощью одного шага метода Жордана-Гаусса можно построить новую К-матрицу $K^{(S+1)}$, выбрав направляющий элемент из условия

$$\frac{b_l^{(S)}}{a_{lk}^{(S)}} = \min_{a_{ik}^{(S)} > 0, i = \overline{1,m}} \frac{b_i^{(S)}}{a_{ik}^{(S)}} = \theta^{(S)}$$

Симплекс-разность К-матриц ЗЛП. Изменение функции $f(\bar{x})$ при переходе от одной К-матрицы к другой.

Определение.

Величину

$$\Delta_j^{(S)} = (\bar{C}_{\bar{N}^{(S)}}, \bar{a}_j^{(S)}) - C_j ,$$

где $\bar{C}_{\bar{N}^{(S)}}$ - вектор, компонентами которого являются коэффициенты

линейной функции $f(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x})$ при базисных ($\bar{N}^{(S)}$) переменных

опорного плана, определяемого матрицей $K^{(S)}$, назовем j-й

симплекс - разностью матрицы $K^{(S)}$.

Пусть $\overline{X}_{\overline{N}}^{(S)}$ и $\overline{X}_{\overline{N}}^{(S+1)}$ - опорные планы, определяемые матрицами

$K^{(S)}$ и $K^{(S+1)}$ соответственно. Тогда очевидно, что

$$f(\overline{X}_{\overline{N}}^{(S+1)}) = (\overline{C}_{\overline{N}}^{(S+1)}, \overline{X}_{\overline{N}}^{(S+1)}) \ ; \ f(\overline{X}_{\overline{N}}^{(S)}) = (\overline{C}_{\overline{N}}^{(S)}, \overline{X}_{\overline{N}}^{(S)})$$

и

$$f(\overline{X}_{\overline{N}}^{(S+1)}) = f(\overline{X}_{\overline{N}}^{(S)}) - \theta^{(S)}, \cdot \Delta_k^{(S)} = f(\overline{X}_{\overline{N}}^{(S)}) - \frac{b_l^{(S)}}{a_{lk}^{(S)}} \Delta_k^{(S)}$$

где К-номер столбца $\overline{a}_k^{(S)}$, вводимого в базис при получении

матрицы $K^{(S+1)}$ из $K^{(S)}$.

Способ построения опорного плана $\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}$ (матрицы $K^{(S+1)}$), более близкого к оптимальному, чем $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$

Теорема 2.

Пусть в матрице $K^{(S)}$ есть $\Delta_k^{(S)} < 0$, и в столбце $\overline{a}_k^{(S)}$ ($K \neq N_i^{(S)}$, $i = \overline{1,m}$) есть хотя бы один строго положительный элемент.

Тогда от матрицы $K^{(S)}$ можно перейти к матрице $K^{(S+1)}$, причем

$$f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}) \geq f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}).$$

Доказательство.

Так как в К-ом столбце К-матрицы $K^{(S)}$ есть строго положительный элемент, то согласно теореме 1 от матрицы $K^{(S)}$ можно перейти к новой К-матрице $K^{(S+1)}$ ЗЛП, выбрав направляющий элемент $a_{lk}^{(S)}$ из условия (7).

По условию $\Delta_k^{(S)} < 0$, а по построению , $\theta^{(S)} \geq 0$

поэтому из соотношения $f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}) = f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}) - \theta^{(S)} \cdot \Delta_k^{(S)}$

следует $f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}) \geq f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}})$

(ч.т.д.)

Если все опорные планы ЗЛП невырождены, то $\theta^{(S)} > 0$ и

$$f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S+1)}}) > f(\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}})$$

Критерий оптимальности опорного плана $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$

Теорема 3

Пусть все симплекс - разности матрицы $K^{(S)}$ неотрицательные. Тогда опорный план $\overline{X}_{\overline{N}^{(S)}}$, определяемый матрицей $K^{(S)}$, является оптимальным.

Доказательство.

