

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Пустовалова Марина Александровна

доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов

E-mail: m.pustovalova@narfu.ru

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ДОПУЩЕНИЯ И ПРИНЦИПЫ.

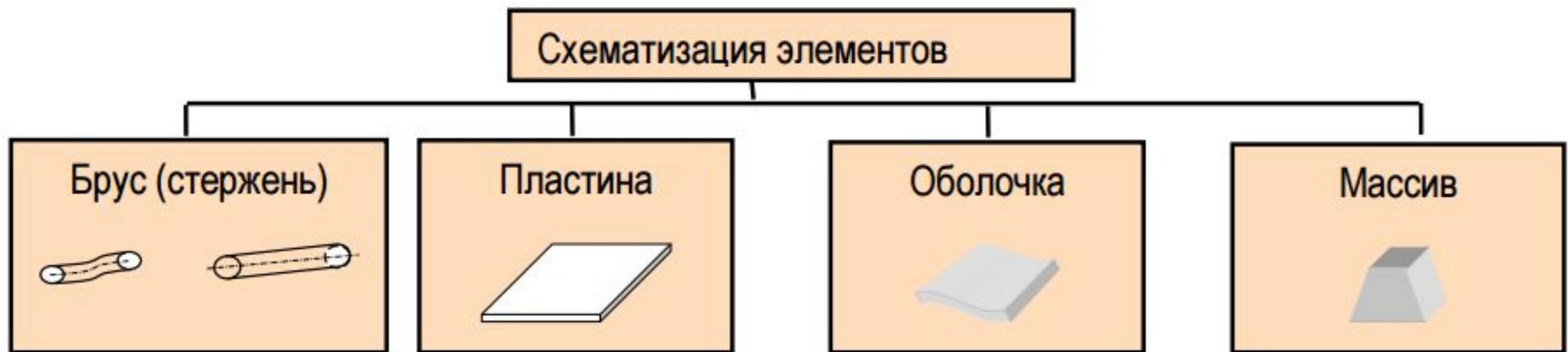


Прочность – способность воспринимать различные воздействия (нагрузки, перепады температур, осадки опор, неточность изготовления) не разрушаясь.

Жесткость – способность воспринимать воздействия без существенного изменения геометрических размеров.

Устойчивость – способность сохранять под нагрузкой первоначальную форму равновесия.

Соппротивление материалов позволяет определить допустимые нагрузки для конструкции; подобрать необходимые размеры элементов и выбрать подходящие материалы, обеспечивающие их надежность и экономичность и т.д.



Схематизация свойств материала

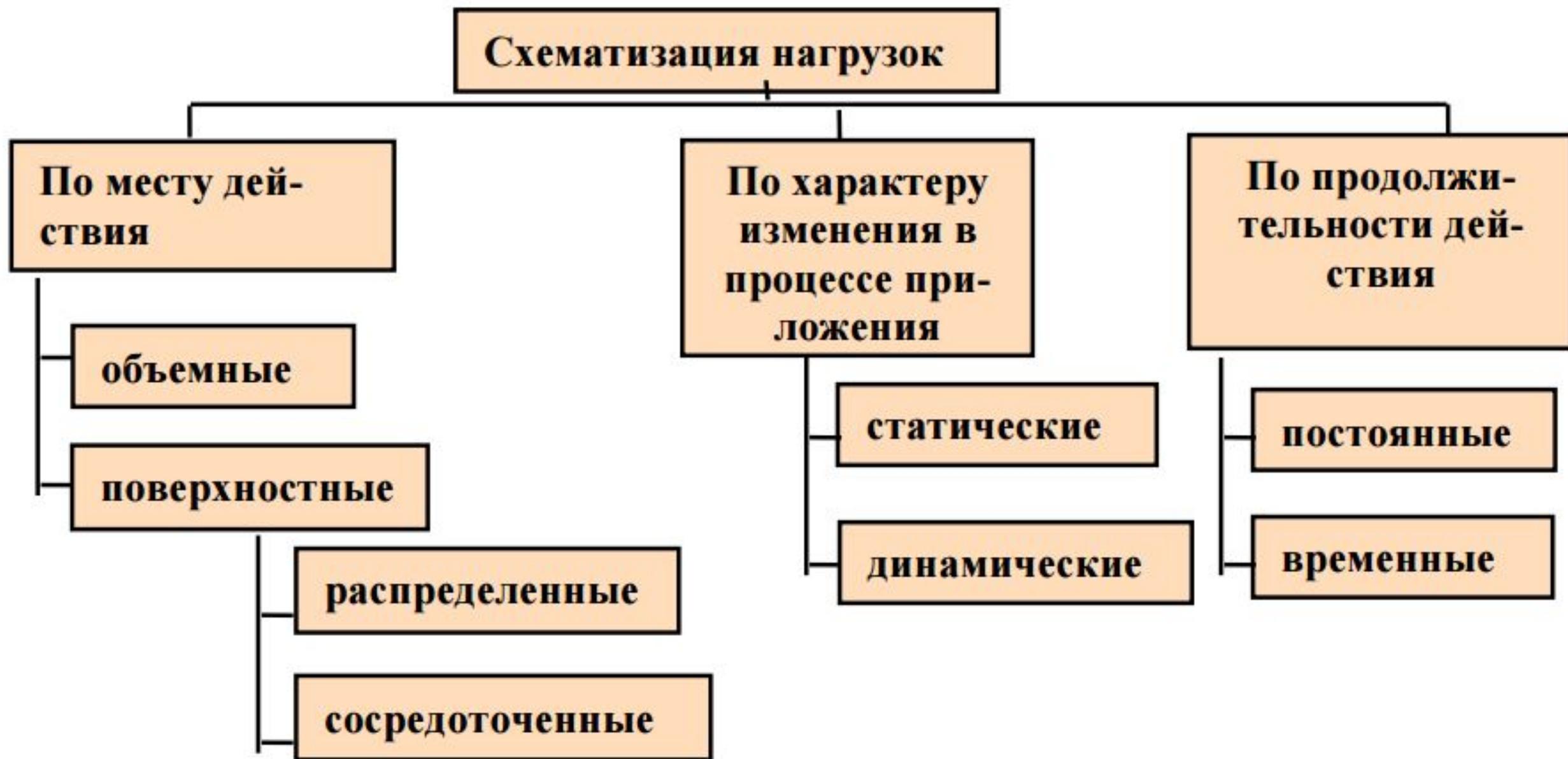
```
graph TD; A[Схематизация свойств материала] --> B[Гипотеза сплошности]; A --> C[Гипотеза однородности]; A --> D[Гипотеза изотропности]; A --> E[Гипотеза о линейно-упругом материале];
```

Гипотеза
сплошности

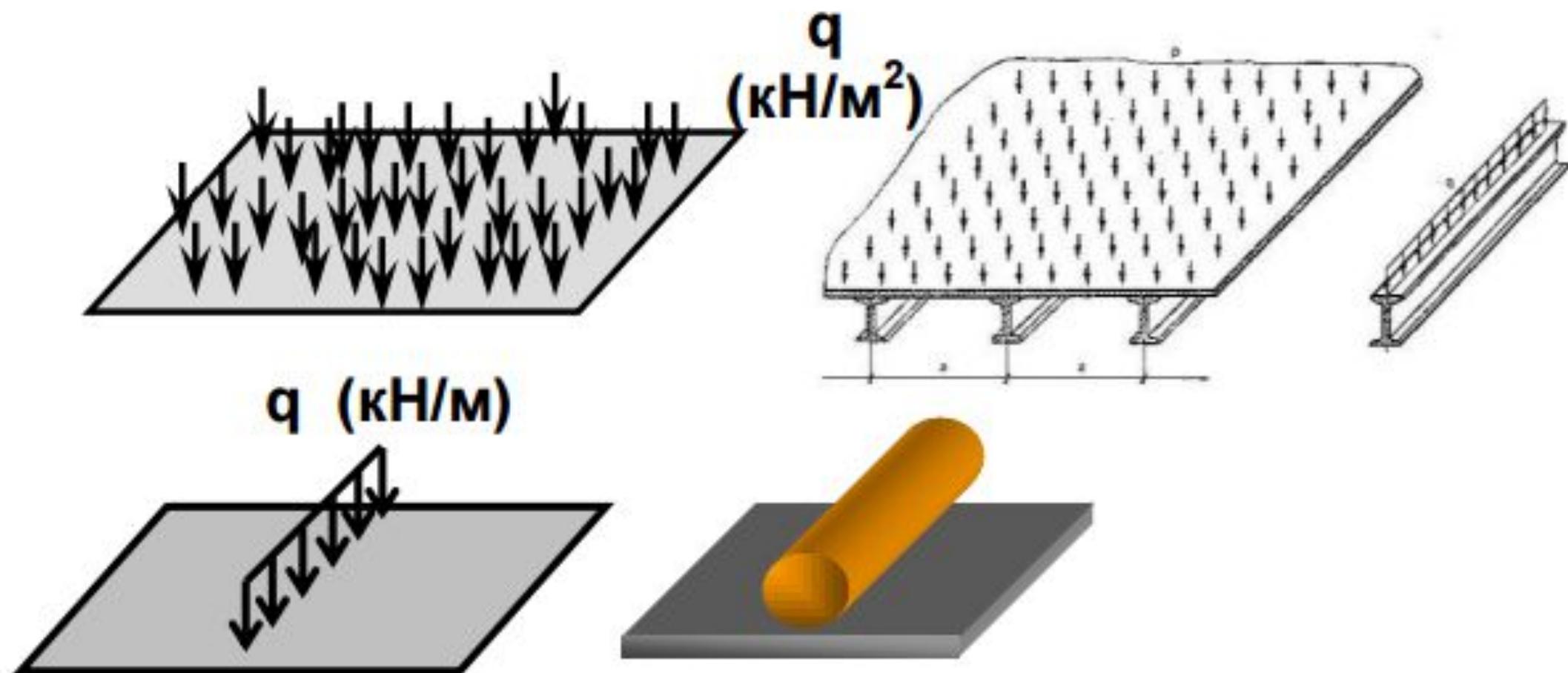
Гипотеза
однородности

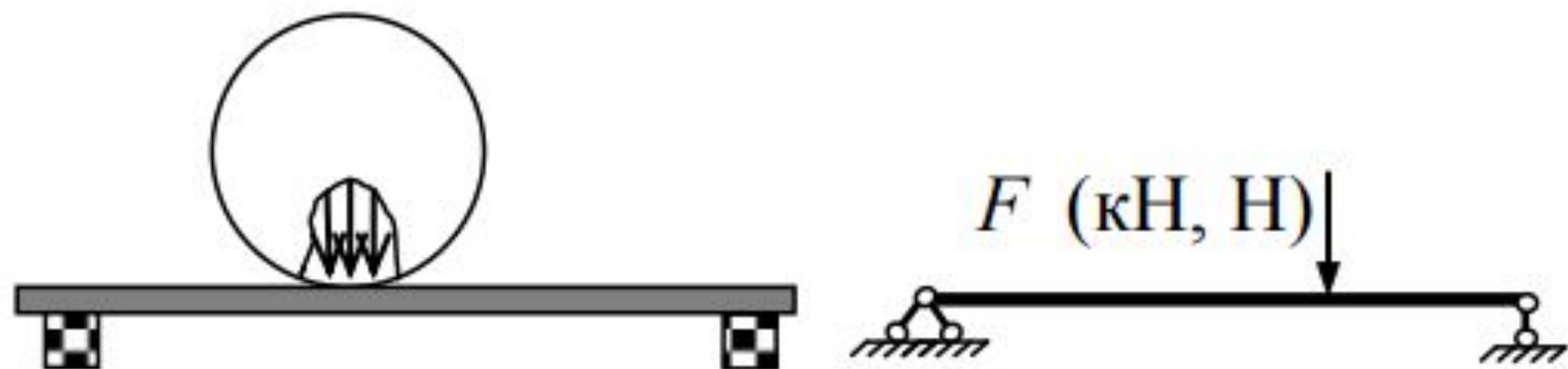
Гипотеза
изотропности

Гипотеза
о линейно-упругом
материале



Распределенные нагрузки

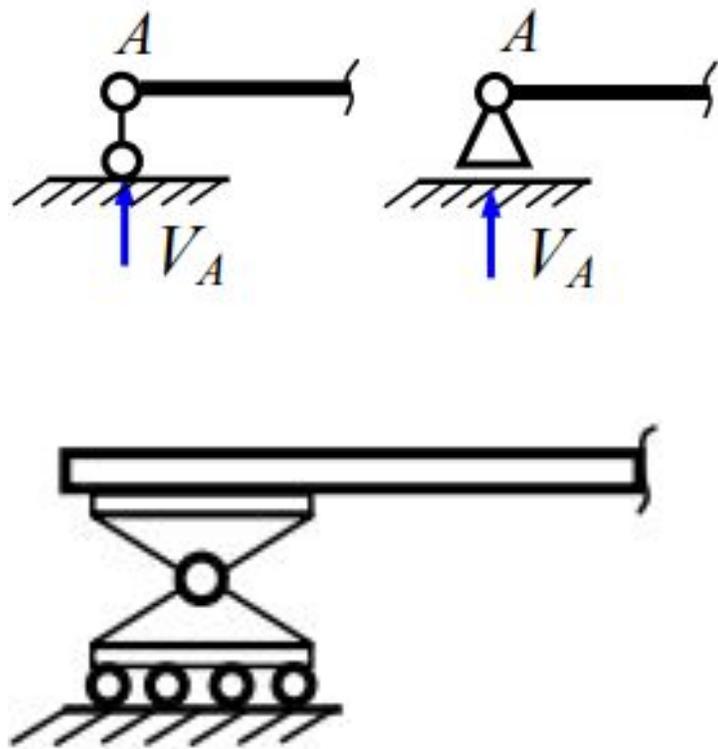




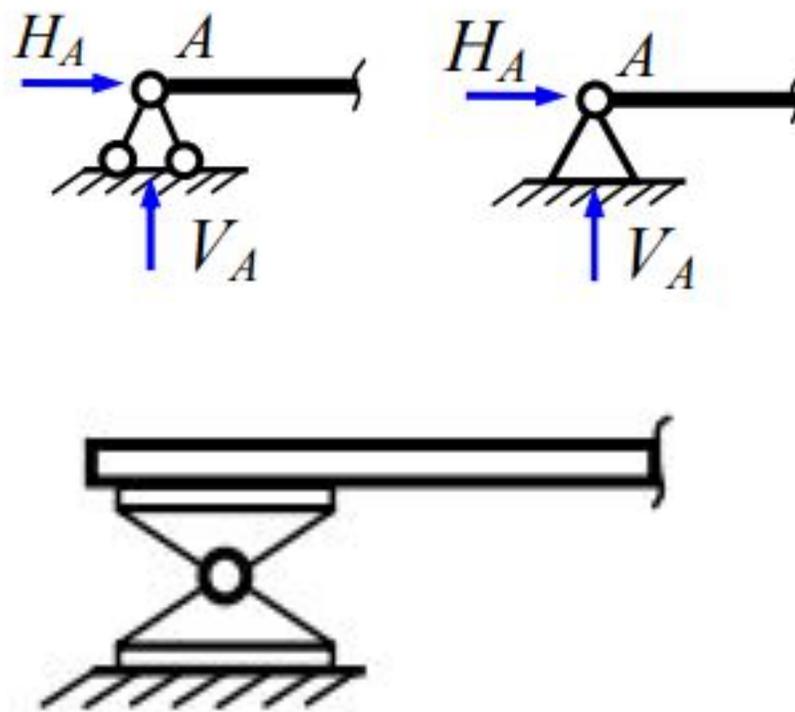
Вертикальная нагрузка от колеса передается на рельсы через малую площадку и условно можно считать, что она приложена в точке. Но при исследовании местных деформаций в материале необходимо учитывать передачу усилия через определенную площадь контакта.

