Нелинейная условная оптим-я

Пример задачи нелинейной условной оптимизации

Предприятие может выпускать два вида корпусной мебели. На их изготовление идет древесина трех видов. Запасы древесины на предприятии, нормы их расхода a_{ij} (i=1,2,3; j=1,2), себестоимость c_j и оптовые цены указаны в таблице. Из-за брака в процессе производства расход древесины зависит от объема x_j производства изделий и в первом приближении выражается линейной функцией $a_{ij}+x_j$, а себестоимость продукции - функцией $c_j+0.1x_j$. Предприятие обязано с целью изучения спроса населения выпустить не менее двух комплектов мебели каждого вида. Составить план выпуска изделий, максимизирующий прибыль.

Порода	Запас сырья, $м^3$	Нормы расхода на изделие вида	
		1	**2**
сосна	100	10	20
береза	120	20	10
дуб	150	20	15
себестоимость c_j, тыс.руб.		5	10
цена, тыс.руб.		7	13

Rev. 1.00 / 08.01.2005

Нелинейная условная оптим-я

Постановка задачи

Показатель эффективности: прибыль предприятия

Управляемые переменные: x_1 и x_2 – количество комплектов корпусной мебели 1 и 2 вида

Целевая функция:

$$W=[7-(5+0.1x_1)]x_1 + [13-(10+0.1x_2)]x_2 \text{ или}$$

$$W=2x_1 - 0.1x_1^2 + 3x_2 - 0.1x_2^2$$

Ограничения:

по использованию сосны $(10+x_1)x_1+(20+x_2)x_2 \leq 100$

по использованию березы $(20+x_1)x_1+(10+x_2)x_2 \leq 120$

по использованию дуба $(20+x_1)x_1+(15+x_2)x_2 \leq 150$

обязательства по контракту $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$

Нелинейная условная оптим-я

Группы методов НУО:

- методы штрафных функций
- методы прямого поиска
- методы линеаризации

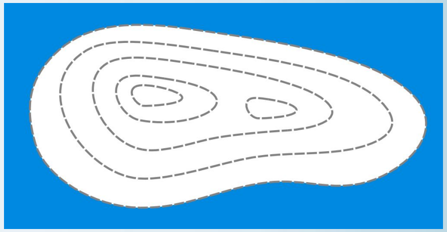
Методы штрафных функций

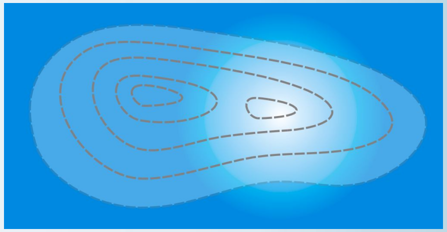
С помощью штрафных функций исходная задача условной оптимизации преобразуется в последовательность задач безусловной оптимизации.

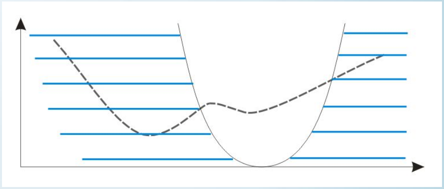
$$P(x,R) = W(x) + \Omega(R,g(x),h(x)),$$

где R - набор штрафных параметров; **Ω** - штрафная функция, в которую включаются ограничения-равенства и ограничения-неравенства.

Штраф **Ω** определяется так, чтобы допустимые точки задачи имели преимущество перед недопустимыми в отношении безусловной оптимизации штрафной функции. Здесь штраф как бы создает вдоль границы допустимой области барьер из бесконечно больших значений функции P.







К штрафу выдвигаются следующие требования:

- решение подзадач должны стремиться к решению исходной задачи нелинейного программирования;
- сложность оптимизации P(x,R) и **Ω** должна быть такого же порядка, что и W(x).

Методы штрафных функций

- Методы штрафных функций
  - h(x) равенства
    - квадратичный штраф
  - g(x) неравенства
    - метод квадрата срезки
    - бесконечный штраф
    - логарифмический штраф
    - штраф обратной функцией

Методы штрафных функций

Методы штрафных функций классифицируются в соответствии со способами учета ограничений-неравенств g(x), так как ограничения-равенства h(x) учитываются во всех методах одинаково с помощью квадратичного штрафа.

