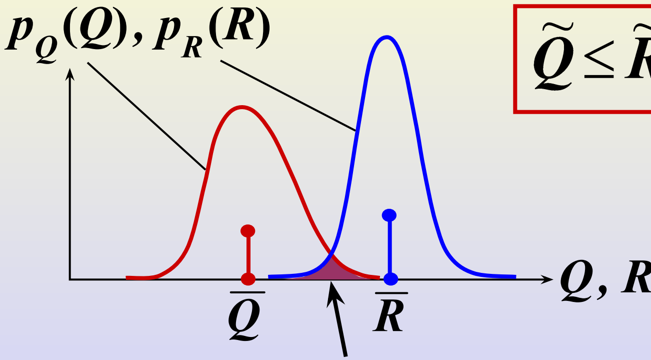
КАФЕДРА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА И НАДЁЖНОСТЬ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

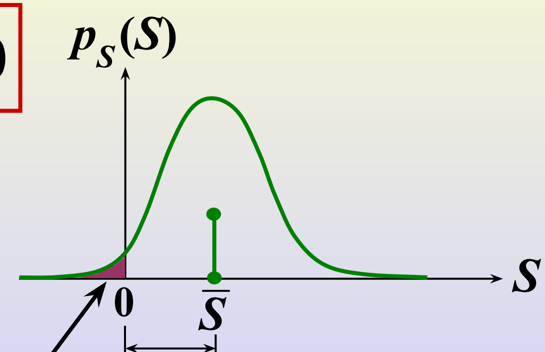
Часть 3

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСЧЁТЫ НДС КОНСТРУКЦИЙ. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ, МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Обобщённое условие безотказности по некоторому критерию работоспособности



$$\boxed{\tilde{Q} \le \tilde{R}} \Rightarrow \boxed{\tilde{S} = \tilde{R} - \tilde{Q} \ge 0}$$



$P_f = P(R < Q)$

$P_f = P(S < 0) = P_S(0)$

$$\boxed{\beta = \frac{\bar{S}}{\hat{S}}}$$ – характеристика безопасности (индекс надёжности, reliability index)

$$\boxed{P_f = P_S(0) = \int_{-\infty}^{0} p_S(S)\,dS}$$

$$\tilde{S} = S(\tilde{Q}, \tilde{R})$$

$$\tilde{Q} = Q\left(\left\{\tilde{X}_Q\right\}\right)$$

$$\left\{\tilde{X}_Q\right\} = \left\{\tilde{x}_{Q1}\ \tilde{x}_{Q2} \ldots \tilde{x}_{Qi} \ldots \tilde{x}_{Qn_Q}\right\}$$

$$\tilde{R} = R\left(\left\{\tilde{X}_R\right\}\right)$$

$$\left\{\tilde{X}_R\right\} = \left\{\tilde{x}_{R1}\ \tilde{x}_{R2} \ldots \tilde{x}_{Ri} \ldots \tilde{x}_{Rn_R}\right\}$$

$$\tilde{Q} = \left|\tilde{M}\right|_{\max} = \tilde{q}\,\tilde{l}^{\,2}/8$$

$$\left\{\tilde{X}_Q\right\} = \left\{\tilde{q}\ \tilde{l}\right\}$$

$$\tilde{R} = \tilde{M}_0 = \tilde{\sigma}_u \tilde{W}$$

$$\left\{\tilde{X}_R\right\} = \left\{\tilde{\sigma}_u\ \tilde{W}\right\}$$

$$\tilde{W} = \frac{\tilde{b}\,\tilde{h}^2}{6}$$

$$\boxed{\tilde{u} = u\left(\left\{\tilde{X}\right\}\right)}$$

$$\boxed{\tilde{u} = \left\{\tilde{u}_1\ \tilde{u}_2 \ldots \tilde{u}_k \ldots \tilde{u}_m\right\}}$$

Постановки задач вероятностных расчётов сооружений и конструкций

Принципиальная модель стохастического состояния объекта

Случайные входные параметры

$$\tilde{X} = \{\tilde{x}_1 \; \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_i \ldots \tilde{x}_n\}$$

Геометрические, структурные, жесткостные характеристики системы; свойства материалов; нагрузки и воздействия

Стохастическая система

(объект с вероятностными свойствами и параметрами)

Случайные выходные параметры

$$\tilde{u} = \{\tilde{u}_1 \; \tilde{u}_2 \ldots \tilde{u}_k \ldots \tilde{u}_m\}$$

Параметры напряжённо-деформированного состояния системы

Случайные векторы (многомерные случайные величины)

Прямая (поверочная) задача вероятностного расчёта

По известным (заданным) вероятностным характеристикам входных параметров определить стохастические характеристики выходных параметров.

Обратная (проектная) задача вероятностного расчёта

Определить вероятностные характеристики входных параметров, обеспечивающие требуемые характеристики случайных выходных параметров.