Схематизация опорных устройств

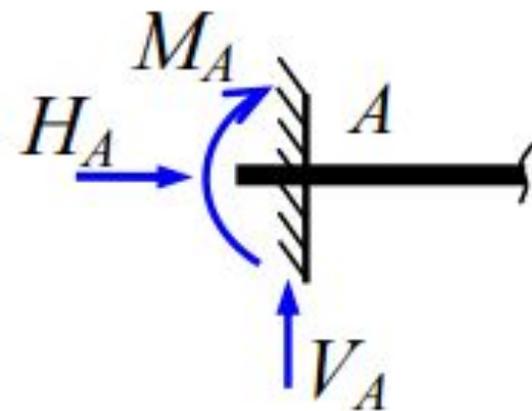
Шарнирно-
подвижная



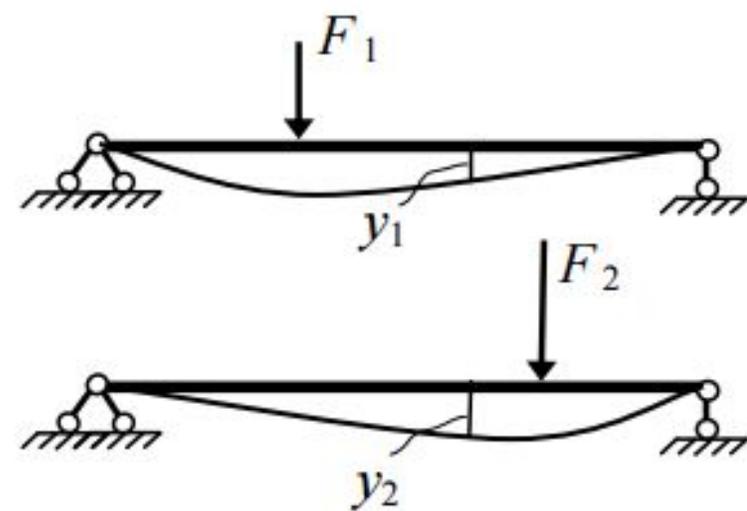
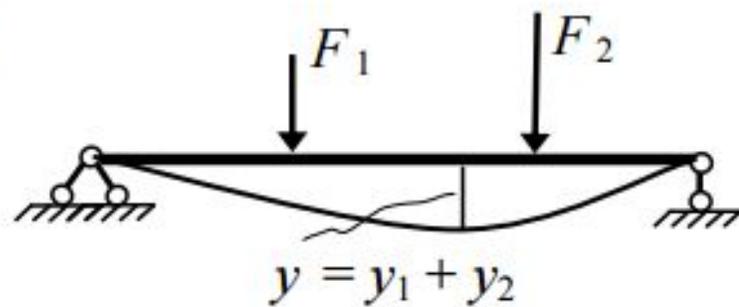
Шарнирно-
неподвижная



Жесткое защем-
ление



Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиций): результат воздействия на тело системы сил равен сумме результатов воздействия тех же сил, независимо от порядка их приложения.

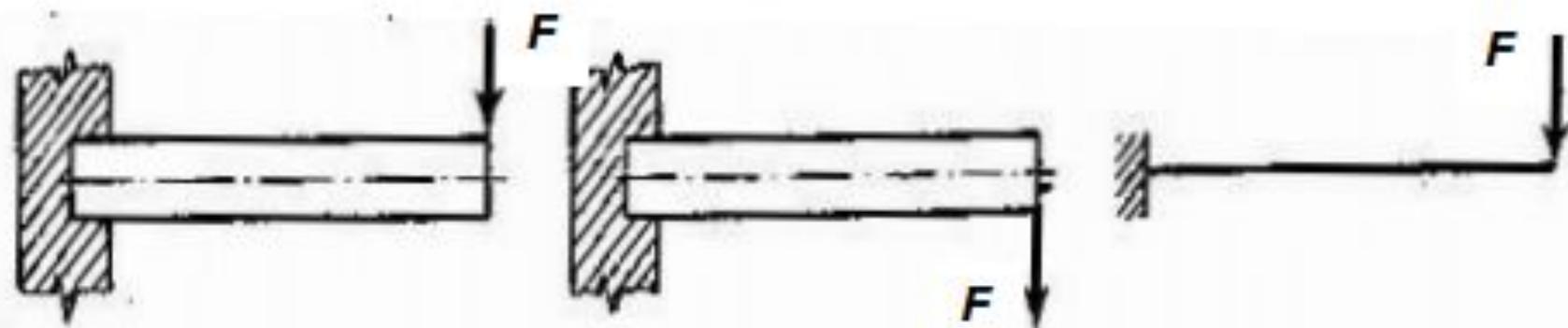


Он применим лишь при следующих условиях:

- перемещение точки приложения силы малы по сравнению с размерами тела;
- перемещения линейно зависят от действующих сил.

Принцип Сен-Венана

Напряженное состояние тела на достаточном удалении от области действия локальных нагрузок очень мало зависит от конкретного способа приложения этих нагрузок

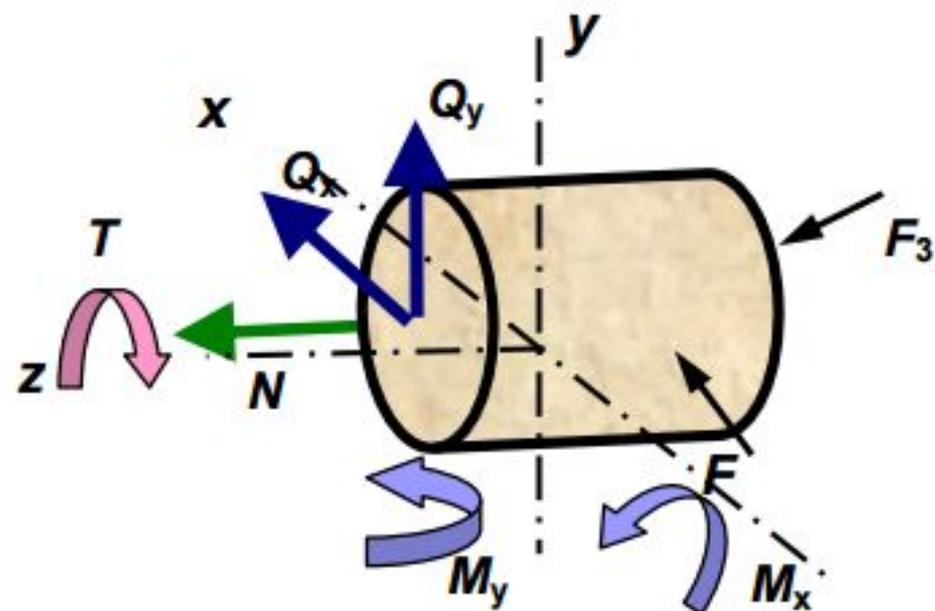
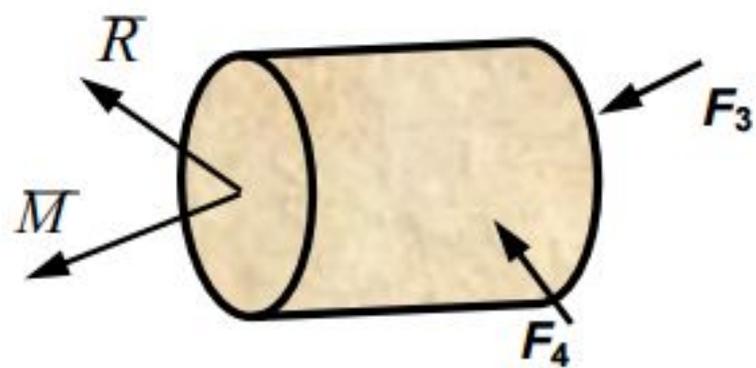
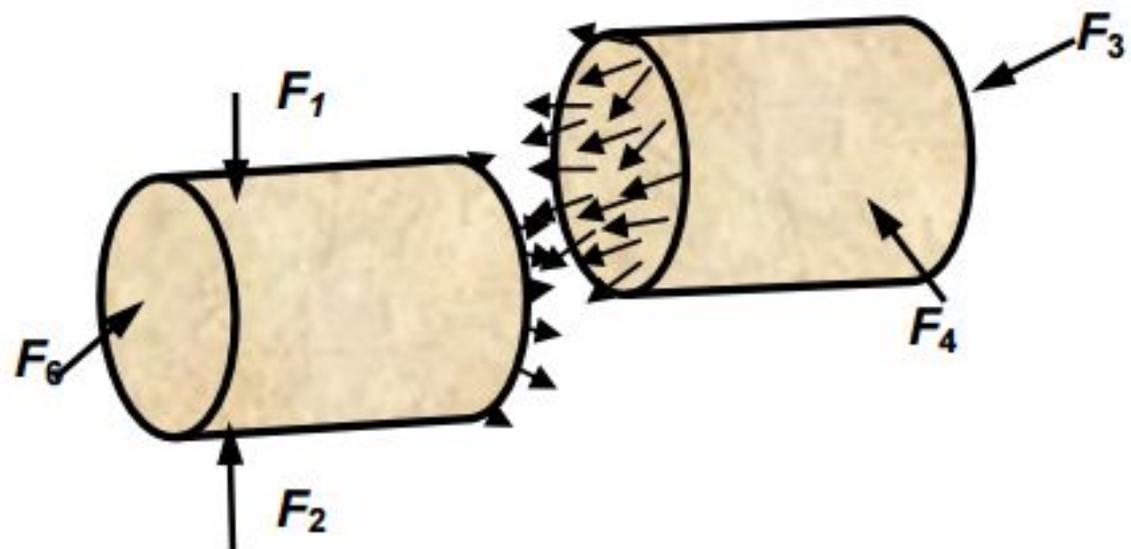
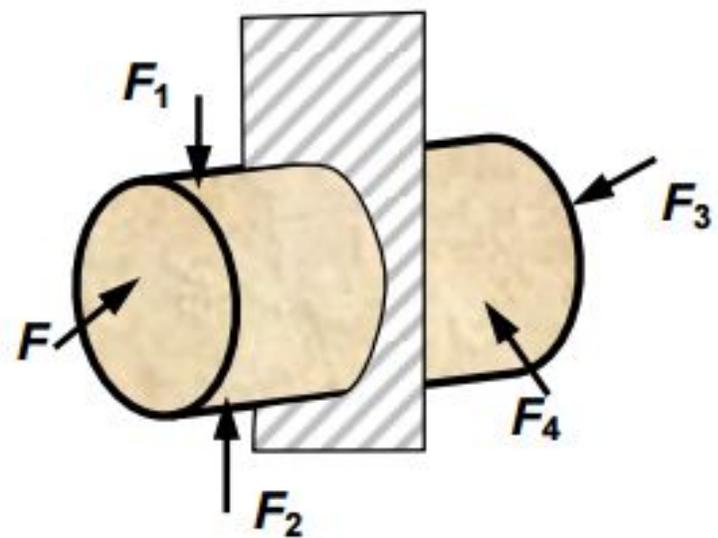


ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

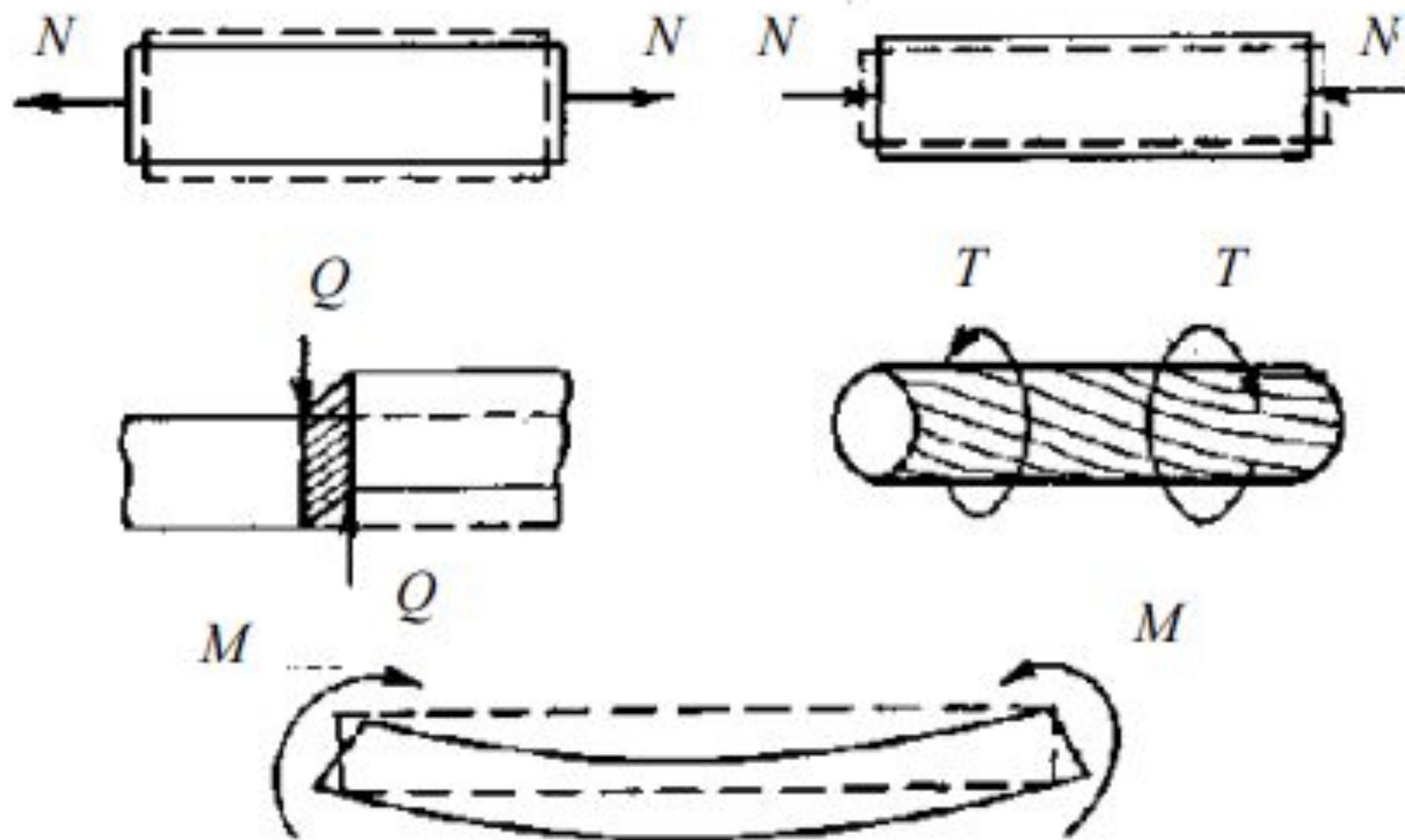
Внутренние усилия – силы взаимодействия между частицами тела, возникающие при деформации элемента конструкции, и стремящиеся сохранить тело как единое целое.

