

3 Формальная постановка комбинаторно-оптимизационных задач

3.1. Общая формальная постановка задачи дискретной оптимизации

Выбор метода и разработка алгоритма решения задачи требует ее формальной постановки. Математическая модель комбинаторно-оптимизационной задачи структурного синтеза на графах должна указывать *в виде математических абстракций* на необходимость получения по модели объекта проектирования модели результата, такой, для которой удовлетворялись бы заданные ограничения, а целевая функция имела бы оптимальное значение.

Нередко вариант структуры полностью может быть охарактеризован только совокупностью выходных параметров.

Таким образом, возникает задача многокритериальной оптимизации.

Формальная постановка комбинаторно-оптимизационных задач

Наилучшему качеству объекта могут соответствовать как максимальные, так и минимальные значения параметров из этой совокупности. Улучшение значения одного или нескольких параметров может привести к ухудшению значения других.

Обычно многокритериальные задачи сводят к однокритериальным, выбирая в качестве целевой функции параметр, наиболее полно характеризующий проектируемый объект. Остальные параметры или их часть могут выступать в качестве ограничений (условий). Параметры, которые не были включены в ограничения, будут принимать значения, полученные при оптимизации целевой функции. Мы пришли к задаче на условный экстремум (максимум или минимум).

Общая формальная постановка задачи дискретной оптимизации

Найти $x^* \in X: f(x^*) = \text{opt}\{f(x) / x \in X\}$

при $\Theta_i(y_1, \dots, y_m) \geq 0, l = \overline{1, n}, a_j \leq y_j \leq b_j, j = \overline{1, m}, f(x) = F(Y, Z),$

где X – вектор выходных переменных, задающий конечное множество допустимых решений – вариантов структуры,

x – допустимое решение – один из вариантов структуры,

x^* – оптимальное решение,

f – целевая функция задачи оптимизации,

$f(x^*)$ – оптимальное значение целевой функции,

$Y = \{y_j / j = \overline{1, m}\}$ – вектор управляемых переменных, конкретные значения которых определяют один из вариантов структуры объекта, значение целевой функции и показателей, включенных в ограничения,

$Z = \{z_k / k = \overline{1, K}\}$ – вектор неуправляемых переменных.

Общая формальная постановка задачи дискретной оптимизации

Конкретизация общей формулировки для различных проектных задач структурного синтеза требует выбора целевой функции и определения состава векторов управляемых, неуправляемых и выходных переменных, разработки модели объекта проектирования и т. д.

В качестве u_j могут выступать количество элементов определенного типа в структуре объекта и их характеристики, координаты элементов, наличие или отсутствие связей, характеристики связей и т.д.

К неуправляемым параметрам относятся такие конструкторские характеристики комплектующих элементов структуры, как размеры, масса, выделяемая мощность, интенсивность отказов (или среднее время безотказной работы и его дисперсия) и т.д.

Пример постановки и анализа задачи

На этом этапе необходимо с требуемой степенью глубины и максимально возможной полнотой и точностью выяснить следующие вопросы:

- Что представляет собой объект проектирования, из каких компонент он состоит, каковы отношения между ними, какими свойствами и характеристиками обладают компоненты объекта и их отношения?
- Какие свойства, характеристики и компоненты объекта являются необходимыми и достаточными для решения задачи?
- Что должен представлять собой результат решения, какими свойствами и характеристиками оно должно обладать и каким условиям удовлетворять?

Ответы на эти вопросы дадут нам исходные данные для выбора аппарата формализации и разработки математической модели объекта и результата проектирования, позволят определить требуемую степень детализации объекта и сформулировать ограничения и критерий оптимальности вариантов решения задачи.

Пример постановки и анализа задачи

Рассмотрим простейший пример содержательной постановки одной из задач конструкторского проектирования: *найти хорошую конфигурацию цепи, соединяющей перечисленные выводы*. Такая постановка задачи не несет необходимой информации.

Действительно, невозможно выяснить топологические свойства объекта, так как неизвестно должен ли быть монтаж печатным или проводным, ортогональным или по кратчайшим направлениям, не определена конструкция выводов, нет метрических характеристик и т. д. Указанная цель «найти хорошую конфигурацию» не позволяет дать ни количественной, ни даже качественной оценки проектируемого объекта.

Достаточно четкой и полной постановкой задачи будет, например: *необходимо определить порядок соединения проводным монтажом выводов цепи и обеспечить ее минимальную длину*. Соединение должно быть выполнено в соответствии с описанием цепи, *в котором указывается список выводов и их координаты*.

Пример постановки и анализа задачи

Анализ содержательной постановки задачи. Метод монтажа – накрутка или бандажирование, вид провода - одножильный (при бандажировании может быть многожильный), конструкция выводов - монтажные штыри некруглого или круглого сечения.

Объектом проектирования является цепь, ее компоненты – это выводы и связи между ними в виде отрезков проводного монтажа. Так как монтаж осуществляется не в каналах, его можно выполнять по кратчайшим направлениям.

Как сами выводы, так и соединяющие их провода, инварианты в смысле функционального назначения, так как цепь – это совокупность эквипотенциальных выводов, связанных отрезками проводов. Отсюда следует, что допустим в принципе любой порядок соединения выводов.

Направление распространения сигнала по цепи несущественно, поэтому двуместные отношения принадлежности между выводами и отрезками проводов обладают свойствами симметричности.

Пример постановки и анализа задачи

Сама цепь не должна иметь замкнутых контуров, так как это противоречит требованию минимума ее длины. Отрезки проводного монтажа имеют одну метрическую характеристику – длину; вид провода, очевидно, не существенен для определения порядка соединения выводов и не влияет на длину цепи.

Различия в конструктивном исполнении выводов и способ монтажа влияет на количество отрезков проводов, подводимых к одному выводу $k_{\text{доп}}$ – это одно из ограничений задачи. После установления этого ограничения мы можем абстрагироваться от способа монтажа и вида выводов.

И, наконец, требование обеспечить минимальную длину цепи определяет критерий оптимальности решения задачи в виде минимума суммарной длины отрезков проводников, соединяющих выводы цепи.

Пример постановки и анализа задачи

Выбор аппарата формализации. На предыдущем этапе выявлено, что объект и результат проектирования состоит из *компонент двух видов* – выводы и отрезки проводников, между ними существуют *двуместные отношения принадлежности*, выводы цепи находятся в отношении *связности*. Отрезки проводов имеют метрическую характеристику – длину, выводы – координаты.

Следовательно математической моделью объекта проектирования может быть *граф*, так как эта математическая абстракция позволяет отобразить указанные выше компоненты, их отношения и характеристики.

Длину проводников в графе, координаты выводов и допустимое количество проводников, подсоединяемых к одному выводу, можно задать в виде соответствующих весов.

Аппарат теории графов широко применяется и глубоко развит, определены операции на графах, сформулированы теоремы, леммы и т. п., разработано большое количество алгоритмов преобразования графов.

Пример постановки и анализа задачи

Разработка модели объекта и результата проектирования.

Для перехода от объектов задач структурного синтеза к их математическим моделям в виде различного рода графов необходимо:

- сформулировать правила, по которым компоненты объекта будут поставлены в соответствие элементам графа;
- установить вид этих соответствий (взаимно однозначные, однозначные, многозначные) и свойства предикатов, определенных на элементах графа;
- определить способ отображения свойств и характеристик компонент объекта в характеристики графа и его элементов.