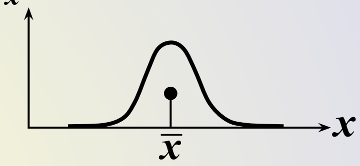
Оптимизационная задача –

синтез стохастической системы, удовлетворяющей принятому критерию оптимальности, при выполнении установленных ограничений на случайные входные и выходные параметры.

Случайные векторы (многомерные случайные величины), их характеристики и свойства

$\tilde{X} = \{\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2 \ldots \tilde{x}_i \ldots \tilde{x}_n\} \longrightarrow p_X(X) = p_X(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – **совместная** плотность распределения элементов случайного вектора X

(аналог плотности распределения $p_x(x)$ случайной величины $\tilde{x}$



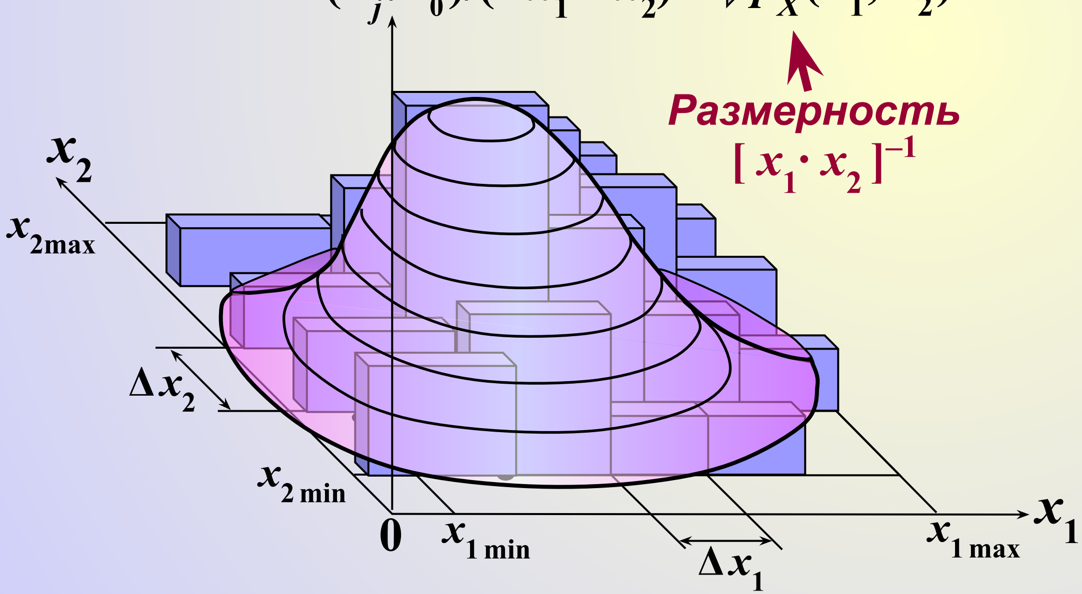
Свойство: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(X)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = 1$

Схема алгоритма построения математической модели $p_X(X)$ на примере двумерной случайной величины

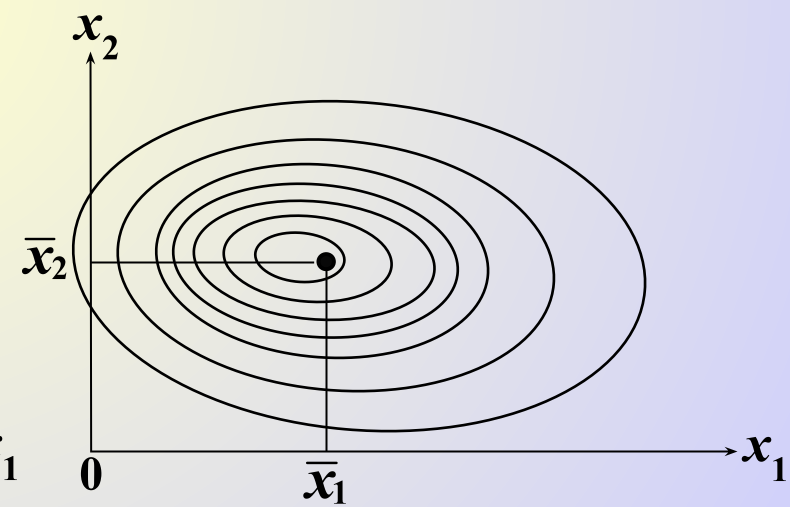
$\tilde{X} = \{\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2\}\ (n = 2)$

$(n_j/n_0)/(\Delta x_1 \cdot \Delta x_2) \Rightarrow p_X(x_1, x_2)$

Размерность $[\,x_1 \cdot x_2\,]^{-1}$



Представление функции $p_X(x_1, x_2)$ способом горизонталей



При произвольном n функция $p_X(X)$ описывает поверхность в $(n+1)$-мерном пространстве