Для их определения применяют метод сечений:

1. для тела, находящегося в равновесии, в интересующем нас месте делается разрез;
2. одна из частей отбрасывается (обычно та, к которой приложено больше сил);
3. действие отброшенной части на оставшуюся заменяется внутренними усилиями, которые уравновешивают внешние силы;
4. составляются уравнения равновесия для отсеченной части тела, из которых определяются внутренние усилия.



N – продольная сила



$Q_x ; Q_y$ - поперечные силы

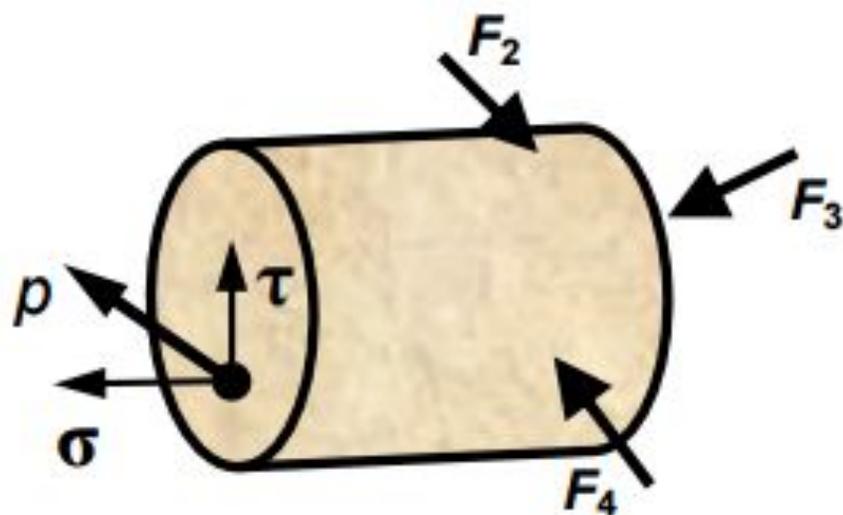
НАПРЯЖЕНИЯ

Отношение главного вектора сил, действующих на элементарную площадку к величине площадки dA при стягивании последней в точку, называется полным напряжением p :

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A}$$

Напряжение - интенсивность внутренних сил в сечении.

Размерность напряжения: Н/м^2 - Па (МПа, кПа).



МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Расчет по допускаемым напряжениям

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_u}{n} \qquad \sigma_{adm} = \frac{\sigma_y}{n}$$

Метод предельных состояний

Согласно строительным нормам и правилам (СНиП) предельные состояния подразделяются на две группы:

первая - по потере несущей способности (вследствие разрушения) или непригодности к эксплуатации вследствие текучести материала, сдвигов в соединениях и других факторов;

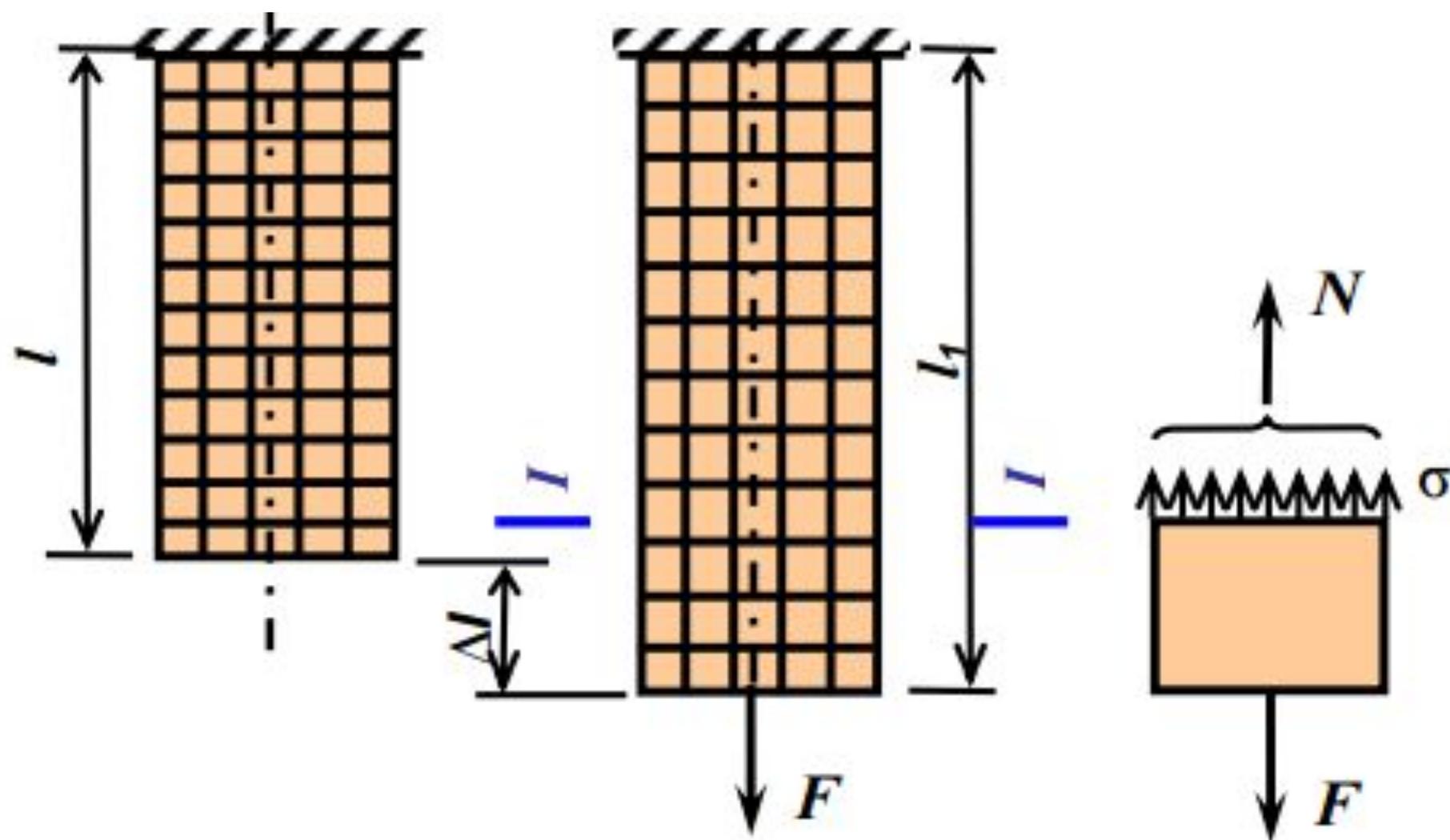
вторая - по непригодности к нормальной эксплуатации (вследствие недопустимых перемещений, колебаний и трещин).

Расчет по разрушающим нагрузкам

$$F_{\max} \leq F_{adm} = \frac{F_{пред}}{n}$$

ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

Внутренние усилия и напряжения. Условие прочности



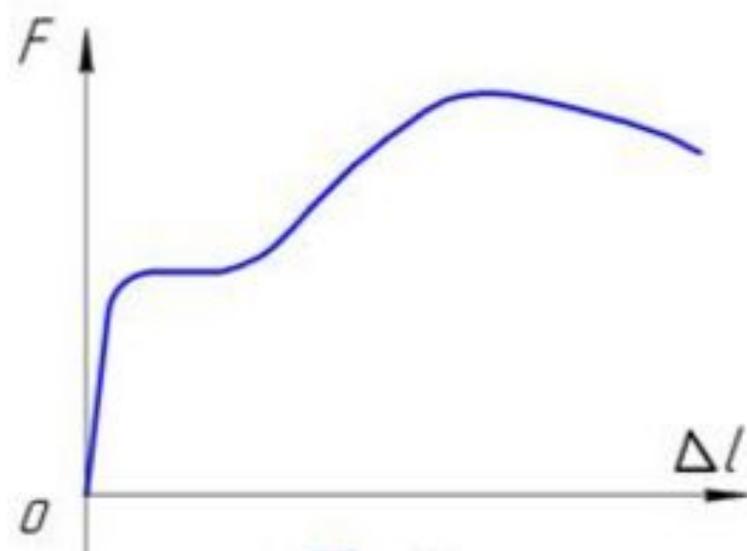
$$\sigma = \text{const} \quad N = \sigma \int_A dA = \sigma A$$

Условие прочности при осевом растяжении (сжатии)

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \sigma_{adm}$$

Закон Гука

$$\sigma = \varepsilon E$$



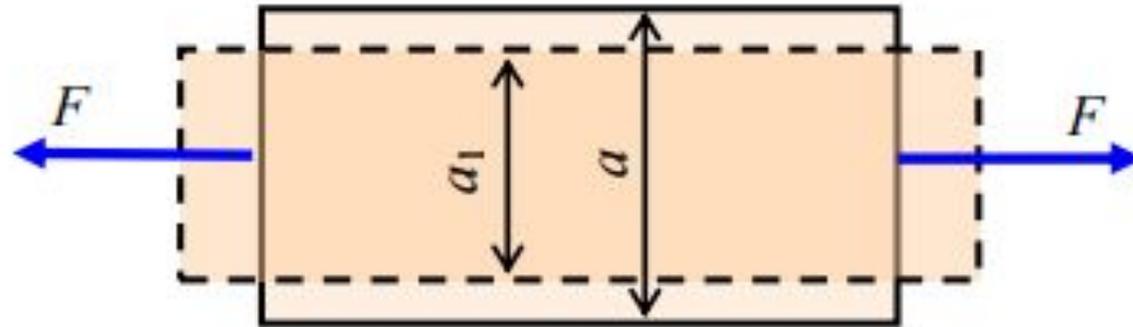
E – модуль упругости (модуль Юнга, коэффициент пропорциональности), Па, МПа

$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ - относительная деформация

Подставим в формулу закона Гука $\sigma = \frac{N}{A}$ и $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

Поперечная деформация. Коэффициент Пуассона.



Абсолютная поперечная деформация

$$\Delta a = a_1 - a$$

Относительная поперечная деформация:

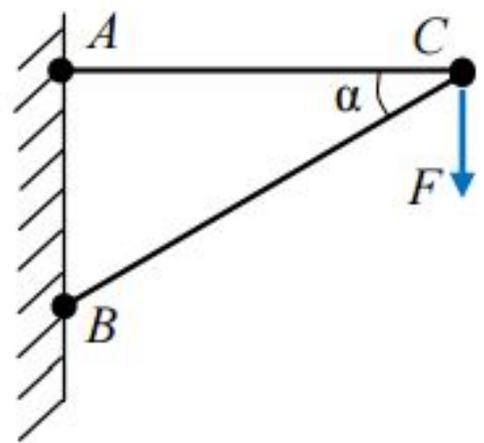
$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}$$

$$\nu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$$

- коэффициент Пуассона

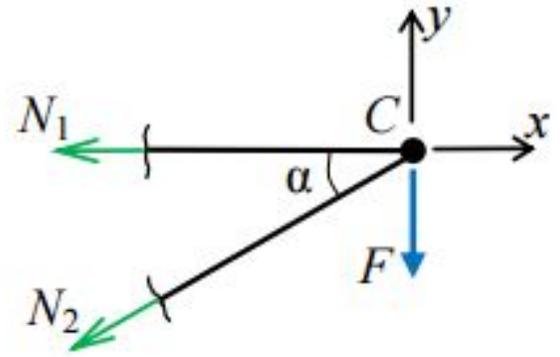
Статически неопределимые системы при осевом растяжении (сжатии)