Все это определяется, исходя из отношений, существующих между компонентами объекта, а также свойств объекта и характеристик его компонент, которые являются необходимыми и достаточными для решения задачи.

Под *правильностью* модели будем понимать ее адекватность объекту.

Пример постановки и анализа задачи

Для представления цепи графом каждому выводу b_i множества выводов цепи B поставим во взаимно однозначное соответствие вершину графа x_i множества его вершин X :

$$B \leftrightarrow X.$$

Каждому отрезку проводника $o_j \in O$ (где O – множество отрезков) соединяющему выводы v_i и v_k , поставим во взаимно однозначное соответствие ребро графа u_j :

$$O \leftrightarrow U.$$

Принадлежность выводов отрезкам цепей и наоборот задается предикатами инцидентности $\Gamma_1(X, U)$ и $\Gamma_2(U, X)$ соответственно:

$$\text{Pr}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) \sim \Gamma_1(X, U), \quad \text{Pr}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \sim \Gamma_2(U, X).$$

Так как каждый отрезок цепи соединяет два вывода, предикаты Γ_1 и Γ_2 должны удовлетворять условию: $\forall u_j \in U (|\Gamma_2 u_j| = 2)$.

При определении конфигурации цепи направление распространения сигнала по ней не существенно. Отсюда предикат $\Gamma_2(U, X)$ должен быть обратным к предикату $\Gamma_1(X, U)$. Следовательно моделью цепи будет *обыкновенный неориентированный граф*.

Пример постановки и анализа задачи

Длину отрезка цепи сопоставим весу ребра

$$U \rightarrow W,$$

в дальнейшем будем просто говорить «длина ребра», а координаты вывода – весу вершины

$$X \leftrightarrow (S, T)$$

(в этом случае говорят, что вершина фиксирована), второй весовой характеристикой вершины является ограничение на количество подводимых проводников

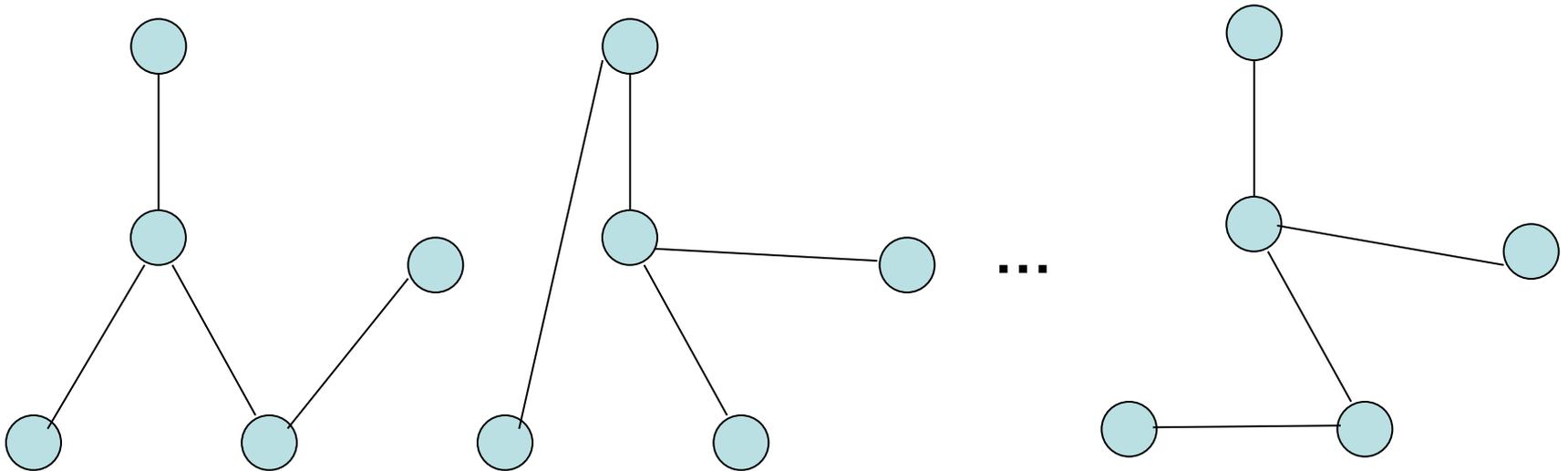
$$X \rightarrow K_{\text{доп}}$$

Необходимо учесть еще два свойства цепи: отрезки проводов должны соединять все выводы и не образовывать замкнутых контуров.

Пример постановки и анализа задачи

Таким образом, математической моделью цепи должно быть *остовное дерево с взвешенными ребрами*, которое необходимо построить *на фиксированных вершинах*.

Модель объекта проектирования должна отражать то, что *допускается любой порядок соединения выводов*. Значит, необходимо сформировать все возможные варианты остовных деревьев на множестве фиксированных вершин X .



Пример постановки и анализа задачи

Напомним, что количество таких деревьев

$$t = n^{n-2},$$

где $n = |X|$ - количество вершин графа (выводов цепи).

Учитывая, что дерево – это связный граф с цикломатическим числом $\gamma = 0$, математическую модель объекта проектирования (множество вариантов структуры цепи) можно записать так:

$$G = \{G_i(X, U_i) / i = \overline{1, t}\}, |U_i| = n-1, \gamma_i = 0, (\forall x \in X) \rho(x) < k_{\text{доп}},$$

где $\{G_i\}$ – это множество допустимых решений.

Более компактной моделью объекта проектирования для данной задачи является полный неориентированный граф $G_n(X, U) = \cup G_i$, построенный на фиксированных вершинах, с взвешенными ребрами, для которого справедливо выражение

$$\forall x_j, x_k \in X \exists u_j \in U (\Gamma_1(x_j, u_j) = \text{«и»} \rightarrow \Gamma_2(u_j, x_i) = \text{«и»} \& \\ \Gamma_2(u_j, x_k) = \text{«и»} \rightarrow \Gamma_1(x_k, u_j) = \text{«и»} \& i \neq j).$$

Формальная постановка задачи

Математическая модель комбинаторно-оптимизационной задачи структурного синтеза на графах должна указывать *в виде математических абстракций* на необходимость получения по модели объекта проектирования модели результата, такой, для которой удовлетворялись бы заданные ограничения, а целевая функция имела бы оптимальное значение.

Математические модели объекта и результата проектирования уже получены и содержательно определена целевая функция – *минимум суммарной длины ребер остовного дерева*. Выражение для подсчета значения целевой функции запишем в виде:

$$W(G_i) = \sum_{\forall u_j \in U_i} w(u_j),$$

где для u_j такого, что $\Gamma u_j = \{x_r, x_p\}$ величина $w(u_j) = \sqrt{(s_r - s_p)^2 + (t_r - t_p)^2}$, s_r, t_r, s_p, t_p – координаты вершин x_r, x_p в декартовой системе координат.

Ограничения, накладываемые на результат:

$$\gamma_i = 0, |U_i| = n-1, \quad (\forall x \in X) \rho(x) < \kappa_{\text{доп}}.$$

Формальная постановка задачи

Формальная постановка задачи при использовании в качестве модели объекта проектирования множества $\{G_i\}$ имеет вид:

Найти

$$G_i^*(X, U_i^*) \in G : W(G_i^*) = \sum w(u_j) \rightarrow \min, \\ \forall u_j \in U_i^*$$

при $\gamma_i=0, |U_i^*| = n-1, (\forall x \in X) \rho(x) \leq \kappa_{\text{доп}}$.