Функциональные характеристики случайного вектора

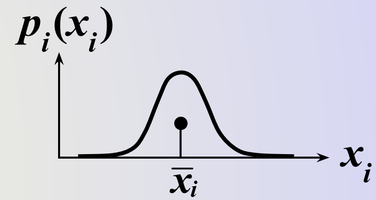
❖ **Функция распределения случайного вектора**

$$F(X)=F(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)=\int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2}\dots\int\limits_{-\infty}^{x_i}\dots\int\limits_{-\infty}^{x_n}p_X(X)\,dx_1\,dx_2\dots dx_i\dots dx_n=$$

$$=P(\tilde{x}_1<x_1,\dots,\tilde{x}_i<x_i,\dots,\tilde{x}_n<x_n)$$

❖ **Плотность распределения i – го элемента**

$$p_{x_i}(x_i)\equiv p_i(x_i)=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n-1\ \text{раз}}p_X(X)\,dx_1\,dx_2\dots \underline{dx_{i-1}\,dx_{i+1}}\dots dx_n$$



Числовые характеристики i – го элемента

математическое ожидание элемента $\tilde{x}_i$:

$$\bar{x}_i=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x_i\cdot p_i(x_i)\,dx_i=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n\ \text{раз}}x_i\cdot p_X(X)\,dx_1\,dx_2\dots dx_i\dots dx_n$$

дисперсия элемента $\tilde{x}_i$:

$$\boxtimes\, x_i=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x_i-\bar{x}_i)^2\cdot p_i(x_i)\,dx_i=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n\ \text{раз}}(x_i-\bar{x}_i)^2\cdot p_X(X)\,dx_1\,dx_2\dots dx_i\dots dx_n$$

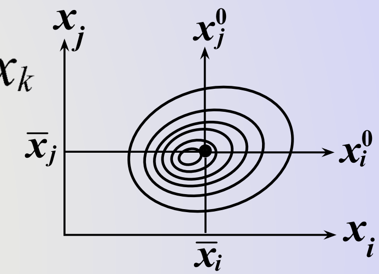
Функциональные характеристики случайного вектора

❖ **Совместная плотность распределения группы элементов** $X_k = \{ x_1\ x_2\ \dots\ x_k \}$

$$p_{X_k}(X_k) = p_{X_k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n-k\ \text{раз}} p_X(X)\, dx_{k+1}\, dx_{k+2} \dots dx_k$$

Для i **– го и** j **– го элементов** $(k=2)$:

$$p_{ij}(x_i, x_j) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n-2\ \text{раза}} p_X(X)\, dx_1\, dx_2 \dots \underline{dx_{i-1}\, dx_{i+1}} \dots \underline{dx_{j-1}\, dx_{j+1}} \dots dx_k$$



Числовые характеристики i – го и j – го элементов

Математические ожидания элементов:

$$\bar{x}_i = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_i \cdot p_{ij}(x_i, x_j)\, dx_i\, dx_j; \quad \bar{x}_j = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x_j \cdot p_{ij}(x_i, x_j)\, dx_i\, dx_j$$

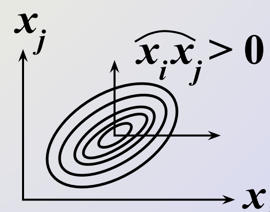
Дисперсии элементов:

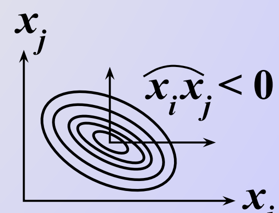
$$D_{x_i} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \bar{x}_i)^2 \cdot p_{ij}(x_i, x_j)\, dx_i\, dx_j; \quad D_{x_j} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_j - \bar{x}_j)^2 \cdot p_{ij}(x_i, x_j)\, dx_i\, dx_j$$

Ковариация (смешанная дисперсия) **элементов:**

корреляционный момент

$$\widehat{x_i x_j} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \bar{x}_i) \cdot (x_j - \bar{x}_j) \cdot p_{ij}(x_i, x_i)\, dx_i\, dx_j$$





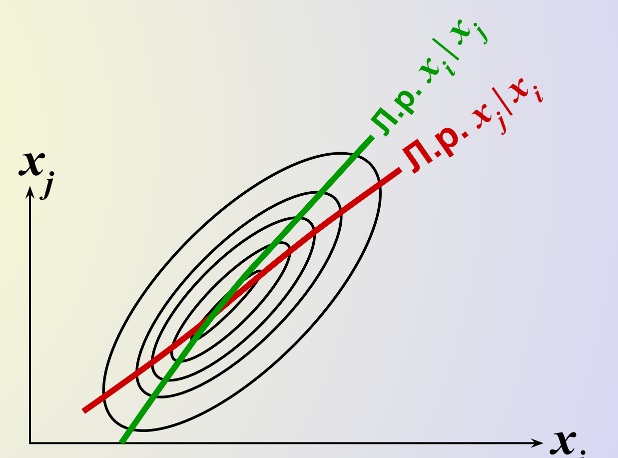
Функциональные характеристики случайного вектора