Статически определимая система



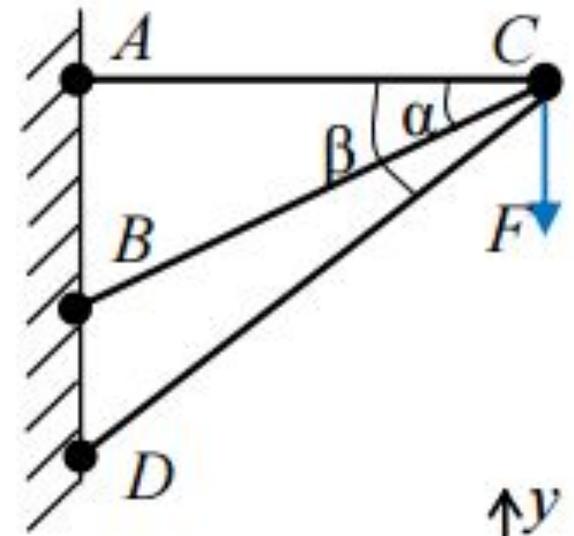
$$\sum y = 0$$

$$-N_2 \sin \alpha - F = 0$$



$$\sum x = 0$$

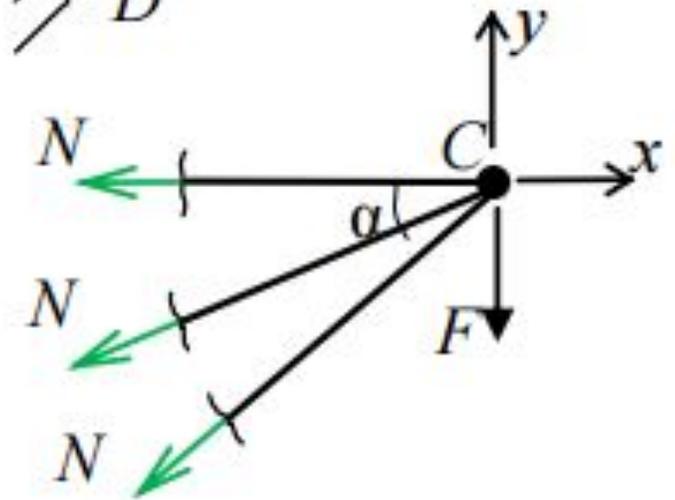
$$-N_1 - N_2 \cos \alpha = 0$$



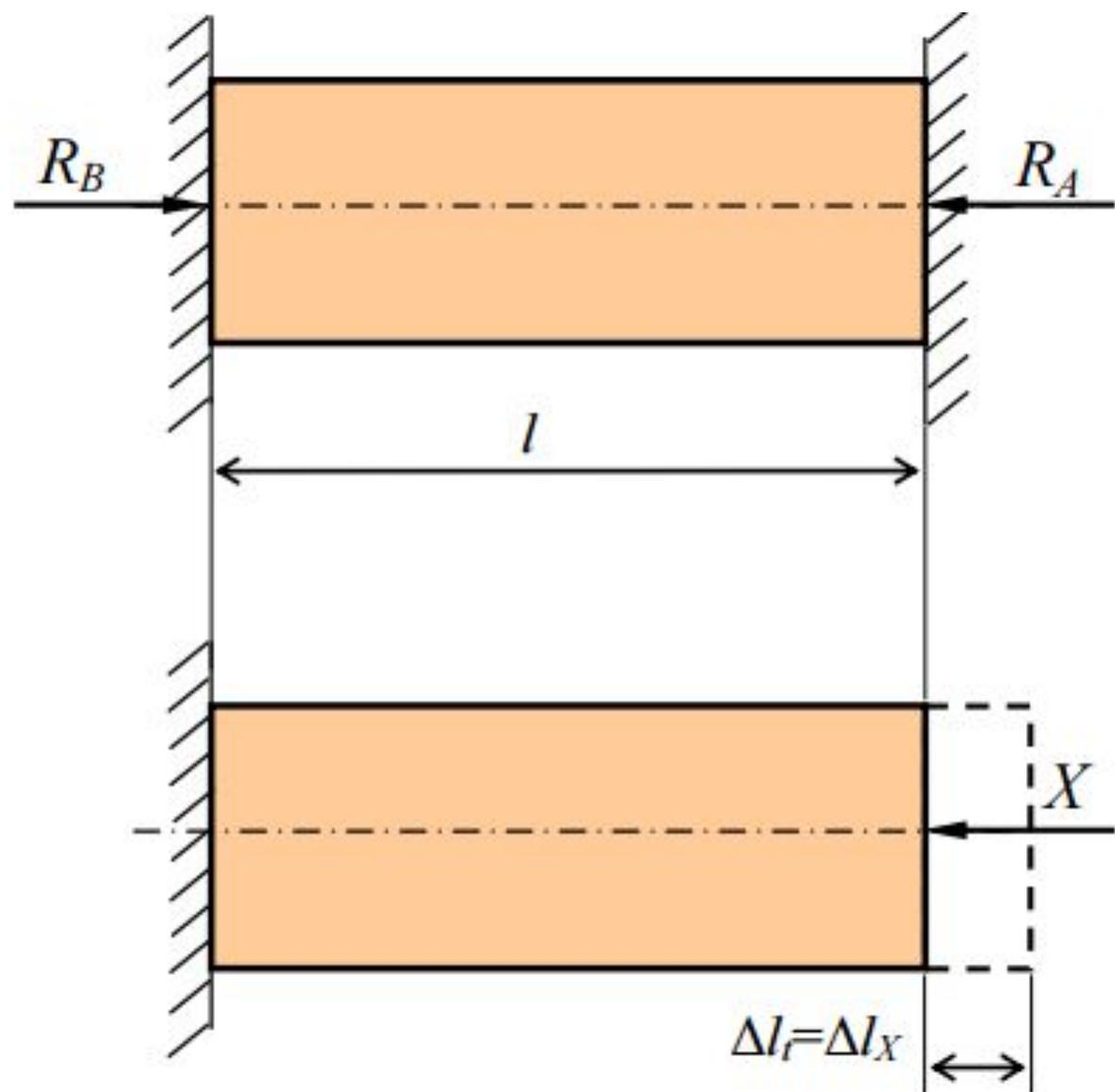
$$\sum x = 0$$

$$\sum y = 0$$

$$N_1; N_2; N_3 - ?$$



Температурные напряжения



$$\sum x = 0 \quad R_A - R_B = 0$$

$$R_A = R_B$$

$$\Delta l = \Delta l_t - \Delta l_x = 0$$

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t \quad \Delta l_x = \frac{Xl}{EA}$$

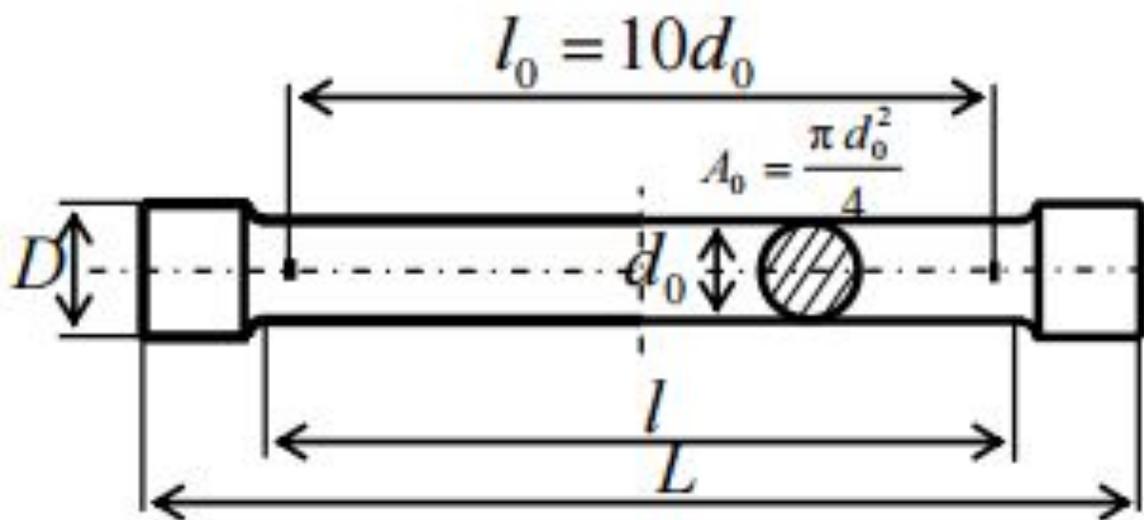
$$\alpha \Delta t = \frac{Xl}{EA}$$

$$X = \alpha \Delta t EA = R_A = R_B$$

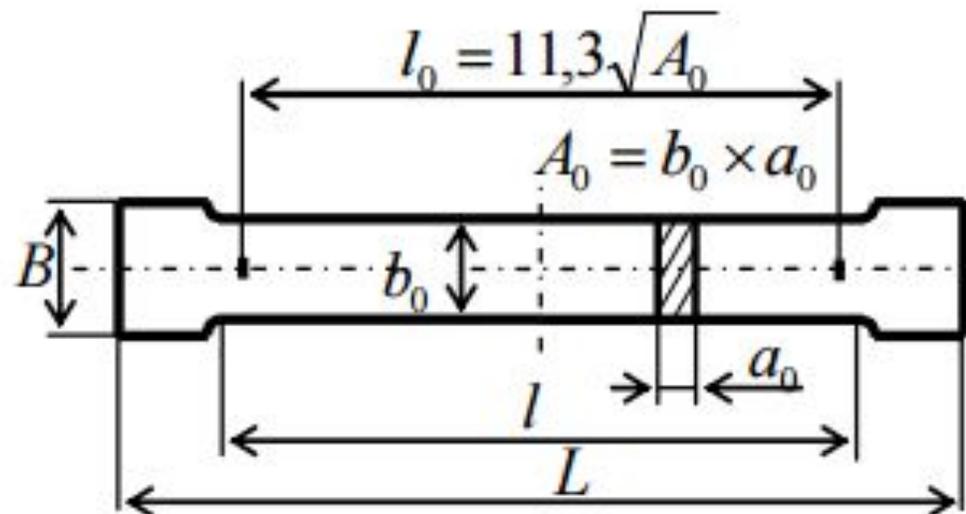
Механические свойства материалов

Диаграмма растяжения пластичного материала

ГОСТ 1497 – 84 (ИСО 6892 – 84) «Металлы.
Методы испытания на растяжение».



d_0 (10,15,20 мм) l_0 – рабочая
длина образца.



$$\sigma_t = \frac{F}{A_0};$$

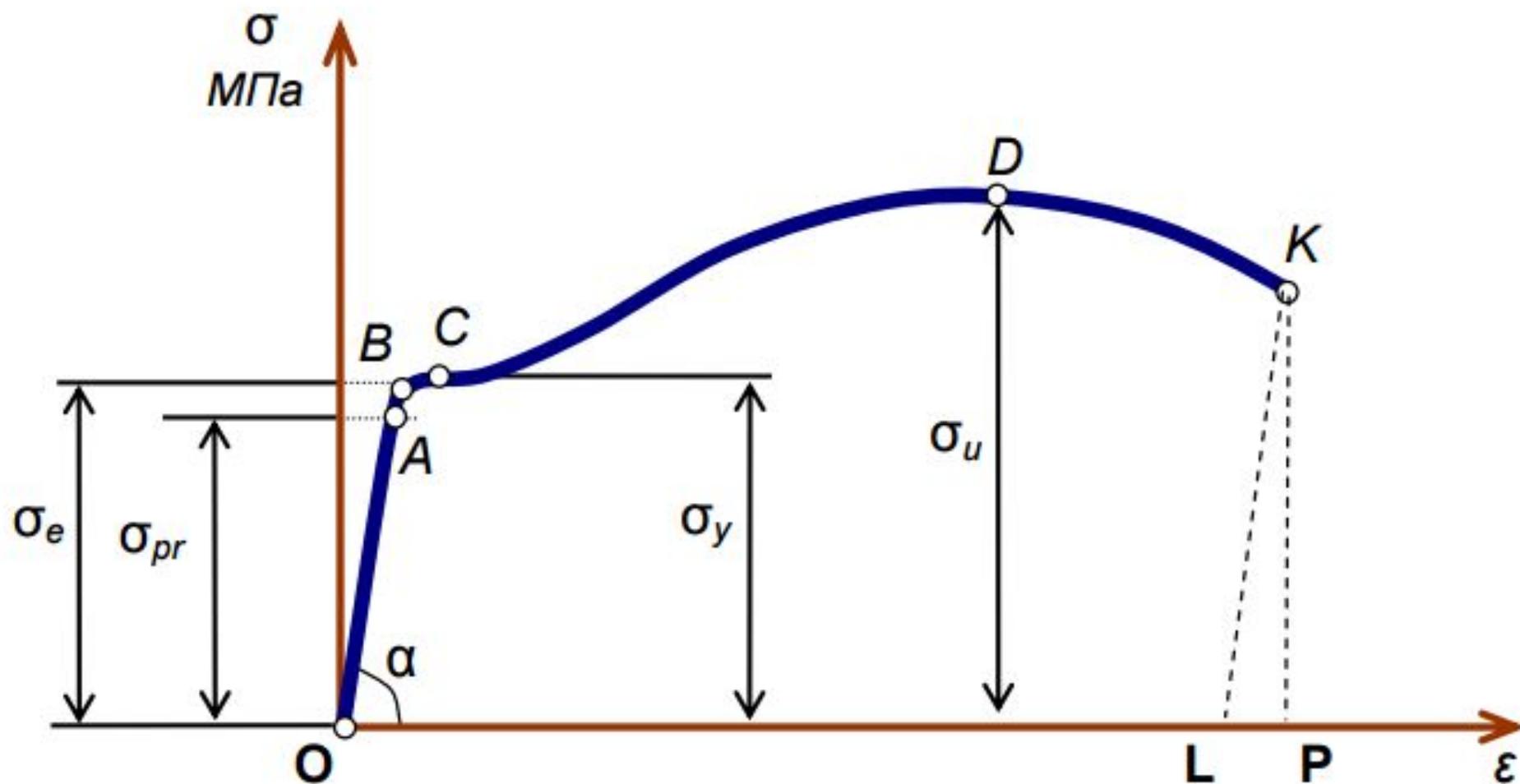
где F - нагрузка, действующая на образец в данный момент времени;

A_0 - начальная площадь поперечного сечения образца;

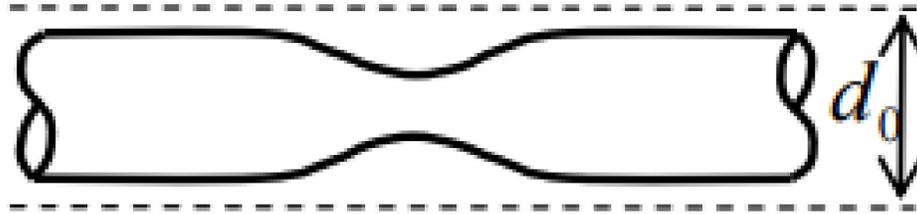
Δl - величина абсолютной деформации при растяжении образца;

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0};$$

l_0 - расчетная длина рабочей части образца.



Образование «шейки»



Относительное остаточное удлинение

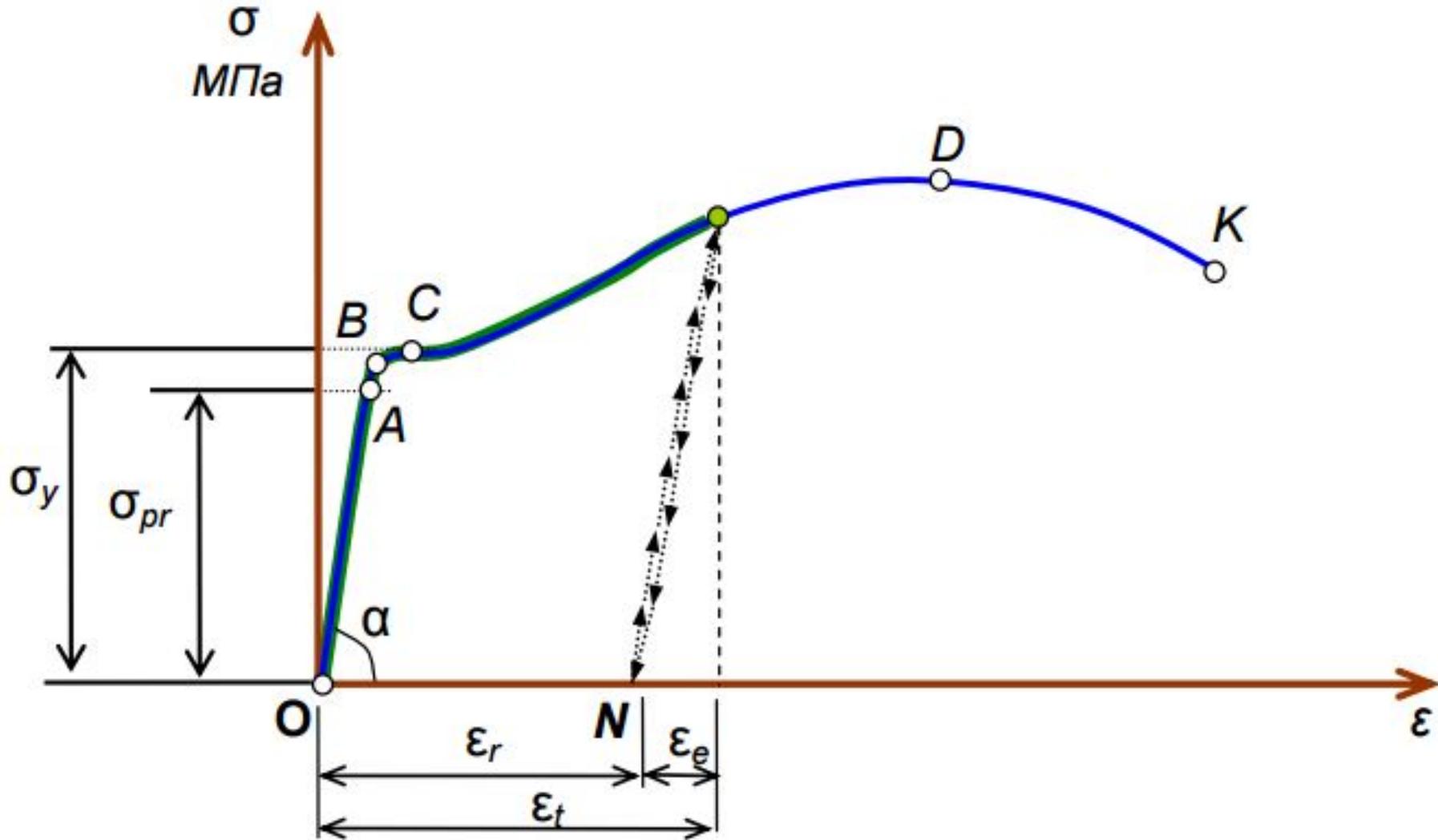
$$\varepsilon_r = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\%$$