Данная постановка наводит на мысль: сгенерировать все варианты остовных деревьев и найти решение *полным перебором*.

Постановка, основанная на использовании в качестве модели объекта проектирования графа G_{Π} , не декларирует метода поиска решения, обеспечивая возможность выбора *более эффективного, чем полный перебор*, и имеет вид:

Выполнить преобразование

$$G_{\Pi}(X, U) \rightarrow G^*(X, U^*), \text{ так, что } \gamma = 0, |U^*| = n-1:$$

$$W(G^*) = \sum w(u_j) \rightarrow \min, \\ \forall u_j \in U^*$$

$$(\forall x \in X) \rho(x) \leq \kappa_{\text{доп}}$$

Формальная постановка задачи позиционирования

Типичным примером задачи позиционирования является задача размещения микросхем в монтажном пространстве одно- и многоплатного субблока. Отметим, что для формальной постановки задач этого класса необходима разработка математической модели как структуры размещаемого объекта – схемы соединения элементов, так и монтажного пространства.

Для n элементов, которые могут быть установлены в m позиций, существует множество $A = \{a_l \mid l = 1, L\}$ размещений, их количество

$$L = \begin{cases} m! / (m-n)!, & m > n \\ m! & \text{если } m = n \end{cases}$$

Рассмотрим формальную постановку задачи размещения при использовании критерия минимума суммарной длины соединений. В качестве математической модели схемы будем использовать гиперграф $H(X, U)$, в котором $X \leftrightarrow \mathcal{E}$, $U \leftrightarrow \mathcal{C}$.

Формальная постановка задачи позиционирования

Модель монтажного пространства – граф решетки Gr , в котором вершина соответствует установочной позиции монтажного пространства, а ребро отображает возможность проведения соединений между соседними позициями. Метрические параметры и топологические характеристики элементов схемы и монтажного пространства учтены при определении множества P вершин графа Gr . Будем считать, что соединения исходят из геометрических центров конструктивных элементов, метрика ортогональная. Тогда каждая цепь c_j (ребро u_j гиперграфа) должна быть реализована остовным ортогональным деревом, построенном на тех вершинах графа Gr , в которые будут отображены вершины ребра u_j . Количество ветвей u_j этого дерева равно $n_j - 1$, где $n_j = |\Gamma u_j|$.

Формальная постановка задачи позиционирования

Тогда (при $|X| = |P|$) формальной постановкой задачи размещения конструктивных модулей будет: найти такое взаимно однозначное соответствие $X \leftrightarrow P$, при котором

$$L(a^*) = \sum_{\forall u_j \in U} \sum_{i=1}^{n_j-1} l(u_{j,i}) \rightarrow \min, \quad (3.7)$$

причем

$$(\forall u_j \in U) \gamma_j = 0, n_j = |\Gamma u_j| - 1. \quad (3.8)$$

Здесь $l(u_{j,i})$ – длина ветви $u_{j,i}$ ортогонального остовного дерева, определяющего порядок соединения выводов цепи $c_j \leftrightarrow u_j$, γ_j – цикломатическое число.

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n_j-1} l(u_{j,i})$ – суммарная длина дерева, реализующего цепь c_j .

Формальная постановка задачи позиционирования

Таким образом, задача заключается в минимизации $L(a)$ на множестве размещений A . Это один из вариантов задачи квадратичного назначения. Для ее решения необходимо для каждого варианта $a \in A$ для всех ребер $ij \in U$ решать задачу совместной (одновременной) минимизации длины ортогональных связывающих деревьев, реализующих эти ребра. Точное решение задачи можно найти методом ветвей и границ.

3.4 Модели коммутационных задач

Рассмотрим задачу поиска маршрута минимальной длины между пунктами p_j и p_k . Модель карты дорог – взвешенный неориентированный граф $G^{\sim}(X, \langle U, L \rangle)$, где:

$X \leftrightarrow \Pi$, Π – множество населенных пунктов, нанесённых на карту;

$U \leftrightarrow \mathcal{D}$, \mathcal{D} – множество дорог, соединяющих эти пункты;

L – длины этих дорог.

Найти маршрут минимальной длины между заданными пунктами. В нижеприведённых постановках считаем, что граф – модель исходного описания объекта не является простой цепью

Модель коммутационной задачи поиска кратчайшего пути

Основываясь на том, что часть неориентированного графа $G^{\sim}(X, U)$ будет простой цепью, соединяющей вершины x_j и x_k , если локальные степени начальной и конечной вершин равны единице, а остальных двойке, получим следующую формальную постановку задачи:

выполнить преобразование D

$$G^{\boxtimes}(X, \langle U, L \rangle) \rightarrow G_1^{\boxtimes}(X_1, U_1) \quad (3.11)$$

$$\text{такое, что } L_1 = \sum_{\forall u_j \in U_1} l(u_j) \rightarrow \min, \quad (3.12)$$

где $X_1 \subseteq X$, $U_1 \subset U$, $|U_1| = |X_1| - 1$ и

$$\forall x_i \in X_1 \setminus \{x_j, x_k\} (\rho(x_i) = 2 \ \& \ \rho(x_j) = \rho(x_k) = 1), \ \rho(x) = |\Gamma x|, \ \Gamma x \in \Gamma X_1.$$

Модель коммутационной задачи поиска кратчайшего пути

Если моделью карты дорог является взвешенный ориентированный граф $G \rightarrow (X, \langle U, L \rangle)$, формальная постановка задачи будет иметь вид:

$$G \rightarrow (X, \langle U, L \rangle) \rightarrow G_1 \rightarrow (X_1, U_1)$$

$$\text{такое, что } L_1 = \sum_{\forall u_j \in U_1} l(u_j) \rightarrow \min,$$

где $X_1 \subseteq X, U_1 \subseteq U, |U_1| = |X_1| - 1$ и $\forall x_i \in X_1 \setminus \{x_j, x_k\} (\rho^+(x_i) = \rho^-(x_i) = 1 \wedge$

$$\rho^+(x_j) = \rho^-(x_k) = 1 \wedge \rho^-(x_j) = \rho^+(x_k) = 0),$$

$$\rho^+(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in X_1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad \rho^-(x) = \begin{cases} 1 & \text{если } x \in X_1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

выполнить преобразование D

Однако эти постановки явно не определяют основную операцию алгоритма – поиск ребра, инцидентного текущей вершине цепи.

Модель коммутационной задачи поиска кратчайшего пути

Из основного определения понятий маршрут и простая цепь вытекает следующая математическая модель данной задачи:
в графе $G \sim (X, \langle U, L \rangle)$ найти чередующуюся последовательность

$$Ch^*(x_j, x_k) = (x_j, u_k, x_t, u_k, \dots, u_p, x_k)$$

такую, что
$$L_1 = \sum_{\forall u_j \in U_1} l(u_j) \rightarrow \min,$$

где $U_1 = \{u_k, u_r, \dots, u_p\}$, $U_1 \subset U$, $X_1 = \{x_j, x_t, \dots, x_k\}$, $X_1 \subseteq X$, $u_k \in \Gamma x_j$, $x_t \in \Gamma u_k$, $u_r \in \Gamma x_t, \dots, x_k \in \Gamma u_p$, $\forall x_i, x_k \in X_1 (x_i \neq x_k)$, $\Gamma x_j, \dots, \Gamma x_t \in \Gamma X$, $\Gamma u_k, \dots, \Gamma u_p \in \Gamma U$.