По условиям теоремы

$$\Delta_j^{(S)} = \left(\overline{C}_N^{(S)}, \overline{a}_j^{(S)}\right) - C_j \geq 0$$

или

$$\left(\overline{C}_N^{(S)}, \overline{a}_j^{(S)}\right) \geq C_j \quad , \quad j = \overline{1,n} \qquad (8)$$

Пусть $\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – произвольный план ЗЛП.

Умножим левую и правую части (8) на x_j, тогда в силу неотрицательности x_j получим

$$\left(\overline{C}_N^{(S)}, \overline{a}_j^{(S)}\right) x_j \geq C_j x_j \quad , \quad j = \overline{1,n} \qquad (9)$$

Согласно (9) имеем:

$$f(\overline{X}) = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left(\overline{C}_N{}^{(S)}, \overline{a}_j{}^{(S)}\right) x_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} C_{N_i}{}^{(S)} a_{ij}{}^{(S)} x_j = \sum_{i=1}^{m} C_{N_i}{}^{(S)} b_i{}^{(S)} = f\left(\overline{X}_N{}^{(S)}\right)$$

или

$$f\left(\overline{X}_N{}^{(S)}\right) \ge f(\overline{X}) \quad .$$

Что и доказывает теорему.

Критерий отсутствия конечного решения.

Теорема 4

Пусть в матрице $K^{(S)}$ есть $\Delta_k^{(S)} < 0$, и в столбце $\overline{a}_k^{(S)}$ ($K \neq N_i^{(S)}$, $i = \overline{1,m}$) нет ни одного положительного элемента. Тогда ЗЛП (1) не имеет конечного решения.

Доказательство.

Пусть K-я симплекс-разность матрицы $K^{(S)}$

$$\Delta_K^{(S)} = \left(\overline{C}_N^{(S)}, \quad \overline{a}_N^{(S)}\right) - C_K < 0 \quad , \qquad (10)$$

и все

$$a_{ik}^{(S)} \leq 0 \quad , \quad i = 1,2,\dots,m. \qquad (11)$$

Матрица $K^{(S)}$ определяет опорный план

$$\overline{X}_N^{(S)} = \left(b_1^{(S)}, \quad b_2^{(S)}, \dots, \quad b_m^{(S)}\right)$$

$$\overline{N}^{(S)} = \left(N_1^{(S)}, \quad N_2^{(S)}, \dots, \quad N_m^{(S)}\right).$$

Рассмотрим вектор $\overline{X}^{/} = \begin{pmatrix} x_1^{/} \\ x_2^{/} \\ . \quad . \quad . \\ x_n^{/} \\ \end{pmatrix}$,

у которого

$$x^{/}_{N_1^{(S)}} = b_1^{(S)} - a_{1k}^{(S)} x_k,$$
$$x^{/}_{N_2^{(S)}} = b_2^{(S)} - a_{2k}^{(S)} x_k,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$x^{/}_{N_m^{(S)}} = b_m^{(S)} - a_{mk}^{(S)} x_k,$$
$$x_k^{/} = x_k \quad , \quad k \neq N_i^{(S)}, \quad i = \overline{1, m}.$$

где x_k -любое положительное число.
Остальные n-m+1 компонент вектора $\overline{X}^{/}$ положим равными нулю.

В силу условия (11) компоненты вектора $\overline{X}^{/}$ неотрицательны. Легко убедиться в том, что компоненты вектора $\overline{X}^{/}$ удовлетворяют и функциональным ограничениям ЗЛП, т.е. вектор $\overline{X}^{/}$ - план ЗЛП при любом положительном x_k.