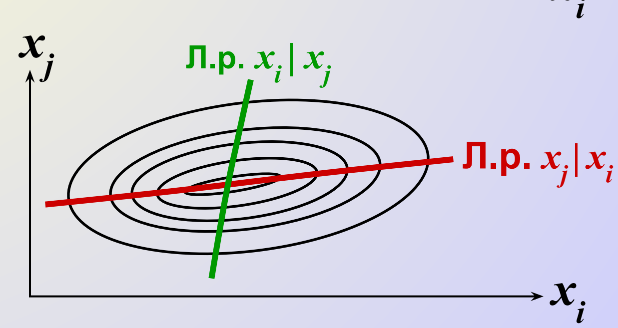
❖ **Условная совместная плотность распределения группы элементов** $X_k = \{ x_1\ x_2\ \dots\ x_k \}$

$$p_{X_k}(X_k | \underbrace{X_{n-k}}_{\text{заданы}}) = \frac{p_X(X)}{p_{X_{n-k}}(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n)} \Rightarrow n=2:\ p_1(x_1|x_2) = \frac{p_X(x_1, x_2)}{p_2(x_2)}$$

$$\text{или}\quad p_i(x_i|x_j) = \frac{p_{ij}(x_i, x_j)}{p_j(x_j)}$$

Поверхность (при $n=2$ – линия) регрессии – геометрическое место центров условного распределения некоторой с.в. $\tilde{x}_i$ при определённых значениях всех остальных.





Числовые характеристики случайного вектора

❖ **Вектор математических ожиданий координат центра распределения**

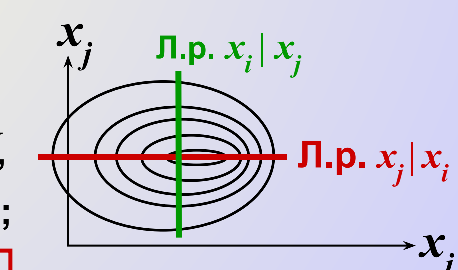
$$\overline{X} = \left\{ \overline{x}_1 \ \overline{x}_2 \dots \overline{x}_i \dots \overline{x}_n \right\} \quad \left(\overline{x}_i = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \cdot p_X(X)\, dx_1\, dx_2 \dots dx_i \dots dx_n \right)$$

❖ **Матрица ковариаций (≡ матрица дисперсий)**
(ковариационная матрица, корреляционная матрица)

$$\overset{\approx}{X} = \begin{bmatrix} \overset{\approx}{x}_1 & \widehat{x_1 x_2} & \cdots & \widehat{x_1 x_i} & \cdots & \widehat{x_1 x_j} & \cdots & \widehat{x_1 x_n} \\ \widehat{x_2 x_1} & \overset{\approx}{x}_2 & \cdots & \widehat{x_2 x_i} & \cdots & \widehat{x_2 x_j} & \cdots & \widehat{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{x_i x_1} & \widehat{x_i x_2} & \cdots & \overset{\approx}{x}_i & \cdots & \widehat{x_i x_j} & \cdots & \widehat{x_i x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{x_j x_1} & \widehat{x_j x_2} & \cdots & \widehat{x_j x_i} & \cdots & \overset{\approx}{x}_j & \cdots & \widehat{x_j x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{x_n x_1} & \widehat{x_n x_2} & \cdots & \widehat{x_n x_i} & \cdots & \widehat{x_n x_j} & \cdots & \overset{\approx}{x}_n \end{bmatrix}$$

$$\widehat{x_i x_j} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \overline{x}_i)\cdot(x_j - \overline{x}_j)\cdot p_{ij}(x_i, x_i)\, dx_i\, dx_j = \widehat{x_j x_i} = \overline{x_j \cdot x_i} - \overline{x}_j \cdot \overline{x}_i$$

Если два элемента $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$ независимые, то $\widehat{x_i x_j} = \widehat{x_j x_i} = 0.$



Если независимыми являются все элементы случайного вектора $\tilde{X}$,
то матрица дисперсий – диагональная: $\overset{\approx}{X} = \mathrm{diag}\left[\tilde{x}_1 \ \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_i \dots \tilde{x}_n\right]$;

при этом совместная плотность распределения $\boxed{p_X(X) = \prod_{i=1}^{n} p_i(x_i)}$