Модель коммутационной задачи нахождения замкнутого маршрута минимальной длины (коммивояжёра)

Содержательно задача формулируется следующим образом:

имеется n пунктов и задано расстояние для соединяющих их дорог. Необходимо определить замкнутый маршрут посещения всех городов, имеющий минимальную длину. В терминах теории графов это задача нахождения гамильтонова цикла минимальной длины.

Если расстояние от пункта p_i до пункта p_k равно обратному, то задача будет симметричная, а моделью карты дорог – взвешенный неориентированный граф $G(X, \langle U, L \rangle)$. Здесь $l(u_j)$ вес (длина) ребра, соединяющего каждую пару вершин.

Модель задачи коммивояжера

Тогда формальной постановкой задачи будет:

выполнить преобразование D

$$G^{\sim}(X, \langle U, L \rangle) \rightarrow C(x_i, u_j, x_k, u_r, \dots, x_t, u_f, x_i)$$

такое, что

$$L_1 = \sum_{\forall u_j \in U_1} l(u_j) \rightarrow \min$$

и $(\forall u_k \in U_1) (\forall u_l \in U_1) u_k \neq u_l, (\forall x_i \in X_1) \rho_i = 2.$

Модель задачи коммивояжера

Где: $u_j \in \Gamma_1 x_i$ & $u_r \in \Gamma_1 x_k$ & ... $u_f \in \Gamma_1 x_t$ и $x_k \in \Gamma_2 u_j$ & $x_p \in \Gamma_2 u_r$ & ..., $x_i \in \Gamma_2 u_f$ – для ультра- и ориентированных графов и

$u_j \in \Gamma x_i$ & $u_r \in \Gamma x_k$ & ... $u_f \in \Gamma x_t$ и $x_k \in \Gamma u_j$ & $x_p \in \Gamma u_r$ & ..., $x_i \in \Gamma u_f$ – для гипер- и неориентированных графов,

$$(\forall u_k \in U_1) (\forall u_l \in U_1) u_k \neq u_l,$$

$$(\forall x_i \in X_1) \rho_i = 2, \quad (3.13)$$

$X_1 = X$, $U_1 \subset U$, $|U_1| = |X_1|$, где X_1 и U_1 – множества вершин и рёбер цикла.

Для простого цикла ориентированного графа условие (3.13)

принимает вид $\forall x_i \in X_1 (\rho_i^+ = \rho_i^-)$

Напомним, что i – координата вершины/ребра в последовательности.

Модель задачи установления связей между источниками и приёмниками информации

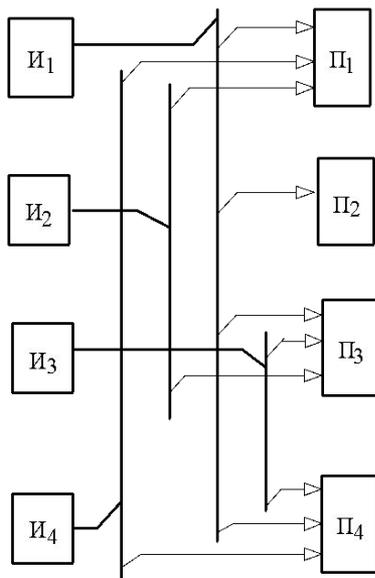
Это вариант задачи о наибольшем независимом множестве рёбер (паросочетаниях) в двудольном графе. Одной из прикладных задач является следующая: имеется одинаковое количество источников и приёмников информации. Определены возможные варианты соединения источников с приёмниками. Задана стоимость передачи информации от источников к приёмникам. Необходимо выполнить соединения таким образом, чтобы один источник был связан только с одним приёмником и суммарная стоимость передачи информации была бы минимальной.

Моделью всех вариантов соединения будет двудольный граф $G(\{X, Y\}, \langle U, C \rangle, F_2 U)$. В этом графе: $X \leftrightarrow$ множество источников, $Y \leftrightarrow$ множество приёмников, $U \leftrightarrow$ множество связей, C – множество весов рёбер (стоимость передачи информации от источников к приёмникам).

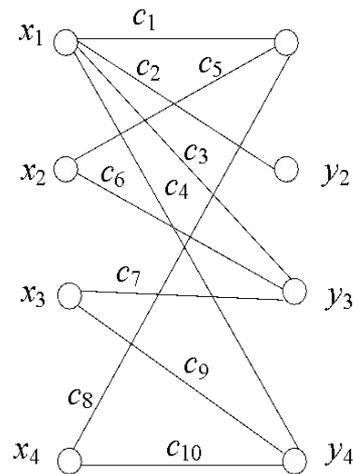
Модель задачи установления связей между источниками и приёмниками информации

Здесь $X \cap Y = \emptyset$, $\forall u_k \in U (\Gamma u_k = \{x_i, y_j\})$, $x_i \in X$, $y_j \in Y$.

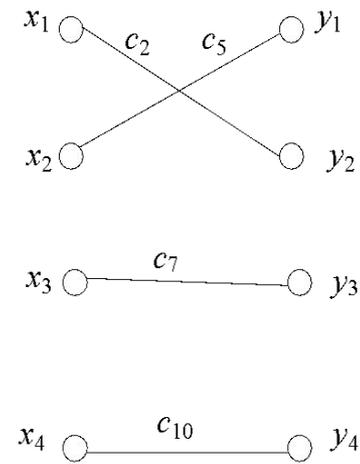
На рисунке показаны структура системы, ее модель в виде двудольного неориентированного графа $G \sim (\{X, Y\}, <U, C>)$ и один из вариантов решения задачи назначения.



а



б



в

Модель задачи установления связей между источниками и приёмниками информации

Формальная постановка этой задачи будет иметь вид:

Найти

$$U_l^* \in 2^U : C_l^* = \sum_{u_k \in U_l^*} c(u_k) \rightarrow \min \quad (3.14)$$

при выполнении условия

$$(\forall u_k \in U_l^*) F_2 u_k = \emptyset \ \& \ | \quad k \quad | = \quad . \quad (3.15)$$

Здесь 2^U – булеан (множество всех подмножеств множества U , $|2^U| = 2^{|U|}$); C_l^* – суммарная стоимость передачи информации, $c(u_k) \in C$, $F_2 u_k^l \in F_2 U$; $U_l^* \subseteq U$ – паросочетания.

Модель задачи выделения древовидной подсистемы из системы иерархически связанных

объектов

В сложной иерархической системе потоки информации от «основного» источника передаются между объектами как одного, так разных уровней иерархии. Потоки информации имеют приоритеты. Из системы необходимо выделить для заданного уровня приоритетов подсистему иерархически связанных объектов.