Относительное остаточное сужение

$$\psi_r = \frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\%$$

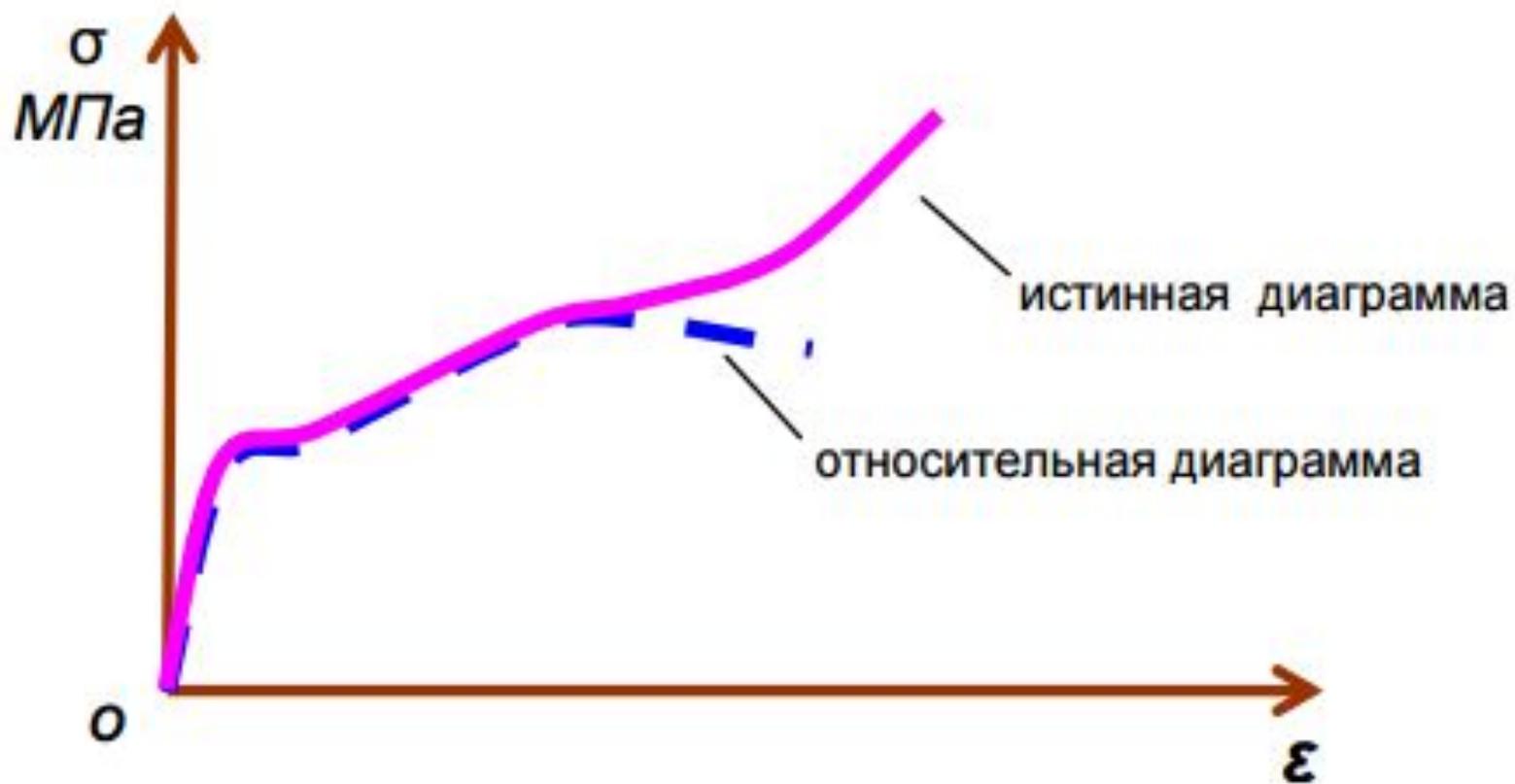
где A_0 - площадь поперечного сечения образца до опыта;
 A_1 - площадь поперечного сечения образца в наиболее тонком месте после разрыва.

Повышение условного предела текучести (наклёп)



$$\epsilon_t = \epsilon_r + \epsilon_e,$$

Истинная диаграмма растяжения пластичного материала



$$\sigma = \frac{F}{A_0},$$
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

$$\sigma_t = \frac{F}{A_{уст}},$$

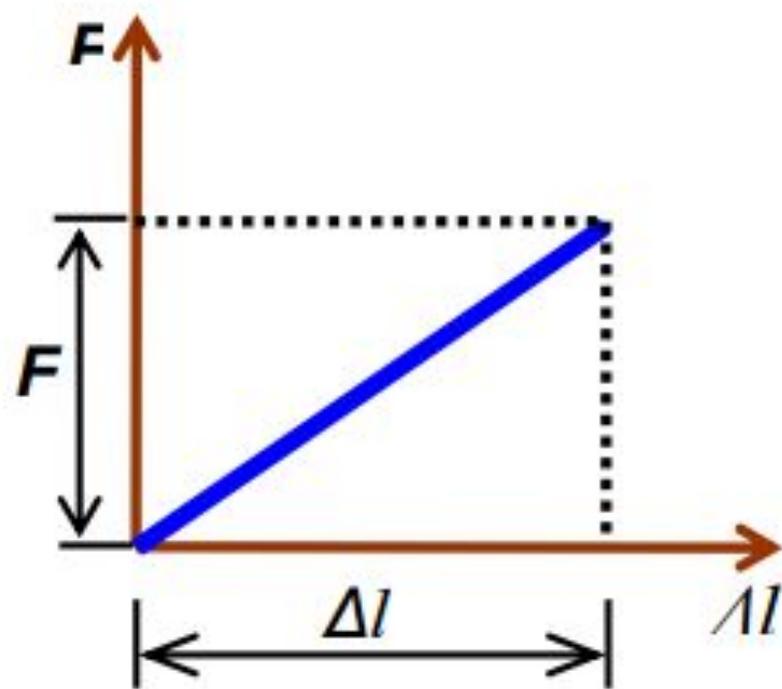
где $A_{уст}$ - фактическая площадь поперечного сечения образца в данный момент времени, измеряемая в процессе испытания.

Потенциальная энергия деформации

При нагружении упругого тела внешние силы совершают работу W , которая целиком затрачивается на сообщение кинетической энергии K и накопление потенциальной энергии деформации U , которая является полностью обратимой:

$$W = K + U$$

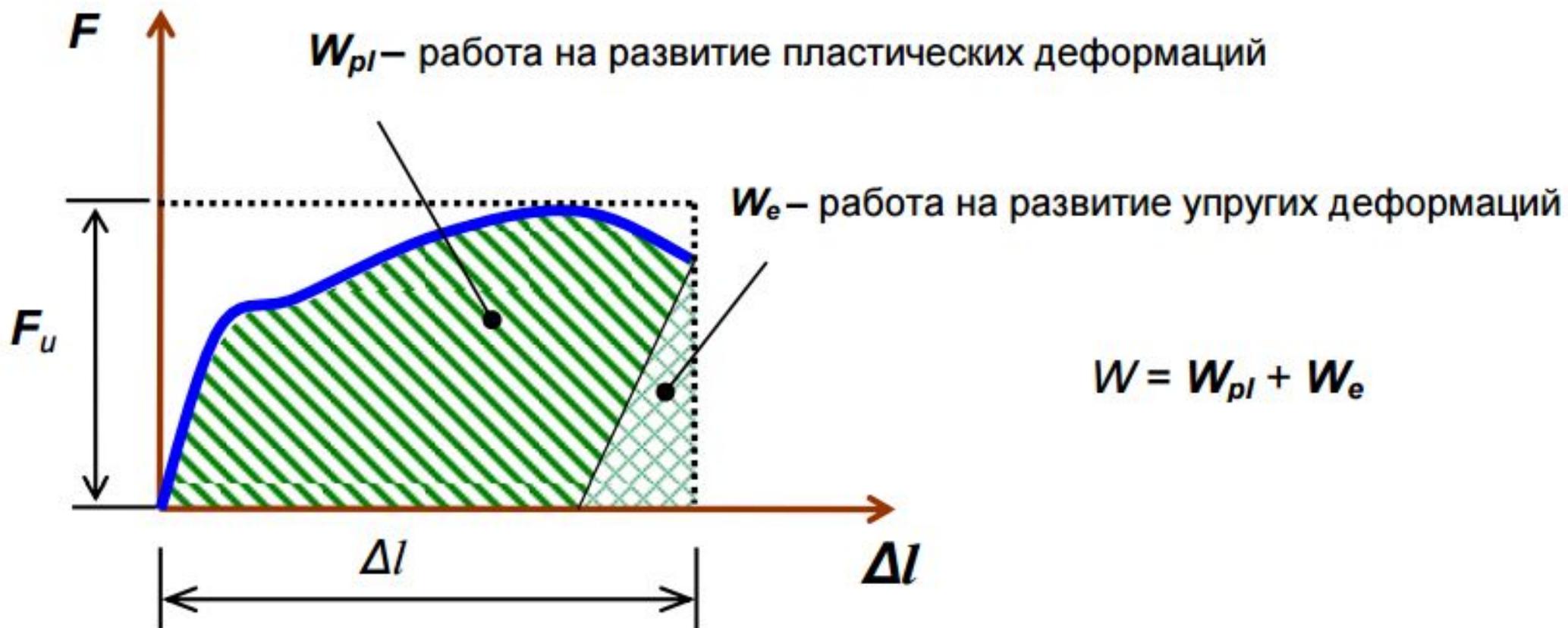
$$W = U = 1/2 F \Delta l = 1/2 N N l / EA = \frac{N^2 l}{2EA}$$



Работа, затраченная на разрыв образца

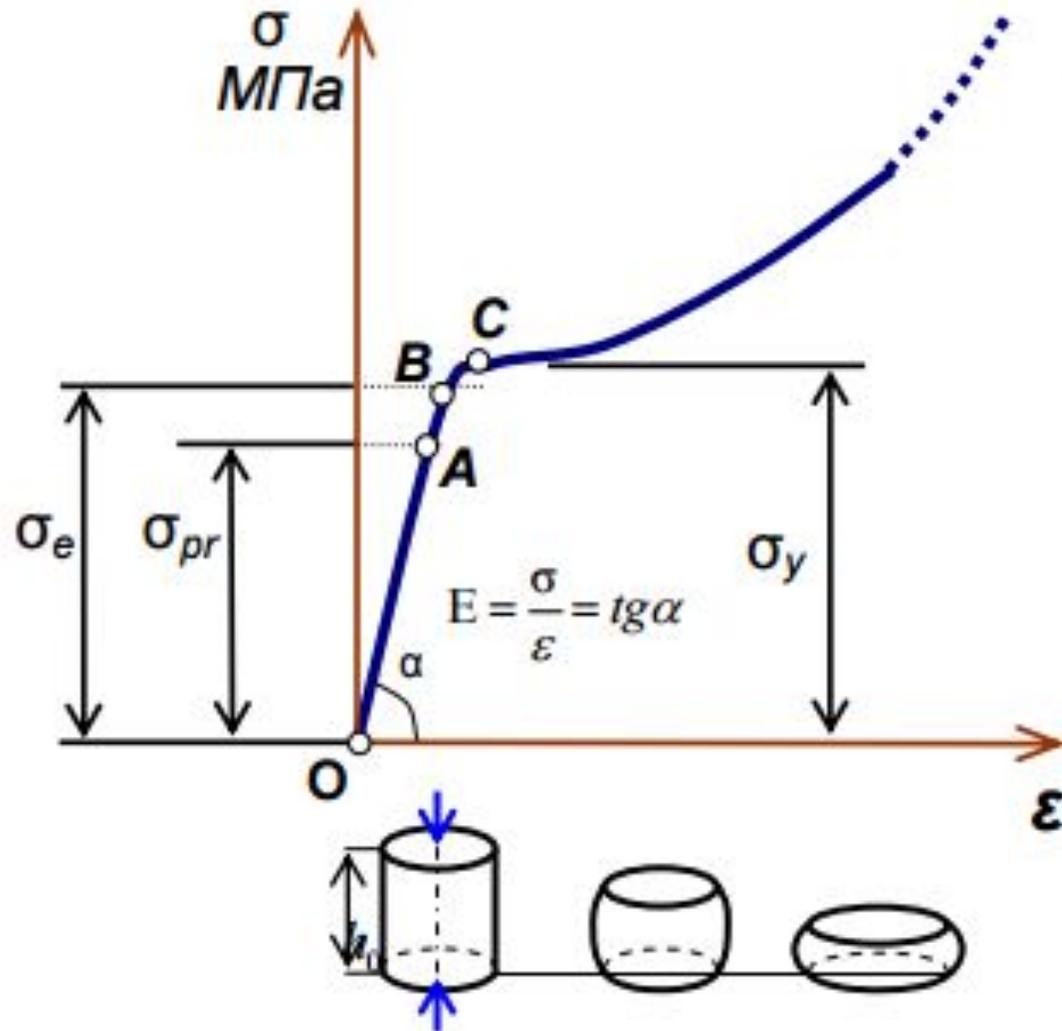
$$W = \eta F_{max} \Delta l$$

η – коэффициент заполнения диаграммы (для стали марки Ст3 $\eta = 0,85 \dots 0,87$).