Числовые характеристики случайного вектора

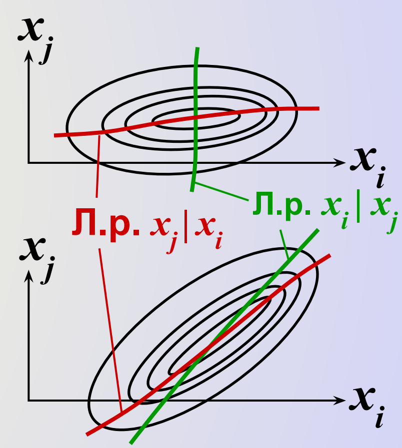
❖ Индексы и коэффициенты корреляции

$$\mu_{ij}=\mu_{ji}=\frac{\overset{\frown}{\tilde{x}_i\,\tilde{x}_j}}{\sqrt{\tilde{x}_i\cdot\tilde{x}_j}}\quad(=r_{ij}=r_{ji})$$

Индекс корреляции (корреляционное отношение)

Коэффициент корреляции (при линейной зависимости между $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$)

$$0\le|\mu_{ij}|\le 1 \;\Leftarrow\; \boxed{-1\le(\mu_{ij},r_{ij})\le 1} \;\Rightarrow\; 0\le|r_{ij}|\le 1$$



$0<|\mu_{ij}|<0{,}2$ – слабая стохастическая зависимость между $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$

$0{,}8<|\mu_{ij}|<1$ – зависимость между $\tilde{x}_i$ и $\tilde{x}_j$, близкая к функциональной

❖ Матрица коэффициентов (индексов) корреляции

$$r=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1i} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2i} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{i1} & r_{i2} & \cdots & r_{ii} & \cdots & r_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{ni} & \cdots & r_{nn}\end{bmatrix}$$

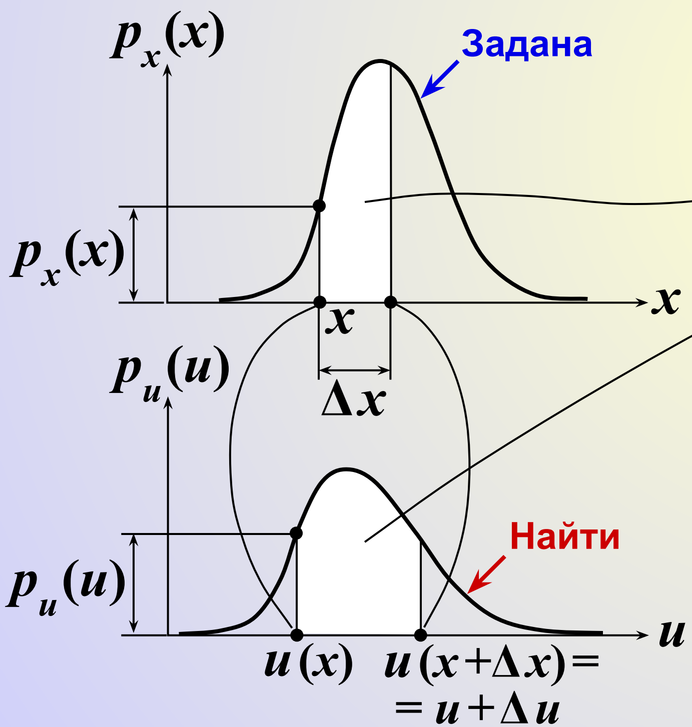
В случае стохастически независимых (некоррелированных) всех элементов случайного вектора $\tilde{X}$ матрица r – единичная диагональная:

$$r=E=\mathrm{diag}\,[1\;1\;\ldots\;1]$$

Функции случайных аргументов, определение их вероятностных характеристик

***Задача*:** требуется определить функциональные и / или числовые вероятностные характеристики многомерной случайной величины – вектора $\tilde{u}=\{\tilde{u}_1\ \tilde{u}_2 \dots \tilde{u}_k \dots \tilde{u}_m\}$, элементы которого являются функциями случайного вектора $\tilde{X}=\{\tilde{x}_1\ \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_i \dots \tilde{x}_n\}$ с известной совместной плотностью распределения $p_X(X)$.

При $m=1$ и $n=1$: $\tilde{u}=\{\tilde{u}_1\}$; $\tilde{X}=\{\tilde{x}_1\}$; $\tilde{u}_1=u_1(\tilde{x}_1)$; для краткости $u=u(x)$.