Моделью системы является взвешенный ориентированный граф

$G \rightarrow (X, \langle U, P \rangle)$, где:

$X \leftrightarrow O$, O – множество объектов системы;

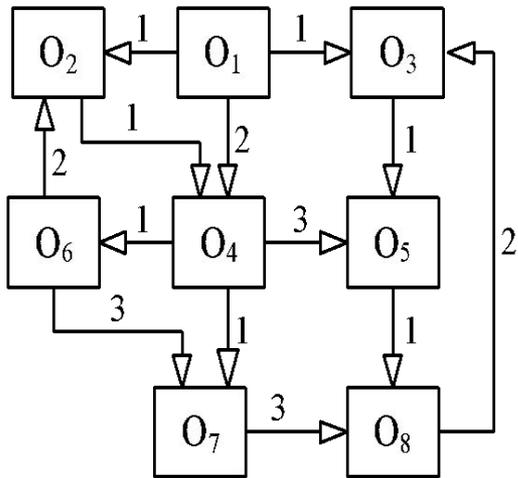
$U \leftrightarrow C$, C – множество потоков информации;

P – веса рёбер (приоритеты потоков информации).

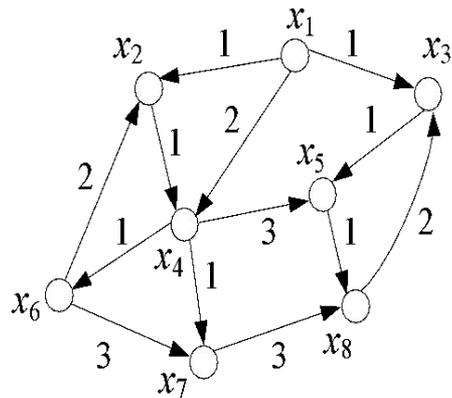
Модель результата – ориентированное дерево.

Модель задачи выделения древовидной подсистемы из системы иерархически связанных объектов

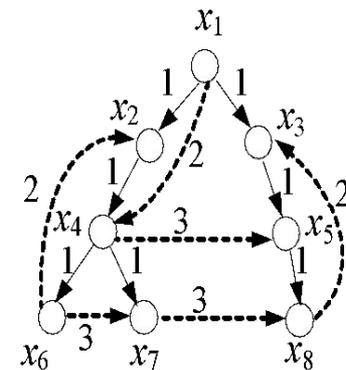
На рисунке представлена система иерархически связанных объектов, ее модель в виде ориентированного графа и ориентированное дерево (сплошные дуги), отображающие передачу информации первого приоритета.



a



б



в

Модель задачи выделения древовидной подсистемы из системы иерархически связанных объектов

Пунктирными линиями изображены:

- прямые дуги, идущие от вершин высшего уровня к вершинам низшего, но не соседнего уровня (приоритет 2);
- обратные дуги, идущие от вершин низшего уровня к вершинам высшего уровня (приоритет 2);
- поперечные дуги, соединяющие вершины одного уровня (приоритет 3).

Модель задачи выделения древовидной подсистемы из системы иерархически связанных объектов

Математическая модель задачи имеет вид:

выполнить преобразование D

$$G^{\rightarrow} (X, \langle U, P \rangle) \rightarrow G_T^{\rightarrow*} (X_T, U^*)$$

так, что $(\forall u_j \in U) p(u_j) = p_{\text{ТРЕБ}}$.

при выполнении условий:

$$\rho_k^- = 0, (\forall x_i \in X \setminus x_k) \rho_i^- = 1, (\forall x_i \in X \setminus x_k) \exists S(x_k, x_i).$$

Где, в зависимости от приоритета, $X_T \subseteq X$, $p_{\text{ТРЕБ}} \in P$ – заданный

приоритет, x_k – вершина, сопоставленная «основному»

источнику информации, $S(x_k, x_i)$ – маршрут из вершины x_k и

вершину x_i .

3.5 Модели задач декомпозиции структур

Математическая модель задачи декомпозиции сложной системы. Необходимо декомпозировать систему на заданное число подсистем таким образом, чтобы количество внешних связей подсистем было минимальным. Моделью структуры является гиперграф $H(X, U)$, в котором:

$X \leftrightarrow K$, где K – множество компонентов системы;

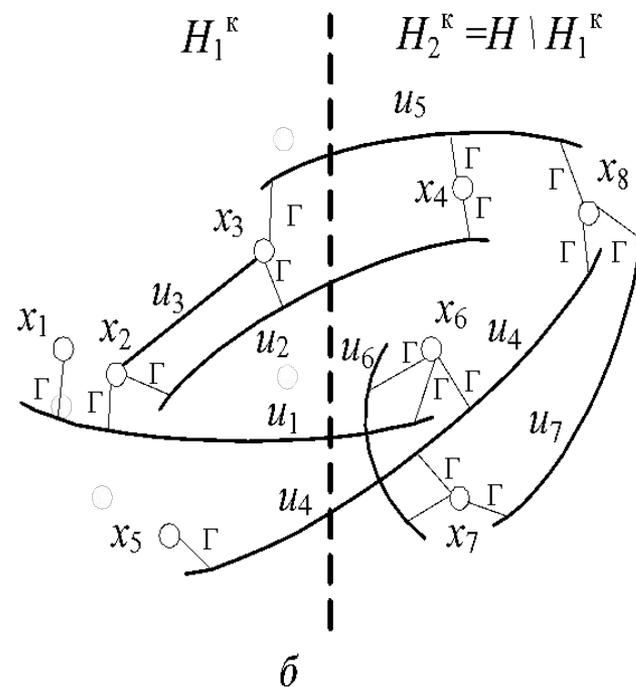
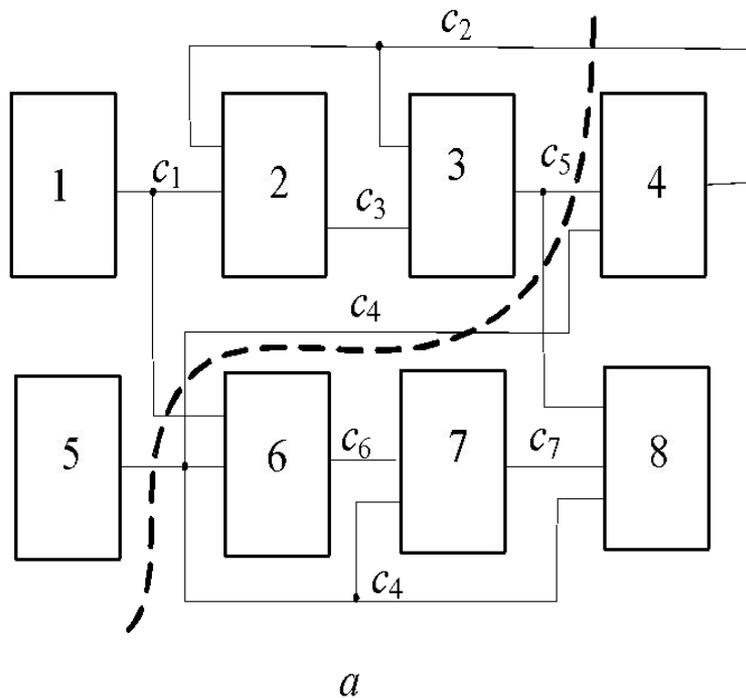
$U \leftrightarrow C$, где C – множество связей между компонентами системы.

Моделью l -й подсистемы будет кусок гиперграфа $H|_k$.

На рис. 4.3.1, а и б представлена структура системы и разрезание ее модели в виде гиперграфа на два куска.