Имеем:

$$f\left(\overline{X}^{/}\right)=C_{N_1^{(S)}}\cdot\left(b_1^{(S)}-a_{1k}^{(S)}x_k\right)+C_{N_2^{(S)}}\cdot\left(b_2^{(S)}-a_{2k}^{(S)}x_k\right)+\ldots$$

$$+C_{N_m^{(S)}}\cdot\left(b_m^{(S)}-a_{mk}^{(S)}x_k\right)+C_k x_k=$$

$$=\left(C_{N_1}^{(S)}b_1^{(S)}+C_{N_2}^{(S)}b_2^{(S)}+\ldots+C_{N_m}^{(S)}b_m^{(S)}\right)-$$

$$-x_k(C_{N_1}^{(S)}a_{1k}^{(S)}+C_{N_2}^{(S)}a_{2k}^{(S)}+\ldots+C_{N_m}^{(S)}a_{mk}^{(S)}-C_k)$$

Или окончательно

$$f\left(\overline{X}^{/}\right)=f\left(\overline{X}_{N^{(S)}}\right)-x_k\Delta_k^{(S)} \quad . \qquad (12)$$

Т.к. $\Delta_k^{(S)}<0$, то из (12) следует, что для любого числа M>0 всегда можно найти план $\overline{X}^{/}$ ЗЛП, для которого $f\left(\overline{X}^{/}\right)>M$, т.е. линейная форма $f\left(\overline{X}\right)$ не ограничена сверху на множестве $P^{/}$ планов.

Терема доказана.

Пример 1

- Симплекс-методом решить ЗЛП:

$$\max f(\overline{X}) = 3X_1 + 2X_2$$

(1)

$$X_1 + 2X_2 \le 6,$$
$$2X_1 + X_2 \le 8,$$
$$-X_1 + X_2 \le 1,$$
$$X_2 \le 2,$$

(2)

$$X_1 \ge 0, X_1 \ge 0.$$

- Приводим систему линейных неравенств (2) к каноническому виду, вводя в каждое неравенство дополнительную переменную x_j , $j=\overline{3,6}$.

- Получим систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned}
&X_1+2X_2+X_3=6,\\
&2X_1+X_2+X_4=8,\\
&-X_1+X_2+X_5=1,\\
&X_2+X_6=2,\\
&X_j\ge 0,\ j=\overline{1,6}.
\end{aligned} \qquad (3)$$

- Целевая функция (1) будет иметь вид

$$F(\overline{X}) = 3X_1 + 2X_2 + 0X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6$$

- Расширенная матрица

$$K^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

системы линейных уравнений (3) является исходной К-матрицей $K^{(0)}$ ЗЛП, которая определяет исходный опорный план:

$$\overline{X}_{\overline{N}^{(0)}} = (6,8,1,2) \qquad \overline{N}^{(0)} = (3,4,5,6)$$

$$\overline{C}_{\overline{N}^{(0)}} = (0,0,0,0)$$

Введём следующие обозначения:

- S-номер итерации
- i-номера строк таблицы
- $\overline{N}$ -номера столбцов, образующих единичную подматрицу
- $\overline{C}_{\overline{N}}$ -коэффициенты целевой функции при столбцах, образующих единичную подматрицу
- $\overline{a}_i$ -соответствуют переменным задачи
- $\overline{X}_{\overline{N}} = \overline{b}$ -сначала содержит правые части системы уравнений , в конце алгоритма - искомые значения переменных
- $\overline{\theta}$ -для вычисления значений θ

Результаты последовательных итераций симплекс-алгоритма оформим в виде симплекс-таблицы.