Условие равновероятности:

$$P(x<\tilde{x}<x+\Delta x)=P(u<\tilde{u}<u+\Delta u)$$

При $\Delta x \to dx \quad \Delta u \to du$

$$p_x(x)\cdot dx = p_u(u)\cdot du$$

$$\boxed{p_u(u)=\frac{dx}{du}\,p_x(x)}$$

Здесь $x=x(u)$ –
обращением зависимости $u=u(x)$

Функции случайных аргументов, определение их вероятностных характеристик

Аналитическое определение плотности распределения функции случайных аргументов

При произвольных n и $m < n$, аналогично выводу при $n=1$ и $m=1$:

$$p_u(u) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{n-m\ \text{раз}} p_X(f_1, f_2, \ldots, f_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)\cdot\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|\cdot dx_{m+1}\,dx_{m+2}\ldots dx_n$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \frac{\partial f_m}{\partial u_2} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}; \quad f_j = x_j(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n)$$

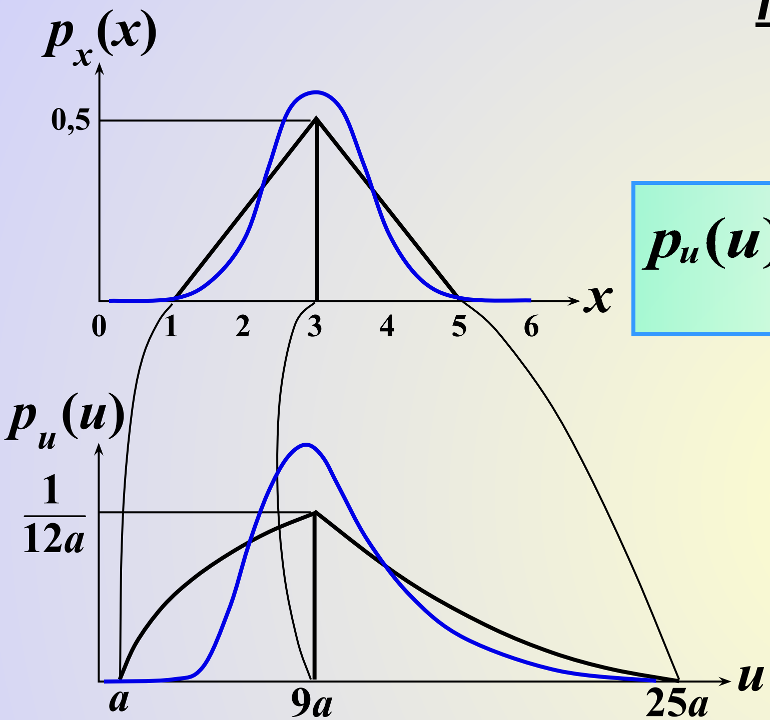
При произвольных n и $m \geq n$: $p_u(u) = p_X(\underbrace{f_1, f_2, \ldots, f_n}) \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right|$

Для получения используются любые n из m зависимостей $u = u(X)$

Частный случай: $m = n = 1$

$$\boxed{p_u(u) = p_{x(u)}x[(u)]\,\frac{dx(u)}{du}}$$

Функции случайных аргументов, определение их вероятностных характеристик



П р и м е р 1

$$\tilde{u} = a\tilde{x}^2 \Rightarrow x(u) = \sqrt{\frac{u}{a}}\,; \quad \frac{dx(u)}{du} = \frac{1}{2\sqrt{au}}$$

$$\boxed{p_u(u) = \frac{1}{2\sqrt{au}}\, p_{x(u)}\big(x(u)\big)}$$

П р и м е р 2

$$\tilde{u} = a\tilde{x} + b$$

$$x(u) = \frac{u-b}{a}\,; \quad \frac{dx(u)}{du} = \frac{1}{a}$$

$$\boxed{p_u(u) = \frac{1}{a}\, p_{x(u)}\big(x(u)\big)}$$

Математическое ожидание $\bar{u} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\, p_u(u)\, du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\, p_x(x)\, dx = \underline{a\bar{x} + b}$

Дисперсия $\overset{\square}{u} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u-\bar{u})^2 p_u(u)\, du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u-\bar{u})^2 p_x(x)\, dx = \underline{a^2 \overset{\square}{x}}$

Функции случайных аргументов, определение их вероятностных характеристик

Пример 2

$$\tilde{u} = \tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \text{, например , } \tilde{q} = \tilde{q}_{const} + \tilde{q}_{temp}$$

$$(\, \tilde{u} = \{\tilde{u}_1\}; \;\; \tilde{X} = \{\tilde{x}_1 \; \tilde{x}_2\}; \;\; m = 1, \;\; n = 2 \,)$$

Применение общей формулы в случае $m = 1 < n = 2$ даёт $p_u(u) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_X(\, f_1, x_2) \cdot \dfrac{df_1}{du} dx_2,$

где $f_1 \equiv x_1 = u - x_2\,;\quad \dfrac{df_1}{du} = 1$

При независимых нормально распределенных $\tilde{x}_1$ и $\tilde{x}_2$:

$$p_X(X) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \hat{x}_1}} e^{-\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2\hat{x}_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \hat{x}_2}} e^{-\frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2\hat{x}_2}} = \frac{1}{2\pi \hat{x}_1 \hat{x}_2} e^{-\frac{(x_1 - \bar{x}_1)^2}{2\hat{x}_1} - \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2\hat{x}_2}}$$