Модель задачи декомпозиции сложной системы

На рисунке представлена структура системы и разрезание ее модели в виде гиперграфа на два куска.



Модель задачи декомпозиции сложной системы

Тогда математической моделью задачи при использовании в качестве критерия компоновки минимума количества связей между подсистемами будет:

найти разрезание гиперграфа $H(X, U)$ на совокупность кусков

$B(H_l^K)$ такую, что

$$\left(\forall H_l^K \in B(H_l^K)\right)\left(H_l^K \neq \emptyset\right), l \in L;$$

$$\left(\forall H_l^K, H_p^K \in B(H_l^K)\right)\left(X_l^K \cap X_p^K = \emptyset \wedge U_l^K \cap U_p^K = U_{l,p}\right), l, p \in L, \cup H_l^K = H;$$

$$l \in L$$

Модель задачи декомпозиции сложной системы

$$L - 1$$

$$\left| \bigcup_{l=1}^{L-1} \bigcup_{p=l+1}^L U_{l,p} \right| = \min \quad (3.14)$$

$$l = 1 \quad p = l + 1$$

$$\text{и } |X_l^k| \leq n_l, \quad \left| \bigcup_{l=1}^L U_l^p \right| \leq S_l, \quad l, p \in L, \quad p \neq l$$

Здесь: $U_{l,p}$ – множество ребер, попадающих в разрез между кусками, $L = 1, L$ – требуемое количество подсистем, n_l и S_l – ограничения по количеству элементов части схемы и числа их выводов. Выражение для минимума количества выводов фрагментов имеет вид:

$$(\forall H_l^k) \in B(H_l^k) \left| \bigcup_{l,p} U_{l,p} \right| = \min. \quad (3.15)$$

$$p \in L, p \neq l$$

Модель задачи дихотомического разрезания схемы соединения подсистем сложной системы

Полученная выше общая постановка задачи разбиения сложной системы не предполагает вид процесса декомпозиции (последовательное выделение, дихотомическое разделение). Рассмотрим ещё одну задачу декомпозиции, в формальной постановке которой заложим стратегию поиска решения.

Задача дихотомического разрезания схемы по минимуму количества связей в соответствии с полученной выше постановкой будет иметь вид:

Модель задачи дихотомического разрезания схемы соединения подсистем сложной системы

найти разрезание гиперграфа $H(X, U)$ на два куска

$$H_1^K(X_1^K, U_1^K), H_2^K(X_2^K, U_2^K)$$

такие, что

$$H_1^K \neq \emptyset, H_2^K \neq \emptyset, H_1^K \cup H_2^K = H, X_1^K \cap X_2^K = \emptyset, |X_1^K| = |X_2^K|,$$

$$U_1^K \cup U_2^K = U \quad (3.16)$$

$$\text{и } S_{1,2} = |U_{1,2}| \rightarrow \min, \quad (3.17)$$

где $S_{1,2}$ – множество ребер, попадающих в разрез между кусками .

Без учета целевой функции (3.17) задача имеет множество $T = \{t_k / k=1, K\}$ решений.

Модель задачи дихотомического разрезания схемы соединения подсистем сложной системы

Так как $X_2^K = X \setminus X_1^K$, то количество вариантов разрезания:

$$K_B = C_n^{n/2} / 2 = n! / [(n/2)!]^2 / 2, \quad (3.18)$$

где $n = |X|$.

Таким образом, ясно, что данная задача относится к классу *NP*-полных.

Из этой постановки задачи не вытекает процесс последовательного порождения древовидной модели пространства решений. Рассмотрим следующую постановку задачи дихотомического разрезания гиперграфа [19].

Модель задачи дихотомического разрезания схемы соединения подсистем сложной системы

на каждом шаге построения дерева решений гиперграф $H(X, U)$ разбивается на три куска

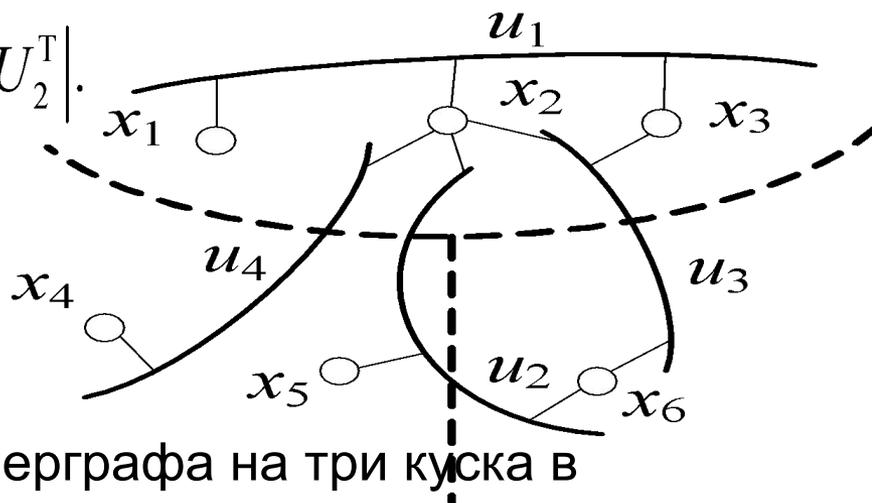
$$\overline{H}^T (\overline{X}^T, \overline{U}^T), H_1^T (X_1^T, U_1^T), H_2^T (X_2^T, U_2^T)$$

таких, что

$$\overline{H}^T = H \setminus \{H_1^T \cup H_2^T\}, X_1^T \cap X_2^T = \emptyset, \overline{X}^T = X \setminus \{X_1^T, X_2^T\},$$

$$U = \overline{U}^T \cup U_1^T \cup U_2^T, S_{1,2} = |U_1^T \cap U_2^T|.$$

На нулевом шаге H_1^T, H_2^T — пустые графы.



Разбиение гиперграфа на три куска в процессе его дихотомического разрезания

3.6 Формальная постановка задачи установления идентичности структур

Пусть имеются две системы, идентичность которых необходимо установить. Структуры будут идентичны, если входы и выходы их одностипных компонентов одинаково соединены. Моделями структур различных систем могут являться ультраграфы $HU(X, U)$, гиперграфы $H(X, U)$, ориентированные $G^{\rightarrow}(X, U)$ и неориентированные $G^{\sim}(X, U)$ графы.

Как обычно множества X и U поставлены во взаимно однозначное соответствие компонентам системы и связям между ними. Тогда моделью задачи установления идентичности структур двух систем будет задача распознавания изоморфизма соответствующих графов.

Формальная постановка задачи установления идентичности структур

Поскольку графы $G \rightarrow (X, U)$, $H(X, U)$ и $G^{\sim}(X, U)$ являются частными случаями ультраграфа достаточно получить формальную постановку задачи изоморфизма ультраграфов.

При установлении изоморфизма двух ультраграфов $H_{U_1}(X, U)$ и $H_{U_2}(Y, V)$, предикаты-инциденторы которых $\Gamma_1(X, U)$, $\Gamma_2(U, X)$ и $\Gamma_3(Y, V)$, $\Gamma_4(V, Y)$ соответственно, необходимо найти взаимно однозначные соответствия множеств их вершин и ребер $X \leftrightarrow Y$, $U \leftrightarrow V$.

В общем случае для множеств X и Y , U и V существует $n!$ и $m!$ соответственно вариантов взаимно однозначных соответствий, где $n = |X| = |Y|$ и $m = |U| = |V|$.