Квадратичный штраф

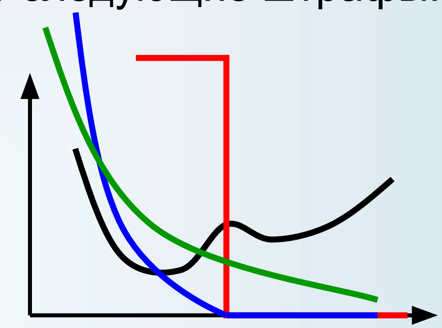
$\Omega = R^*(h(x))^2$

$P(x,R) = W(x) + R^*(h(x))^2$

При рассмотрении любой штрафной функции требуется выбрать начальное значение R и изменять его после решения каждой подзадачи безусловной оптимизации с тем, чтобы обеспечить сходимость. Для квадратичного штрафа, учитывающего ограничения-равенства, представляется целесообразным начинать с R=0, а затем последовательно увеличивать R на некоторое ΔR или использовать возрастающие степени какого-либо числа, например 10. В результате получаемые точки будут все точнее и точнее удовлетворять ограничениям.

Методы штрафных функций

Для учета ограничений-неравенств используют следующие штрафы:
P(x,R) = W(x) + Ω



"Бесконечный" штраф
(для поиска минимума)

$$\Omega = 10^{20}k, \qquad k = \begin{cases} 1, & g(x) <= 0 \\ 0, & g(x) > 0 \end{cases}$$

Логарифмический штраф
Ω = -R*ln(g(x))

Отрицательный штраф исключают положив **Ω**=0 для таких x, что g(x)>1. Логарифмический штраф - барьерная функция, имеющая большие по модулю значения функции в недопустимых точках.

Итерационный процесс следует начинать из допустимой начальной точки при положительном начальном значении R (R=10 или R=100). После решения каждой подзадачи условной оптимизации параметр R следует уменьшать и в пределе устремить к нулю.

Штраф обратной функцией
Ω =-R*[1/g(x)]

Итерации следует начинать с начальной допустимой точки при положительном R, значения которого в пределе должно стремиться к нулю.

Методы штрафных функций

Штраф квадрата срезки

$$\Omega = R^* (g(x))^2, \qquad g(x)= \begin{cases} g(x), & g(x) \le 0 \\ 0, & g(x) > 0 \end{cases}$$

В данном методе недопустимые точки не создают проблем (в отличие от предыдущих), поэтому он весьма удобен. Кроме того функция P(x,R) определена и непрерывна всюду. Вычисления следует проводить с положительными R_i; после решения очередной подзадачи безусловной оптимизации R необходимо увеличивать.

Методы штрафных функций

Алгоритм МШФ

Шаг 1. Задать значения e_1, e_2, e_3, x_o, R_o,

где e_1, e_2, e_3 - соответственно, параметры окончания процедур одномерного и многомерного поиска безусловной оптимизации, а также работы алгоритма штрафных функций;

x^o - начальное приближение для x^*;

R^o - начальный выбор штрафных параметров.

Шаг 2. Построить $P(x,R) = W(x) + \mathbf{\Omega}(R,g(x),h(x))$.

Шаг 3. Найти x^{t+1} минимизирующее значение $P(x^{t+1},R^t)$ при фиксированном R^t. В качестве начальной точки использовать x^t, а в качестве параметра окончания шага - константу e_2 (возможно и e_1).

Шаг 4. Проверить, выполняется ли условие

$| P(x^{t+1},R^t)-P(x^t,R^{t-1}) | < e_3$.

если "да" - положить $x^{t+1}=x^T$ и закончить процесс решения;

если "нет" - перейти к следующему шагу.

Шаг 5. Положить $R^{t+1}=R^t+\Delta R^t$ в соответствии с используемым правилом пересчета, после чего вернуться к шагу 2.

Методы штрафных функций

Пример решения задачи с использованием МШФ

$$W(x)=(x_1-4)^2+(x_2-4)^2 \rightarrow \min$$
$$x_1+x_2 \le 5$$

при $e_1=0.2$, $e_2=0.4$, $e_3=0.1$, $A^o=(x_1^o,x_2^o)=(1,1)$, $R^o=10$, $c=10$ - коэффициент изменения штрафного параметра ($R^{t+1}=R^t/c$).