тогда $p_u(u) = \dfrac{1}{2\pi \hat{x}_1 \hat{x}_2} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(u - x_2 - \bar{x}_1)^2}{2\hat{x}_1} - \frac{(x_2 - \bar{x}_2)^2}{2\hat{x}_2}} dx_2$

В результате преобразований и интегрирования:

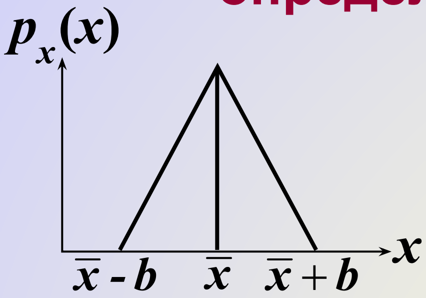
$$\boxed{p_u(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \hat{u}}} e^{-\frac{(u - \bar{u})^2}{2\hat{u}}}}$$

– **нормальное** распределение с математическим ожиданием

$$\bar{u} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2$$

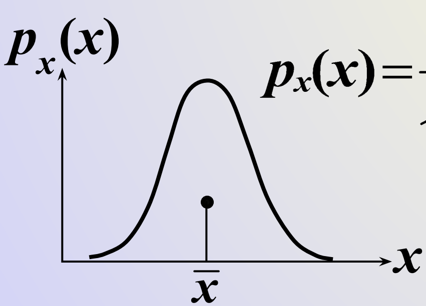
и дисперсией $\hat{u} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$

Функции случайных аргументов, определение их вероятностных характеристик



$$p_x(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<\bar{x}-b \\ \dfrac{b-\bar{x}+x}{b^2} & \text{при } \bar{x}-b\le x\le \bar{x} \\ \dfrac{b+\bar{x}-x}{b^2} & \text{при } \bar{x}<x\le \bar{x}+b \\ 0 & \text{при } x>\bar{x}+b \end{cases}$$

$$p_u(u)=\begin{cases} 0 & \text{при } x<\bar{x}-b \\ \dfrac{1}{2b^2\sqrt{a}}\cdot\begin{cases} \dfrac{b-\bar{x}}{\sqrt{u}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}} \\ \dfrac{b+\bar{x}}{\sqrt{u}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}} \end{cases} & \begin{array}{l}\text{при } \bar{x}-b\le x\le \bar{x} \\ \text{при } \bar{x}-b\le x\le \bar{x}\end{array} \\ 0 & \text{при } x>\bar{x}+b \end{cases}$$



$$p_x(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hat{x}}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\hat{x}}}$$

$$p_u(u)=\frac{1}{2e^{\left(\frac{\bar{x}^2}{2\hat{x}}\right)}\sqrt{2\pi a\hat{x}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\frac{u}{2a}-\bar{x}\sqrt{\frac{u}{a}}}{\hat{x}}}$$

Функции случайных аргументов, определение их вероятностных характеристик

Пример 3

Линейная функция конечного числа случайных аргументов

$$\tilde{u} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{x}_i ; \quad m = 1 < n$$

$$f_1 \equiv x_1 = \frac{1}{a_1}\left(u - a_0 - \sum_{i=2}^{n} a_i \tilde{x}_i \right); \quad \frac{df_1}{du} = \frac{1}{a_1}$$

$$p_u(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_X (f_1, x_2, x_3, \ldots , x_n) \cdot \frac{1}{a_1} dx_2\, dx_3 \ldots dx_n$$

Математическое ожидание

$$\bar{u} = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i$$

Дисперсия

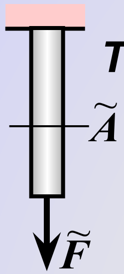
$$\breve{u} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j \widehat{x_i x_j}$$

Важное свойство: если все элементы вектора $X = \{x_1\, x_2 \ldots x_n\}$ – нормально распределённые с.в., то линейная функция $\tilde{u}(\tilde{x})$ – также нормально распределённая.

В других случаях плотность $p_u\,(u)$ определяется в результате интегрирования.