Испытание различных материалов на сжатие

Испытание пластичного материала на сжатие



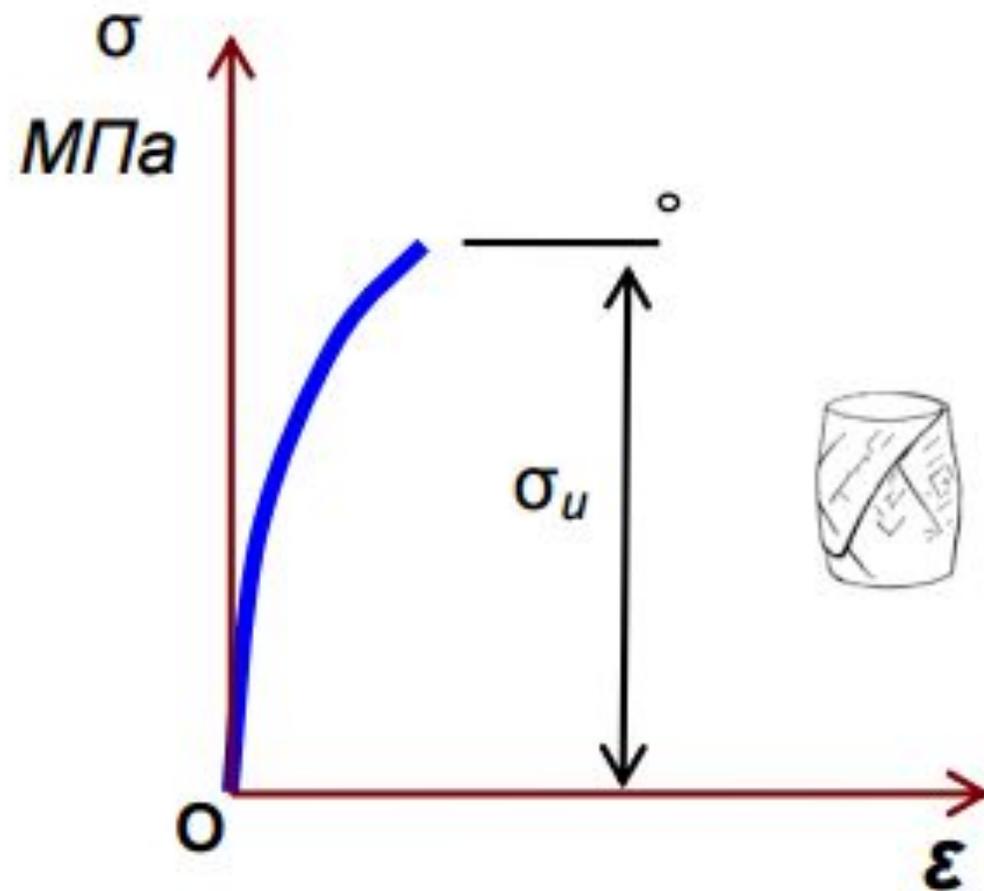
ГОСТ 25.503-97 «Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Метод испытания на сжатие»

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E$$

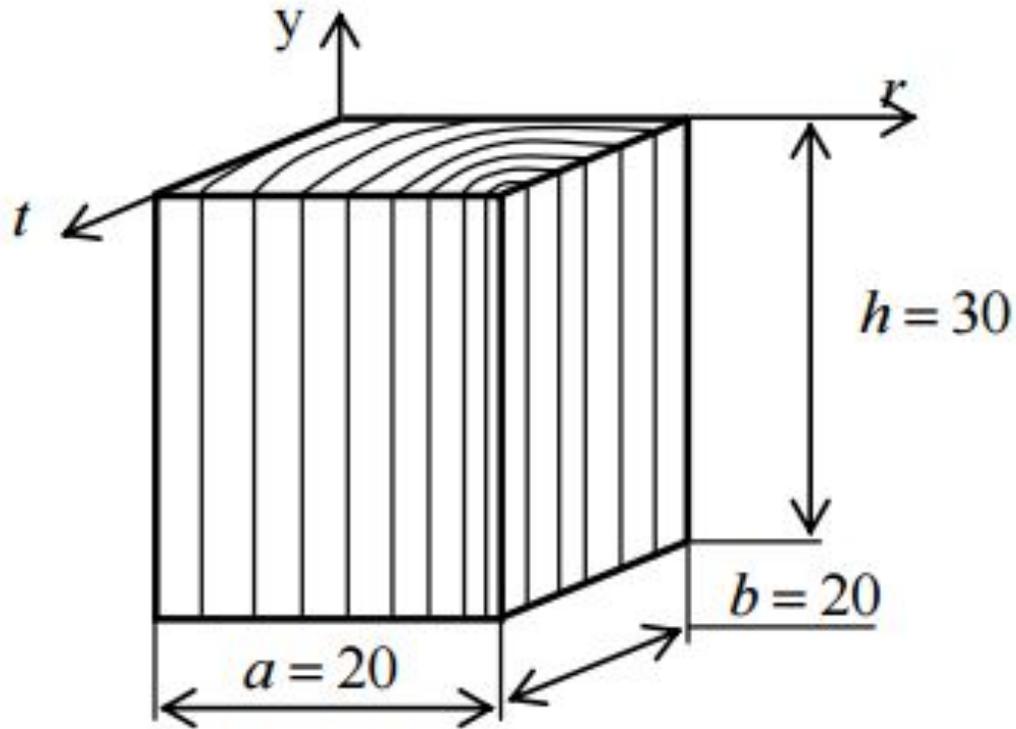
Испытания чугуна на сжатие

ГОСТ 25.503-97

«Расчет и испытания на прочность. Метод испытания на сжатие»



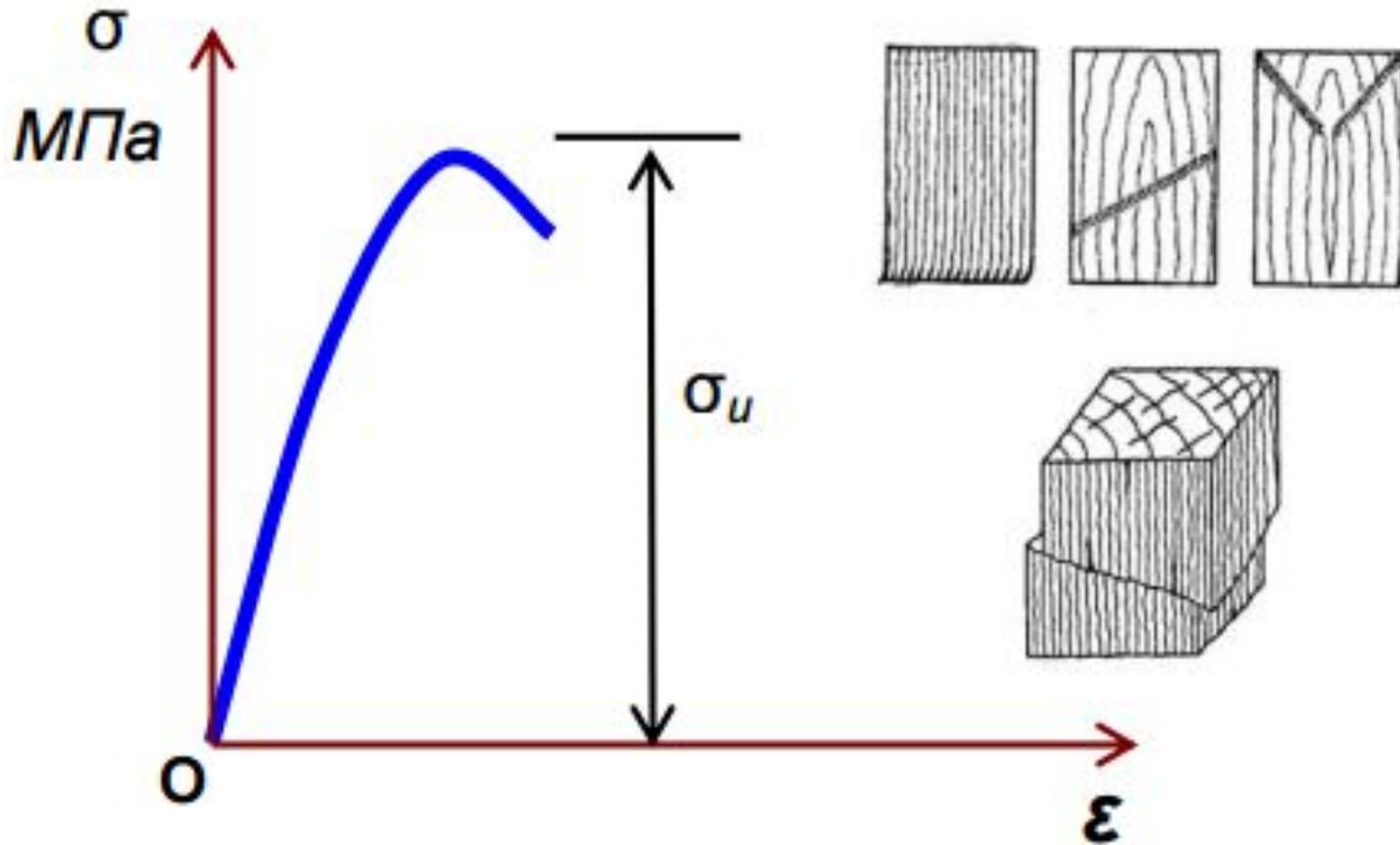
Испытание древесины на сжатие



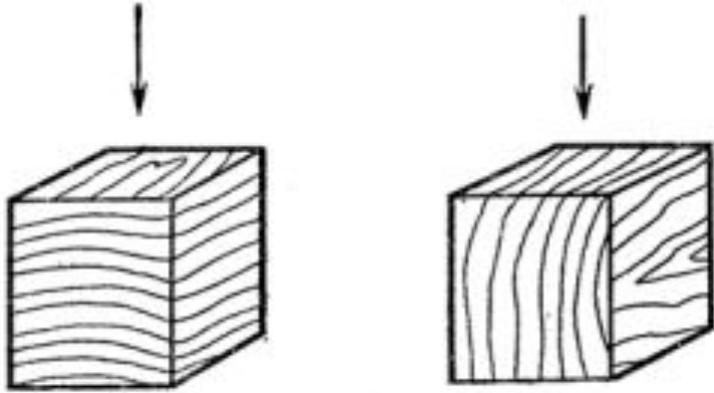
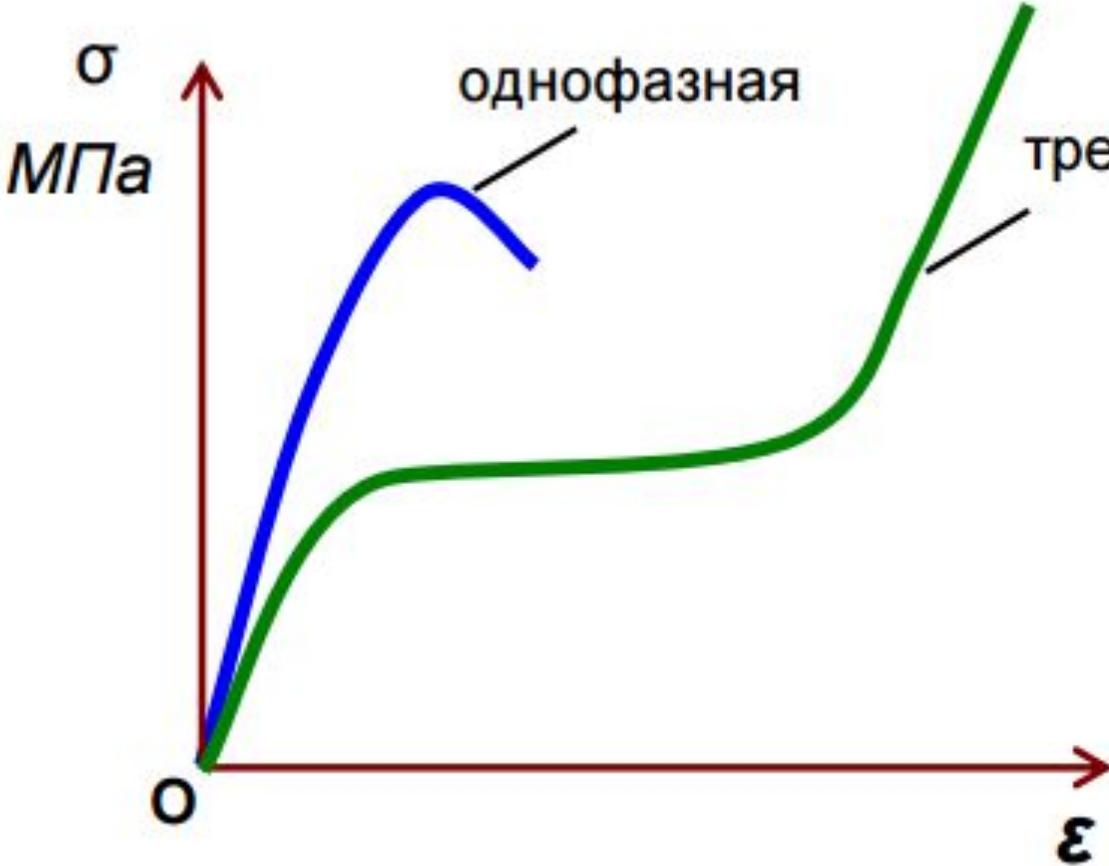
ГОСТ 16483.0-89 «Древесина. Общие требования к физико-механическим испытаниям» на образцах нормализованной влажности ($W = 12\%$)

ГОСТ 16483.10-73 «Древесина. Методы определения предела прочности при сжатии вдоль волокон» и ГОСТ 16483.11-72 «Древесина. Метод определения условного предела прочности при сжатии поперек волокон»

Сжатие древесины вдоль волокон

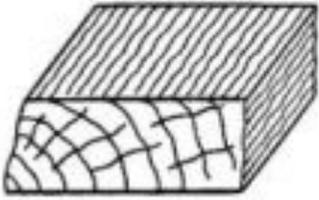


Сжатие древесины поперек волокон



Сжатие в радиальном направлении

Сжатие в тангенциальном



Деформация образца при сжатии

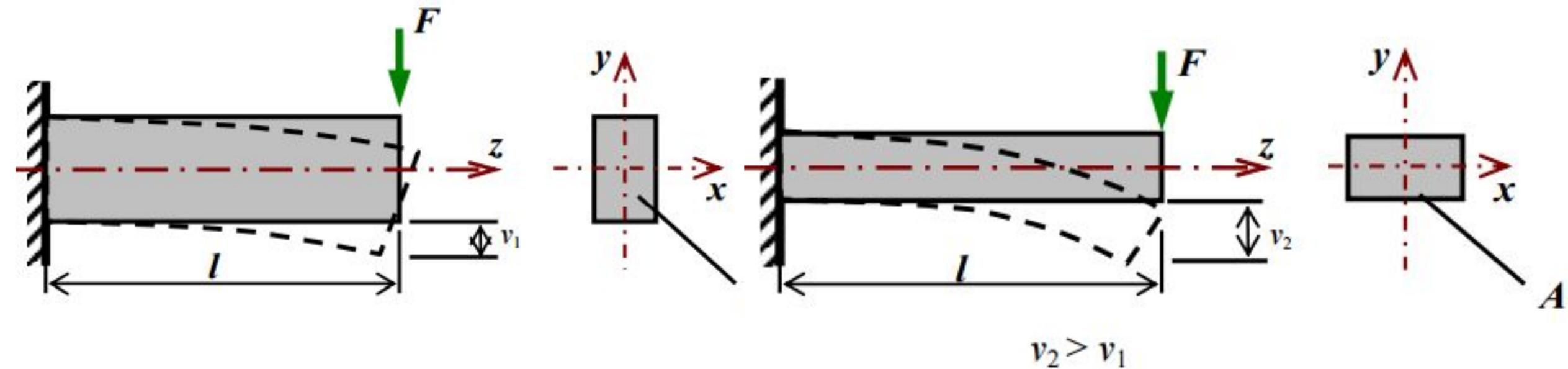
Предел прочности на сжатие вдоль волокон