Понятно, что если бы не было ограничения, функция W(x) имела бы минимум в точке (4,4).

Решение.
Преобразуем неравенство к виду $g(x)\le 0$.

$$g(x)=x_1+x_2-5 \le 0,$$

при подстановке в данное ограничение координат начальной точки $x_o=(1,1)$, выясняем, что она является допустимой ($g(1,1)\le 0$).

Выбираем штрафную функцию в виде **обратной**.

$$P(x,R)=W(x) – R/g(x)$$

Методы штрафных функций

Этап 1

$$P(A^1,R_o)=(x_1-4)^2+(x_2-4)^2 + 10/(-x_1-x_2+5) \ \square \ \min,$$

решив задачу многопараметрического безусловного поиска, находим корни минимума данной функции $A^1=(1.75,1.75)$ и значение самой функции $P(A^1,R^o) \approx 16.79$. Проверка на окончание итераций (напр., $A^1-A^0<e_1$ или др.).
Уменьшаем R: $R^1=R^o/c=1$ и переходим ко второму этапу.

Этап 2

$$P(A^2,R_1)=(x_1-4)^2+(x_2-4)^2 + 1/(5-x_1-x_2) \ \square \ \min,$$

решив задачу многопараметрического безусловного поиска, находим корни минимума данной функции $A^2=(2.23,2.23)$ и значение самой функции $P(A^2,R^1) \approx 8.12$. Проверка на окончание итераций (напр., $A^2-A^1<e_1$ или др.).
Уменьшаем R: $R^2=R^1/c=0.1$ и переходим к следующему этапу.

Этап 3

$$P(A^3,R_2)=(x_1-4)^2+(x_2-4)^2 + 0.1/(5-x_1-x_2) \ \square \ \min,$$

решив задачу многопараметрического безусловного поиска, находим корни минимума данной функции $A^3=(2.41,2.41)$ и значение самой функции $P(A^3,R^2) \approx 5.61$. И так далее до тех пор, пока изменение целевой функции или приращения по всем координатам не станут меньше соответствующих параметров e_1, e_2, e_3.

Методы прямого поиска

Ограничения учитываются в явном виде, необязателен явный вид функции W(x).

Перед непосредственным применением методов прямого поиска необходимо:

- исключить ограничения в виде равенств (из равенств выражают одну из переменных и поставляют ее во все остальные уравнения/неравенства);
- определить начальную допустимую точку (например, случайным образом).

После проведения процедуры подготовки задачи к решению следует применить один из методов условной оптимизации. Рассмотрим два метода прямого поиска:

1. метод комплексов;
2. метод случайного поиска.

Методы прямого поиска

Метод комплексов

Заданы границы значений всех переменных x_{iL}, x_{iU}, i=1,2,..., N (размерность задачи), допустимая точка x^o, параметр отображения α (рекомендуется α=1.3) и параметры окончания вычислений ε и δ.

Шаг 1. Построение начального комплекса, состоящего из P допустимых точек (рекомендуется P=2N). Для каждой точки p=1,2,...,P-1 случайным образом определить координаты x^p;

если x^p - недопустимая точка (не удовлетворяет ограничениям-неравенствам), то найти центр тяжести $x_{цт}$ уже найденных точек и положить $x^p = x^p + \alpha(x_{цт} - x^p)$; повторять процедуру до тех пор, пока x_p не станет допустимой; если x^p - допустимая точка, повторять выбросы следующих точек до тех пор, пока p<>P; вычислить $W(x^p)$ для p=0,1,...,P-1.

Шаг 2. Отражение комплекса: выбрать точку x^R, для которой $W(x^R)=\max(W(x^p))=W_{max}$ (решается задача минимизации);

найти центр тяжести $x_{цт}$ и новую точку $x^m=x_{цт}+\alpha(x_{цт}-x^R)$;

если x^m - допустимая точка и $W(x^m)\geq W_{max}$, уменьшить в два раза расстояние между x^m и центром тяжести $x_{цт}$, продолжать поиск, пока $W(x^m)<W_{max}$;

если x^m - допустимая точка и $W(x^m)<W_{max}$, то перейти к шагу 4;

если x^m - недопустимая точка, то перейти к шагу 3.