S	i	$\overline{N}^{(S)}$	$\overline{C}_{\overline{N}}$	$\overline{X}_{\overline{N}}^{(S)} = \overline{b}^{(S)}$	3	2	0	0	0	0	$\theta^{(S)}$
					$\overline{a}_1^{(S)}$	$\overline{a}_2^{(S)}$	$\overline{a}_3^{(S)}$	$\overline{a}_4^{(S)}$	$\overline{a}_5^{(S)}$	$\overline{a}_6^{(S)}$	
0	1	3	0	6	1	2	1	0	0	0	6
	2	4	0	8	**2**	1	0	1	0	0	**4**
	3	5	0	1	-1	1	0	0	1	0	-
	4	6	0	2	0	1	0	0	0	1	-
	5	$\Delta_j^{(0)}$		F=0	**-3**	-2	0	0	0	0	k=1 L=2
1	1	3	0	2	0	**3/2**	1	-1/2	0	0	**4/3**
	2	1	3	4	1	1/2	0	1/2	0	0	8
	3	5	0	5	0	3/2	0	1/2	1	0	10/3
	4	6	0	2	0	1	0	0	0	1	2
	5	$\Delta_j^{(1)}$		F=3*4=12	0	**-1/2**	0	3/2	0	0	k=2 L=1
2	1	2	2	4/3	0	1	2/3	-1/3	0	0	
	2	1	3	10/3	1	0	-1/3	2/3	0	0	
	3	5	0	3	0	0	-1	1	1	0	
	4	6	0	2/3	0	0	-2/3	1/3	0	1	
	5	$\Delta_j^{(2)}$		F=38/3	0	0	1/3	2	0	0	

- На второй итерации S=2, все $\Delta_j^{(2)} \geq 0,\ j=\overline{1,6}$ следовательно, опорный план $\overline{X}_{\overline{N}^{(2)}} = (4/3;10/3;3;2/3)\quad;\quad \overline{N}^{(2)} = (2,1,5,6)$

определяемый К-матрицей $K^{(2)}$, оптимальный,

$$\overline{X}^{*} = (10/3;4/3;0;0;3;2/3)$$

- Оптимальное значение линейной формы равно:

$$f(\overline{X}^{*}) = f(\overline{X}_{\overline{N}^{(2)}}) = (\overline{C}_{\overline{N}^{(2)}}, \overline{b}^{(2)}) =$$

$$= C_{N_1^{(2)}} b_1^{(2)} + C_{N_2^{(2)}} b_2^{(2)} + C_{N_3^{(2)}} b_3^{(2)} + C_{N_4^{(2)}} b_4^{(2)} =$$

$$= 2 \cdot 4/3 + 3 \cdot 10/3 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2/3 = 12\frac{2}{3}$$

Пример 2

- Симплекс-методом решить ЗЛП:

$$\max(2X_1 + X_2) \quad (4)$$

$$X_1 - X_2 \le 10$$

$$X_1 \le 40 \quad (5)$$

$$X_{1,2} \ge 0$$

- Приводим ЗЛП (4-5) к каноническому виду

$$\max(2X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4)$$

$$X_1 - X_2 + X_3 = 10 \quad (6)$$

$$X_1 + X_4 = 40$$

$$X_j \ge 0; \quad j = \overline{1,4}$$

Результаты последовательных итераций запишем в симплекс-таблицу.

S	i	$\overline{N}^{(S)}$	$\overline{C}_{\overline{N}}$	$\overline{X}_{\overline{N}}^{(S)} = \overline{b}^{(S)}$	2	1	0	0	$\theta^{(S)}$
					$\overline{a}_1^{(S)}$	$\overline{a}_2^{(S)}$	$\overline{a}_3^{(S)}$	$\overline{a}_4^{(S)}$	
0	1	3	0	10	1	-1	1	0	10
	2	4	0	40	1	0	0	1	40
	3	$\Delta_j^{(0)}$		F=0	-2	-1	0	0	
1	1	1	2	10	1	-1	1	0	-
	2	4	0	30	0	1	-1	1	30
	3	$\Delta_j^{(1)}$		F=2*10=20	0	-3	2	0	
2	1	1	2	40	1	0	0	1	-
	2	2	1	30	0	1	-1	1	-
	3	$\Delta_j^{(2)}$		F=2*40+30= =110	0	0	-1	3	

- Из симплекс-таблице при S=2 следует, что согласно шагу 3 симплекс-алгоритма данная ЗЛП не имеет конечного решения, т.к. отрицательная симплекс-разность $\Delta_3^{(2)}$ соответствует столбцу $\overline{a}_3^{(2)}$, все элементы которого неположительны.

- Итак,

$$\max_P f(\overline{X}) = \infty$$