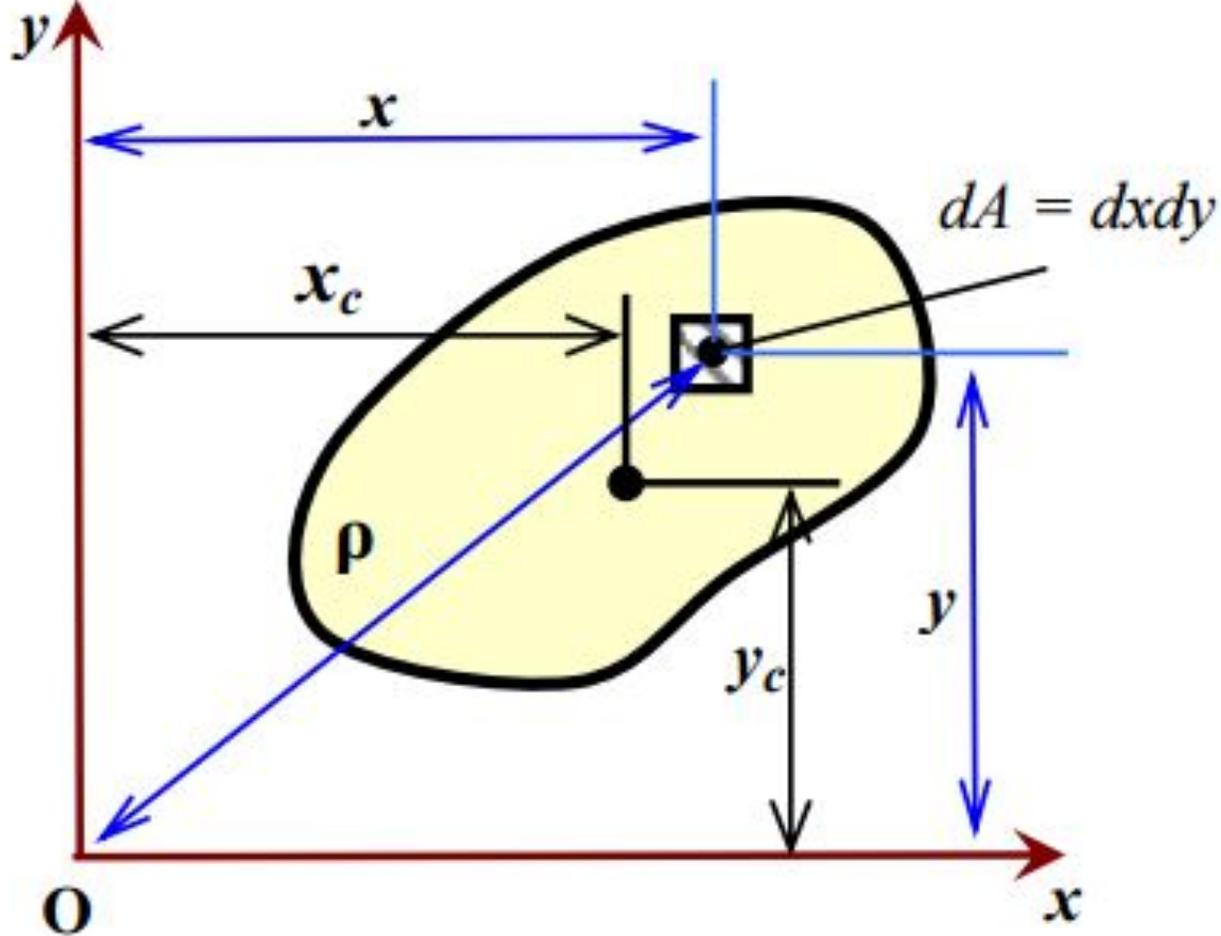
	W = 12%	W = 30% и >
Сосна	46	21
Ель	45	19
Дуб	57	31
Береза	54	26

Условный предел прочности при сжатии поперек волокон

	12%	30%	12%	30%
	радиальный		тангенциальный	
Сосна	5,1	3,0	7,5	3
Осина	5,4	3,2	3,5	2,1

Геометрические характеристики плоских поперечных сечений





Статический момент

$$S_x = \int_A y dA \quad S_y = \int_A x dA.$$

$$S_x = \int_A y dA = Ay_c = \sum A_i y_i ;$$

$$S_y = \int_A x dA = Ax_c = \sum A_i x_i .$$

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется *центральной*. Точка пересечения центральных осей называется **центром тяжести сечения**.

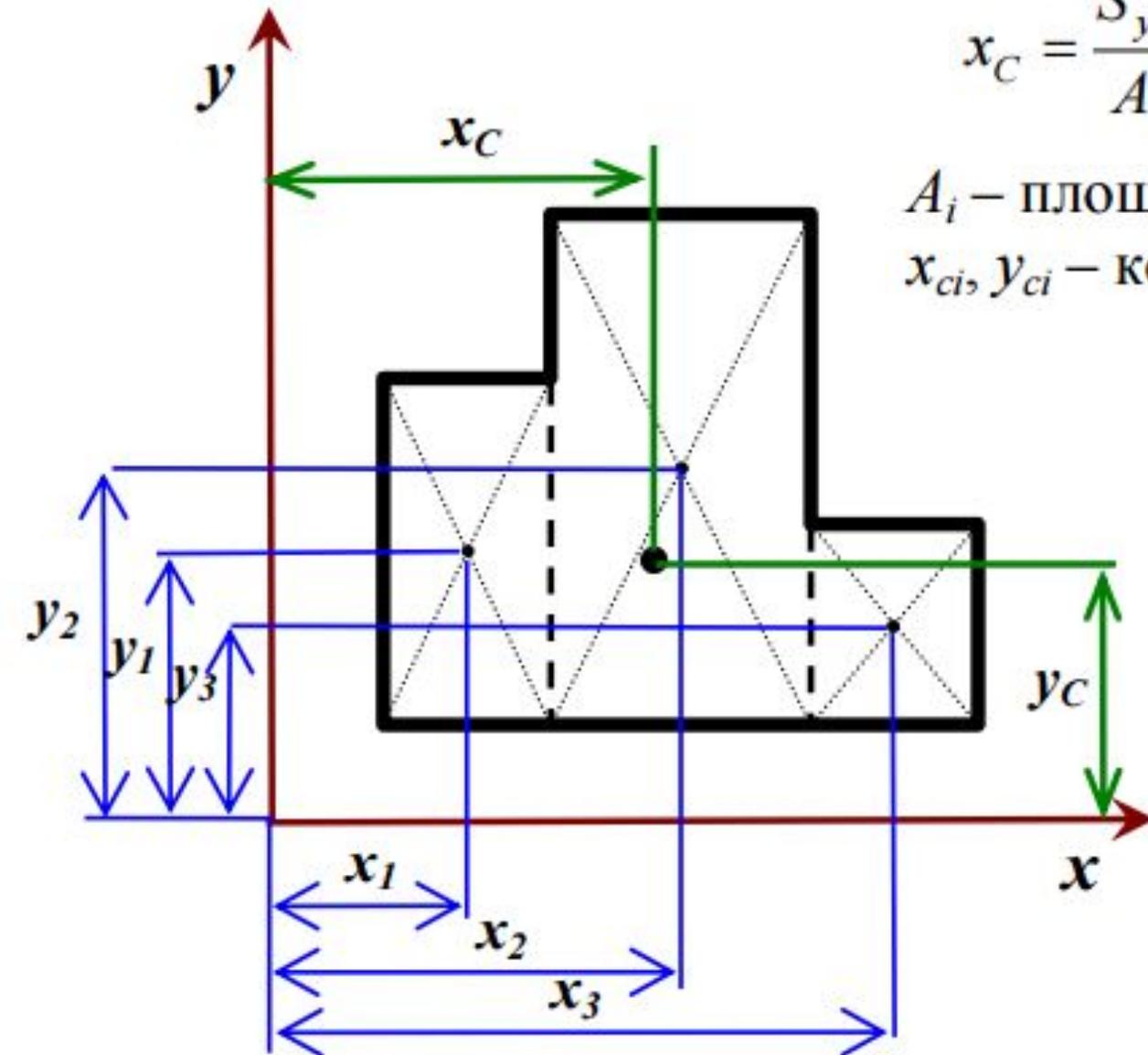
Координаты центра тяжести сечения

$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i x_{Ci}}{\sum A_i};$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i y_{Ci}}{\sum A_i}.$$

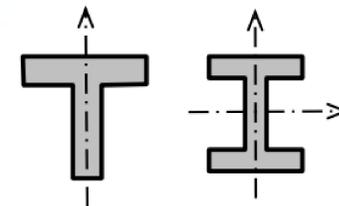
A_i – площадь простой фигуры;

x_{Ci}, y_{Ci} – координаты центра тяжести простой фигуры.



$$x_C = \frac{\sum A_i x_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$y_C = \frac{\sum A_i y_{Ci}}{\sum A_i} = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$



Моменты инерции сечения

Осевые моменты инерции

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA.$$

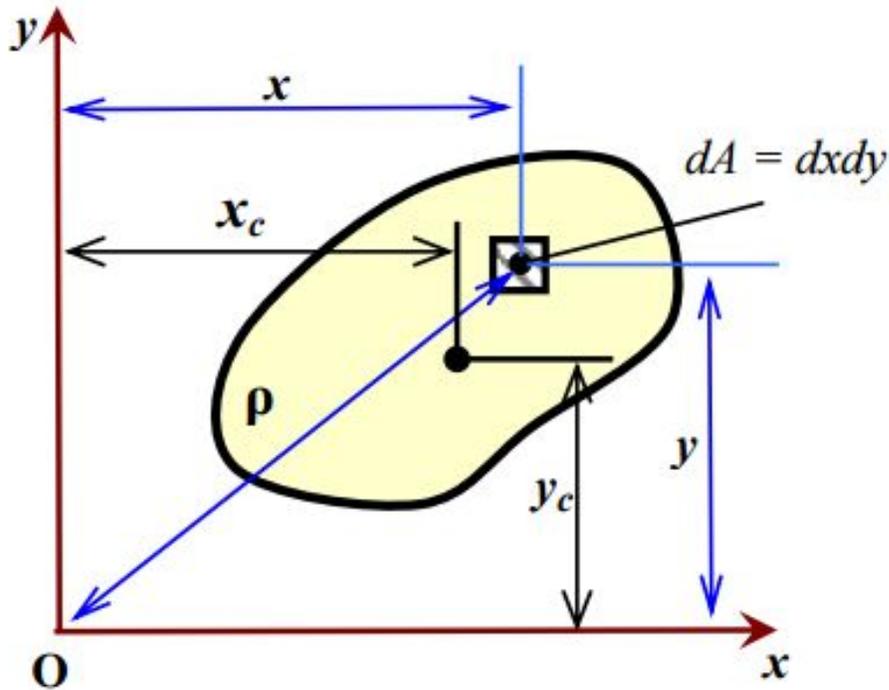
Полярный момент инерции

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA.$$

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_x + I_y.$$

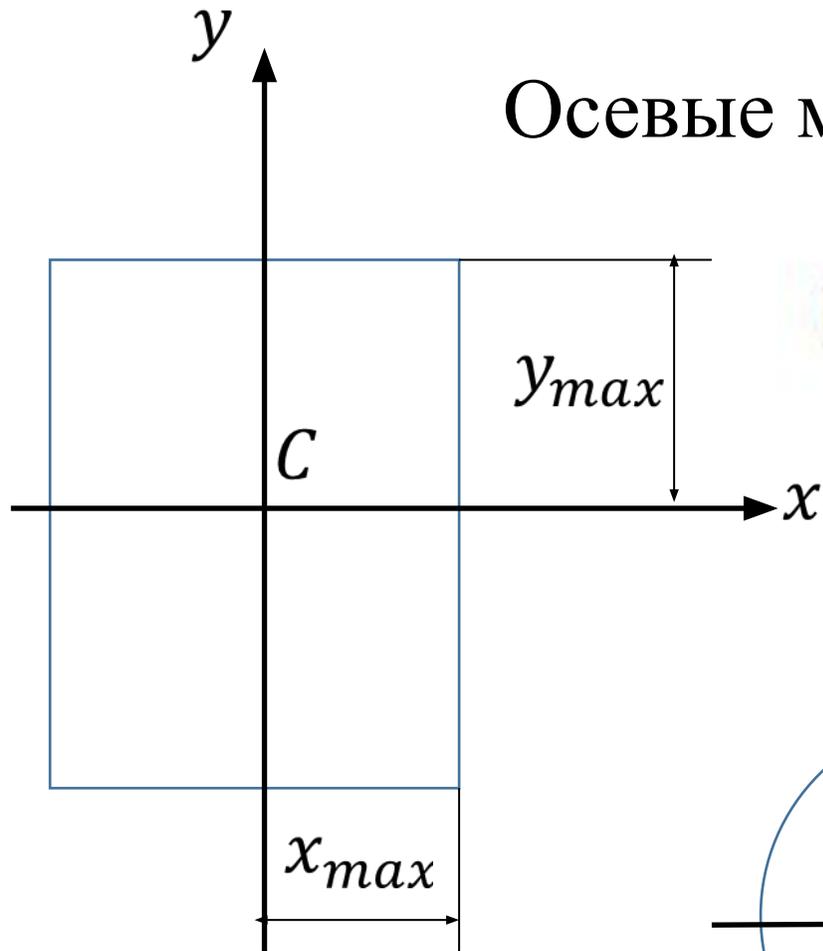
Центробежный момент инерции

$$I_{xy} = \int_A xy dA.$$



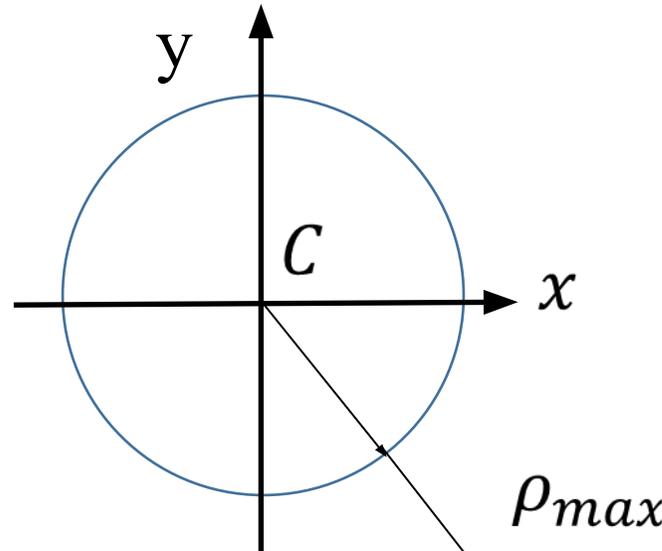
Моменты сопротивления плоских фигур

Осевые моменты сопротивления плоских фигур



$$W_x = \frac{I_x}{y_{max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{x_{max}}, \quad \text{см}^3, \text{ м}^3.$$

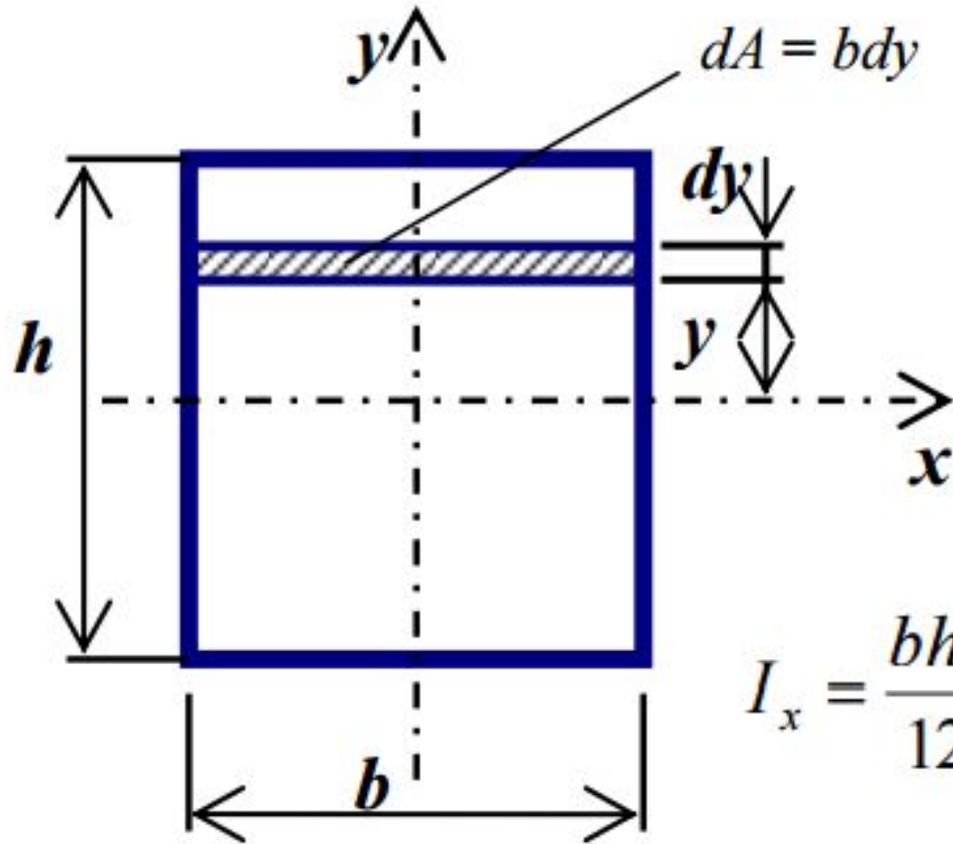
Полярный момент сопротивления



$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{max}}.$$

Моменты инерции и моменты сопротивления плоских фигур

Прямоугольник



$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 b dy = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy =$$
$$= b \frac{y^3}{3} \Big|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = b \left(\frac{h^3}{24} + \frac{h^3}{24} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12},$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}$$