Методы прямого поиска

Шаг 3. Корректировка для обеспечения допустимости:

если $x_i^m < x_{iL}$ (нижняя граница допускаемой области), то положить $x_i^m = x_{iL}$;

если $x_i^m > x_{iU}$ (верхняя граница допускаемой области), то положить $x_i^m = x_{iU}$;

если x^m - недопустимая точка, то уменьшить в два раза расстояние до центра тяжести; продолжать до тех пор, пока x^m не станет допустимой точкой.

Шаг 4. Проверка условий окончания вычислений:

положить $\overline{W} = \frac{1}{P}\sum_p W(x^p)$ и $\bar{x} = \frac{1}{P}\sum_p x^p$;

если $\sum_p (W(x^p) - \overline{W})^2 \le \varepsilon$ и $\sum_p (x^p - \bar{x})^2 \le \delta$,

то вычисления прекратить; в противном случае переити к шагу 2.

Методы прямого поиска

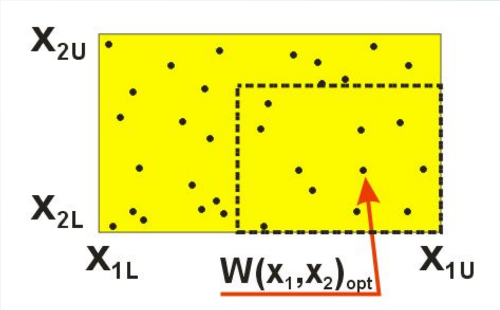
Метод случайного поиска

Задаются заранее большие границы значений всех переменных x_{iL}, x_{iU}, i=1,2,...,n (размерность задачи)

1) В каждой серии с помощью генератора случайных чисел образуется массив из N точек значений функции $F(x_i)$, $x_i \in [x_{iL}, x_{iU}]$ (N>100). Если точка принадлежит пространству недопустимых точек, то необходимо еще раз повторить вбрасывание.
2) Среди элементов этого массива значений функции находится оптимальное значение ($W_{min}|W_{max}$), а также соответствующее ему значение переменной ($x_{min}|x_{max}$).
3) По каждой координате рассчитывается новый промежуток, в пределах которого будет производиться последующий выбор из N значений.

Например, для уменьшения промежутка процентов на 10%,

```
L=0.9*(b-a);
a_new=x_optimal - L/2; if a_new<a then a_new=a;
b_new=x_optimal + L/2; if b_new>b then b_new=b;
```



Методы линеаризации

Идея методов заключается в сведении задачи нелинейного программирования к задаче линейного программирования. С этой целью нелинейные функции целевой функции W(x) и ограничений g(x), h(x) в ряд Тейлора до членов первого порядка в окрестности точки линеаризации x^t, что позволяет W(x), g(x), h(x) аппроксимировать линейными функциями и свести общую задачу нелинейного программирования к следующей задаче линейного программирования.

$$\begin{cases} W(x) \;□\; \min\ (\max) \\ g_j(x) \le 0,\ j=1..J \\ h_k(x)=0,\ k=1..K \\ x_{iL}<x<x_{iU},\ i=1..N \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} W(x^t) + \nabla W(x^t)(x-x^t) \;□\; \min\ (\max) \\ g_j(x^t) + \nabla g_j(x^t)(x-x^t) \le 0 \\ h_k(x^t) + \nabla h_k(x^t)(x-x^t)=0 \\ x_{iL}<x<x_{iU},\ i=1..N \end{cases}$$

Решая ее при помощи методов линейного программирования, находим новое приближение x^{t+1}. В случае нелинейных функций точка x^{t+1} обычно недопустимая точка. Однако для сходимости к оптимуму достаточно, чтобы последовательность точек $\{x^t\}$, полученных в результате решения последовательности подзадач линейного программирования, выполнялось следующее условие: значение целевой функции W и невязки по ограничениям в x^{t+1} меньше их значений в точке x^t.