Формальная постановка задачи установления идентичности структур

Для двух изоморфных графов $H_{U_1}(X, U)$ и $H_{U_2}(Y, V)$ существует единственный вариант взаимно однозначных соответствий $X \leftrightarrow Y, U \leftrightarrow V$, при котором предикаты-инциденторы $\Gamma_3(X, U)$ и $\Gamma_4(U, X)$ эквивалентны предикатам-инциденторам $\Gamma_1(Y, V)$ и $\Gamma_2(V, Y)$.

По определению предикаты эквивалентны, если их таблицы истинности совпадают. Эквивалентности $\Gamma_1(X, U) \leftrightarrow \Gamma_3(Y, V)$, $\Gamma_2(U, X) \leftrightarrow \Gamma_4(V, Y)$, будут установлены, если путем перестановки строк и столбцов матриц истинности предикатов Γ_3 и Γ_4 будут получены матрицы истинности предикатов Γ_1 и Γ_2 соответственно. Пары взаимно однозначных соответствий $X \leftrightarrow Y, U \leftrightarrow V$ задаются подстановками $p(x_i)=y_t$ и $t(u_j)=v_r$.

Формальная постановка задачи установления идентичности структур

На основании сказанного формальной постановкой задачи распознавания изоморфизма двух ультраграфов $H_{U_1}(X, U)$ и $H_{U_2}(Y, V)$ будет:

установить справедливость

$$H_{U_1}(X, U) \cong H_{U_2}(Y, V),$$

т. е. для множеств вершин и рёбер найти взаимно однозначные соответствия

$$X \leftrightarrow Y, U \leftrightarrow V,$$

такие, что предикаты-инциденторы $\Gamma_3(X, U)$ и $\Gamma_4(U, X)$ эквивалентны предикатам-инциденторам $\Gamma_1(Y, V)$ и $\Gamma_2(V, Y)$ или

$$\begin{aligned} & (\forall x_i \in X) (\exists y_t \in Y) (\Gamma_1 x_i \leftrightarrow \Gamma_3 y_t) \\ & \text{и } (\forall u_j \in U) (\exists v_r \in V) (\Gamma_2 u_j \leftrightarrow \Gamma_4 v_r). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Формальная постановка задачи установления идентичности структур

Здесь: $\Gamma_1 x_i = U_i^+$ и $\Gamma_3 y_t = V_t^+$ – ребра, инцидентные вершинам x_i и y_t соответственно, $\Gamma_2 u_j = X_j^+$ и $\Gamma_4 v_r = Y_r^+$ – вершины, инцидентные ребрам u_j и v_r соответственно. Взаимно однозначные соответствия $X_j^+ \leftrightarrow Y_r^+$ и $U_i^+ \leftrightarrow V_t^+$ задают подстановки p и t такие, что $p(x_i) = y_t$ и $t(u_j) = v_r$.

Определение подстановок p и t возможно посредством перестановки строк и столбцов матриц истинности предикатов $\Gamma_3(Y, V)$ и $\Gamma_4(V, Y)$ до их совпадения с матрицами истинности предикатов $\Gamma_1(X, U)$ и $\Gamma_2(U, X)$ (возможное количество этих перестановок $n!$ и $m!$ соответственно, где $n = |X| = |Y|$ и $m = |U| = |V|$).

Формальная постановка задачи установления идентичности структур

Существует и другой подход к решению задачи изоморфизма:

- попарным сравнением характеристик вершин (необходимое условие изоморфизма) определяется вариант подстановки $P(X) = Y$;
- проверяется достаточное условие изоморфизма – должна существовать подстановка ребер $T(U) = V$ такая, что вершины, инцидентные этим ребрам, и вершины, которым они инцидентны, удовлетворяют полученной подстановке P .

Формальная постановка задачи установления идентичности структур

Формальной постановкой задачи установления изоморфизма графов с использованием попарного сравнения характеристик их вершин будет:

найти подстановку P , в которой

$$y_t \leftrightarrow x_i : \{ \rho_i^+ = \rho_j^+ \ \& \ \rho_i^- = \rho_j^- \ \& \ s1_i^+ = s1_j^+ \ \& \ s1_i^- = s1_j^- \ \& \ sw_i = sw_j \}$$

при выполнении условия $(\forall u_j \in U) (\exists v_r \in V) ((\forall x_i \in \Gamma_1 u_j) (\exists y_t = p(x_i) \in \Gamma_3 v_r) \ \& \ (\forall x_l \in \Gamma_2 u_j) (\exists y_k = p(x_l) \in \Gamma_4 v_r))$.

Алгоритмы решения задачи в этой постановке используют метод в глубину с возвращением.

3.7 Модели задач выделения подмножеств особых компонентов

3.7.1 Постановка задачи нахождения в системе максимального множества компонентов, попарно не связанных друг с другом. Пример прикладной задачи – определение максимально-возможного количества параллельных процессов. Имеется множество процессов, потребляющих неразделяемые ресурсы. В графе G^{\sim} вершины сопоставлены процессам. Рёбра соединяют вершины, если соответствующим процессам требуется один и тот же ресурс. Напомним, что множество вершин графа является независимым, если никакие две его вершины не смежны. Тогда *наибольшее независимое множество вершин* графа G^{\sim} будет определять максимально возможное количество параллельных процессов.

Постановка задачи нахождения в системе максимального множества компонентов, попарно не связанных друг с другом

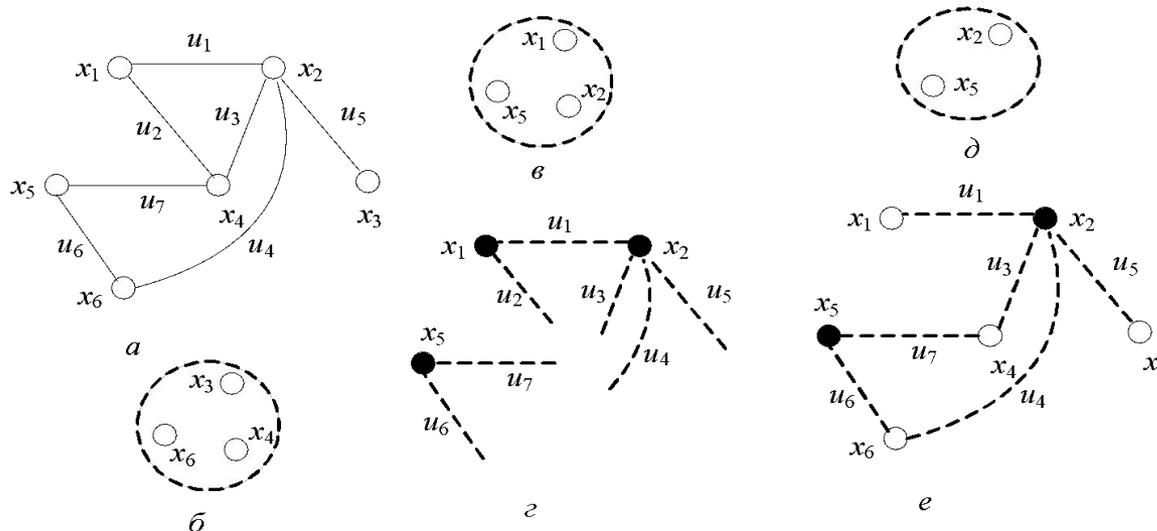
Формальная постановка этой задачи имеет вид:

$$\text{найти } X_i^* \in 2^X : \alpha_0(G) = |X_i^*| \rightarrow \max \quad (3.25)$$

$$\text{при выполнении условия } (\forall x_k \in X_i^*) F_1 x_k \cap X_i^* = \emptyset, \quad (3.26)$$

здесь 2^X – булеан, т. е. множество всех подмножеств множества X .