Функции случайных аргументов, определение их вероятностных характеристик

Пример 4



Требуется: **найти функцию плотности распределения нормального напряжения в поперечном сечении стержня при его осевом растяжении**

Нагрузка и площадь сечения – независимые случайные величины с нормальным распределением

$$\tilde{\sigma}=\tilde{F}\,\tilde{A}^{-1}$$

$$\left(\tilde{u}=\tilde{x}_1\,\tilde{x}_2^{-1}\right)$$

$$p_X(X)=p_F(F)\cdot p_A(A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{F}}e^{-\frac{(x-\bar{F})^2}{2\hat{F}^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{A}}e^{-\frac{(A-\bar{A})^2}{2\hat{A}^2}}=\frac{1}{2\pi\hat{F}\hat{A}}e^{-\frac{(F-\bar{F})^2}{2\hat{F}^2}-\frac{(A-\bar{A})^2}{2\hat{A}^2}}$$

$$p_u(u)\equiv p_\sigma(\sigma)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{df_1}{du}\right|p_X(f_1,x_2)\,dx_2=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{dF}{d\sigma}\right|p_X(F,A)\,dA$$

$$f_1\equiv F=u\cdot x_2=\sigma\cdot A;\quad \frac{df_1}{du}=\frac{dF}{d\sigma}=\frac{d(\sigma\cdot A)}{d\sigma}=A$$

$$p_\sigma(\sigma)=\int_{-\infty}^{+\infty}A\cdot p_X(F,A)\,dA=\frac{1}{2\pi\hat{F}\hat{A}}\int_{-\infty}^{+\infty}A\cdot e^{-\left[\frac{(\sigma A-\bar{F})^2}{2\hat{F}^2}+\frac{(A-\bar{A})^2}{2\hat{A}^2}\right]}dA$$

$$\boxed{p_\sigma(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,A_A\bar{\sigma}}\cdot\frac{s+\alpha^2}{\sqrt{\left(s^2+\alpha^2\right)^3}}\cdot e^{-\frac{(s-1)^2}{2A_A^2\left(s^2+\alpha^2\right)}}}$$

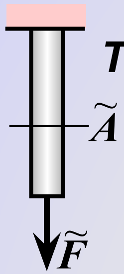
$s=\sigma/\bar{\sigma}$

$\alpha=A_F/A_A$

$A_F,\ A_A$ – коэффициенты вариации

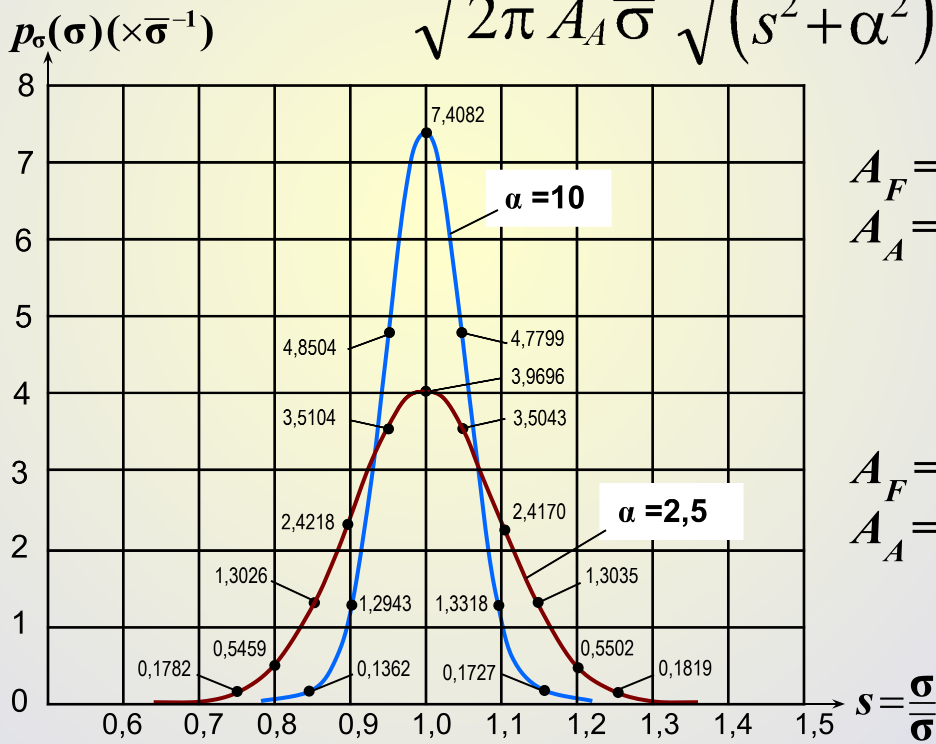
Функции случайных аргументов, определение их вероятностных характеристик

П р и м е р 4



Требуется: **найти функцию плотности распределения нормального напряжения в поперечном сечении стержня при его осевом растяжении**

$$p_\sigma(\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,A_A\overline{\sigma}}\cdot\frac{s+\alpha^2}{\sqrt{\left(s^2+\alpha^2\right)^3}}\cdot e^{-\frac{(s-1)^2}{2A_A^2\left(s^2+\alpha^2\right)}}$$



$$\left.\begin{aligned}A_F&=0{,}1\\A_A&=0{,}01\end{aligned}\right]\alpha=10$$

$$\left.\begin{aligned}A_F&=0{,}05\\A_A&=0{,}02\end{aligned}\right]\alpha=2{,}5$$