На рисунках а и б показаны неориентированный граф – модель
объекта проектирования и наибольшее независимое множество
его вершин соответственно.



3.7.2 Постановка задачи определение минимального подмножества объектов системы, с которыми связаны все остальные

Имеется множество определённым образом попарно связанных объектов. Определить минимально необходимое количество обслуживающих аппаратов и объекты их установки так, чтобы любой из объектов, на которых не установлен аппарат, был связан хотя бы с одним аппаратом. Моделью системы связанных объектов является неориентированный граф $G=(X, U)$, в котором

$X \leftrightarrow$ множество объектов, $U \leftrightarrow$ множество связей.

Пусть X_i подмножество вершин графа, соответствующее объектам с обслуживающими аппаратами.

Постановка задачи определение минимального подмножества объектов системы, с которыми связаны все остальные

Очевидно, что в общем случае X_i – это любое подмножество множества X , т. е. $X_i \in 2^X$. Задача размещения обслуживающих аппаратов сводится к отысканию в графе G наименьшего доминирующего множества. Формальная постановка этой комбинаторно-оптимизационной задачи будет:

найти

$$X_i^* \in 2^X : |X_i^*| \rightarrow \min \{ |X_i| \} \quad (3.27)$$

при выполнении условия доминирования множества X_i

$$\bigcup_{j \in F_1} x_j = X \text{ или } (F_1) X_i \neq X. X_i \quad (3.28)$$

$$x_j \in X_i$$

Постановка задачи определение минимального подмножества объектов системы, с которыми связаны все остальные

Наименьшее доминирующее множество неориентированного графа (смотри рис. а слайда 52) показано на рис. д того же слайда. Нетрудно видеть, что оно вместе с инцидентными ему рёбрами и остальными вершинами образует подграф, изображённый на рис. е, отображающий связи обслуживающих аппаратов с объектами системы.

3.7.3 Постановка задачи о назначении

Достаточно простой содержательной постановкой этой задачи является следующая: имеется n исполнителей, каждый из которых может выполнять одну или несколько из m работ. На каждую работу необходимо назначить только одного исполнителя. Требуется найти такое распределение, при котором количество работ, обеспечиваемых исполнителями, было бы максимальным.

Исполнителям поставим во взаимно однозначное соответствие множество вершин X , а работам – множество Y . Множество ребер U_b интерпретирует способность выполнения исполнителями определенных работ. Задав двуместные предикаты инцидентности $\Gamma_1(X, U_b)$ и $\Gamma_2(U_b, Y)$, получим двудольный ориентированный граф, в котором необходимо найти максимальное паросочетание.

Постановка задачи о назначении

Формальная постановка этой задачи будет:

выполнить преобразование D

$$G_b^{\rightarrow}(\{X, Y\}, \Gamma_b, {}_1X \quad {}_2Y) \rightarrow G_b^{1\rightarrow}(\{X, Y\}, \Gamma_b^1, {}_1X \quad {}_2Y)$$

такое, что $|U_b^1| \rightarrow \max$,

где $U_b^1 \subset U_b$, при выполнении условия:

$$(\forall u_j, u_k \in U_b^1) \{\Gamma_2 u_j \cup \Gamma_1 u_j\} \cap \{\Gamma_2 u_k \cup \Gamma_1 u_k\} = \emptyset,$$

т. е. ни одному из рёбер подмножества U_b^1 не смежно никакое его ребро и само это ребро не смежно ни одному из рёбер подмножества.

Модель задачи о максимальном потоке в сети

Модель сети в виде ориентированного графа $G \rightarrow (X, \langle U, f, c \rangle)$ рассмотрена выше. В этом графе:

$X \leftrightarrow O$, где $O = \{s, o_1, o_2, \dots, o_{n-2}, t\}$ – объекты системы, и $X = \{x_s, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, xt\}$;

$K \leftrightarrow U$, где K – каналы передачи сообщений, $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$;

функция $f: U \rightarrow R$ – *поток* в сети, значение которой показывает количество сообщений по каналам в данном состоянии системы;

c – функция, задающая пропускную способность каналов.

Таким образом $f(u_j)$ – поток, передаваемый по ребру u_j , а $c(u_j)$ – пропускная способность этого ребра. Ориентированный граф сети был показан на слайде 141 раздела 2.

Модель задачи о максимальном потоке в сети

Формальная постановка этой задачи имеет вид: *найти*

$$F = \sum_{u_j \in \Gamma_1 x_s} f(u_j) \rightarrow \max$$

где F – суммарный поток в сети; $\Gamma_1 x_s$ – множество ребер, инцидентных вершине x_s , т.е. каналов по которым передаются сообщения из источника системы,

при условиях: $\forall u_j \in U : f(u_j) \leq (\quad)$ – выполнения ограничений по пропускной способности; $\forall x_i \in X \setminus \{x_s, x_t\} \sum_{u_j \in \Gamma_1 x_i} f(u_j) = \sum_{u_l \in \Gamma_2 x_i} f(u_l)$ – сохранения потока в вершинах сети, где $\Gamma_1 x_i$ и $\Gamma_2 x_i$ – множество ребер, инцидентных вершине x_i и которым она инцидентна, т.е. каналов по которым передаются сообщения из i -го объекта системы и в этот объект;

$$\sum_{u_j \in \Gamma_1 x_s} f(u_j) = \sum_{u_l \in \Gamma_2 x_t} f(u_l) \quad \text{– сохранения потока в сети.}$$

Оценка возможности решения задачи

На этом этапе выясняется возможность *точного* решения задачи вообще или при данной степени детализации объекта. Основным фактором, определяющим эту возможность, является *время вычислений* или *временная сложность* в функции от размерности задачи.

В первую очередь необходимо выяснить, к какой группе относится поставленная задача:

- к классу задач, временная сложность которых оценивается *полиномом* от размерности задачи,
- к классу с *экспоненциальной* оценкой (*NP*-сложные).

Например, количество вариантов размещения n элементов в m позиций равно:

$$m!/(m-n)!, \text{ при } m > n,$$

$$m!, \text{ при } m = n.$$

Точное решение задач с экспоненциальной временной сложностью при высокой размерности входа невозможно даже на самых высокопроизводительных ЭВМ, так как требует неприемлемых затрат машинного времени.

Оценка возможности решения задачи (2)

Например, для решения задачи с длиной набора входных данных n при выполнении одного шага вычислений за 1 мкс:

Вычислительная сложность	n	
	50	100
2^n	35 лет	3000 лет
$100n^2$	0,25 с	1 с

Для NP -сложных задач, время решения которых по оценке превышает допустимое, можно:

- снизить n за счет *уменьшения степени детализации*, выполнив декомпозицию объекта и/или задач, либо посредством факторизации компонент объекта ;
- осуществлять поиск *приближенного решения* задачи.