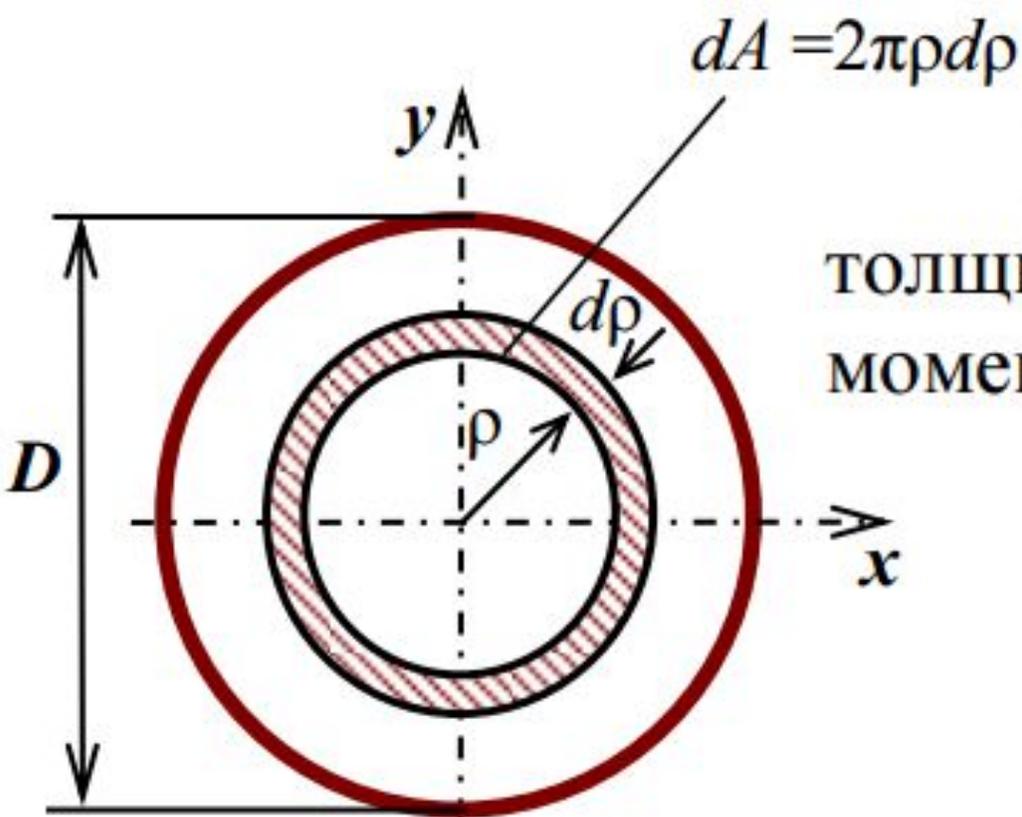
$$W_y = \frac{hb^2}{6}$$

Квадрат

$$I_x = I_y = \frac{a^4}{12}$$

$$W_x = W_y = \frac{a^3}{6}$$

Круг



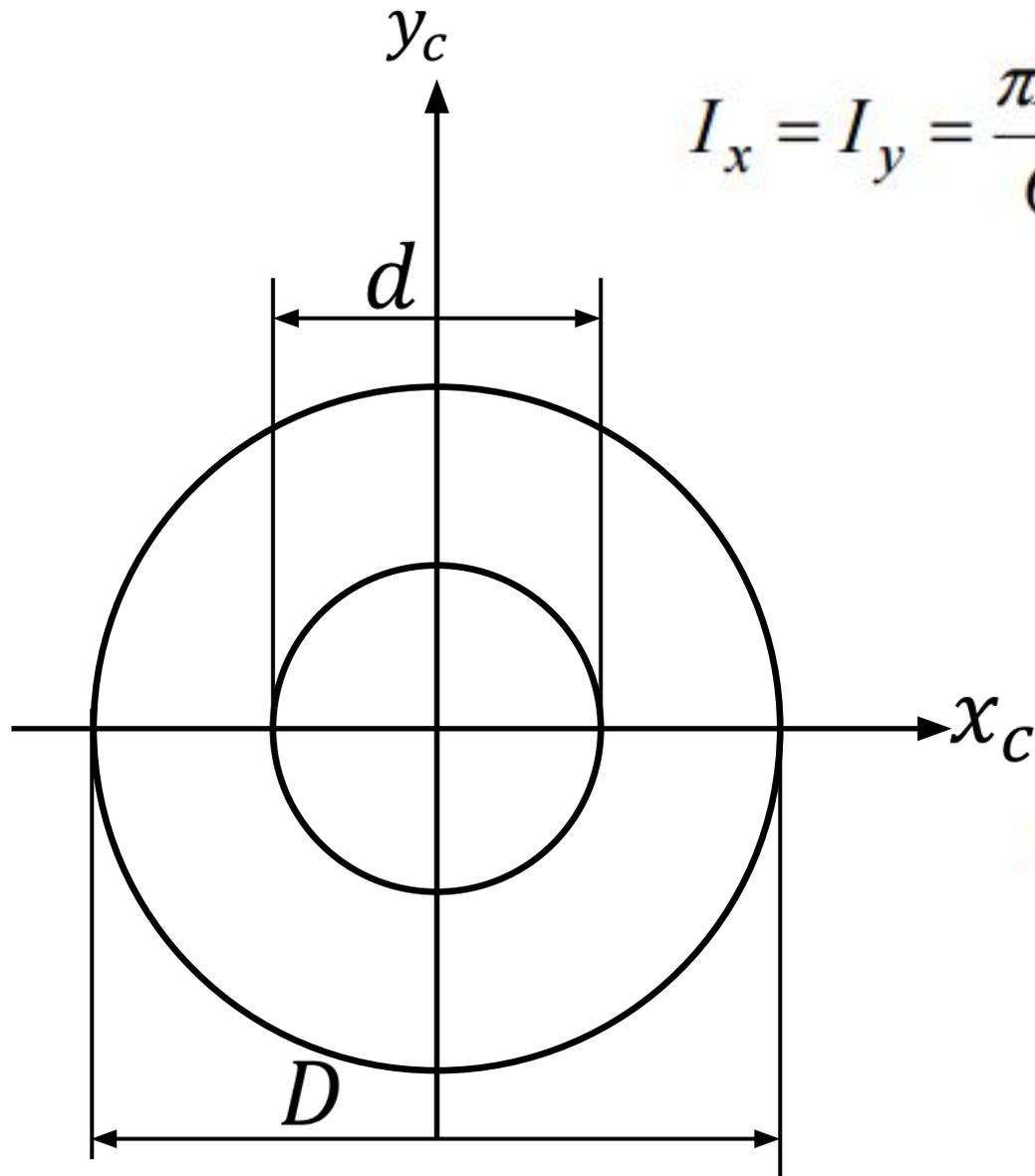
Площадь бесконечно тонкого круга толщиной $d\rho$ $dA = 2\pi\rho d\rho$. Тогда полярный момент инерции:

$$I_{\rho} = 2\pi \int_0^{D/2} \rho^3 d\rho = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$I_{\rho} = I_x + I_y = 2I_x \quad I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$W_x = W_y = \frac{I_y}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} \approx 0.1D^3$$

Кольцевое сечение



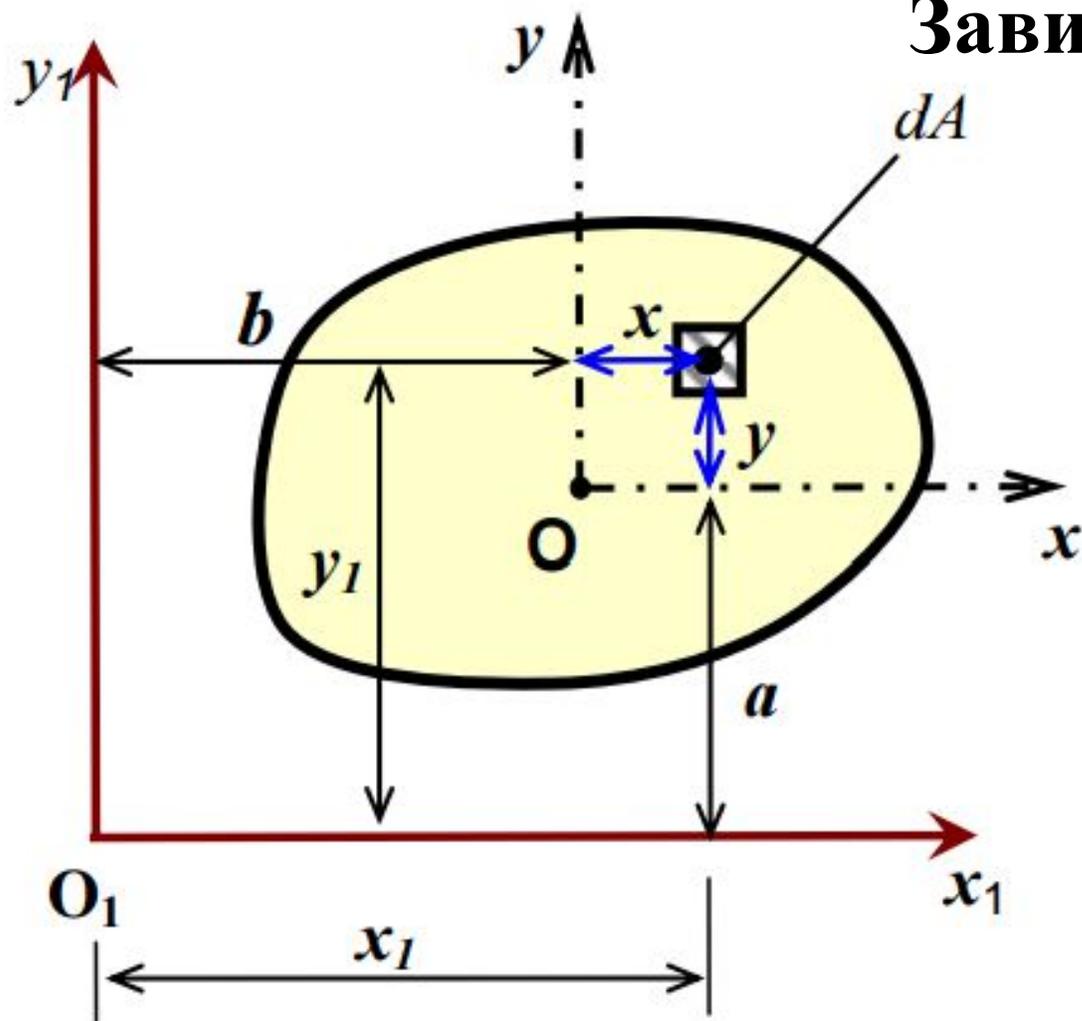
$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = \frac{\pi D^4}{64} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right)$$

$$c = \frac{d}{D}$$

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} (1 - c^4)$$

$$W_x = W_y = \frac{I_y}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - c^4)$$

Зависимости между моментами инерции при параллельном переносе осей



Дано:

ox и oy – центральные оси

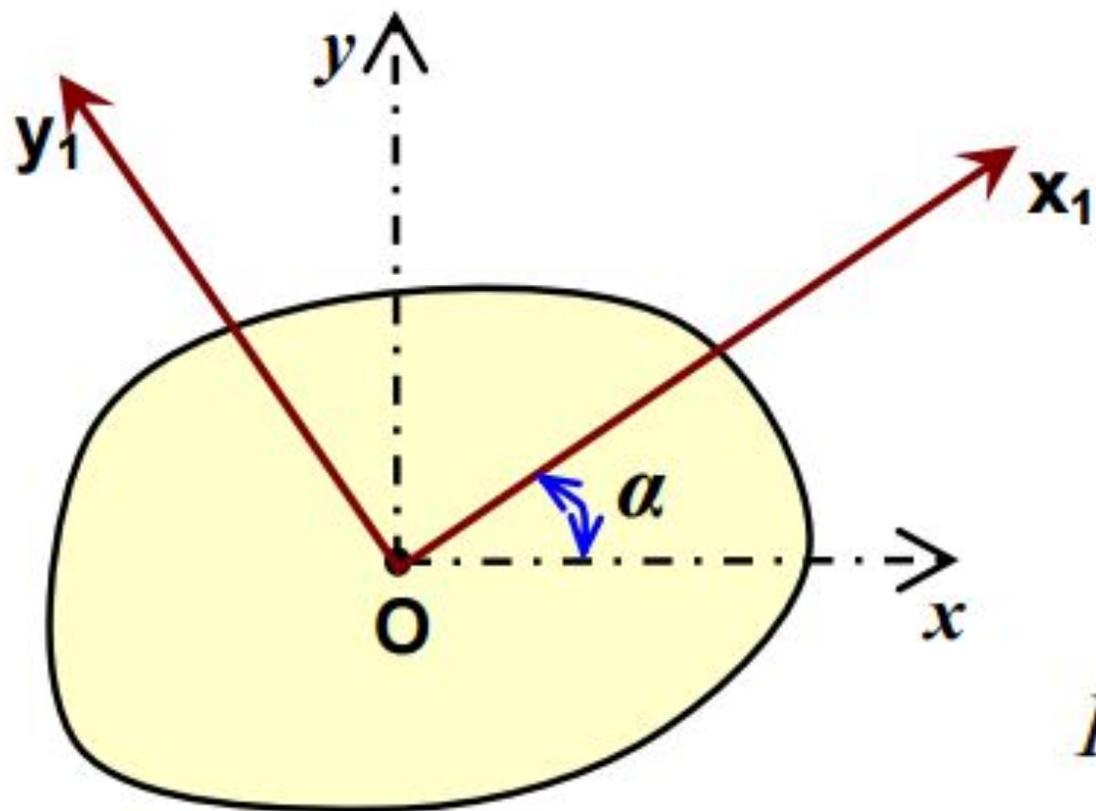
$o_1x_1 \parallel ox$ $o_1y_1 \parallel oy$

I_x ; I_y ; I_{xy} – моменты инерции

Найти: I_{x1} ; I_{y2} ; I_{x1y1}

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A 2ay dA + \int_A a^2 dA = I_x + a^2 A$$

Изменение моментов инерции при повороте осей



$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{y_1} = I_y \cos^2 \alpha + I_x \sin^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

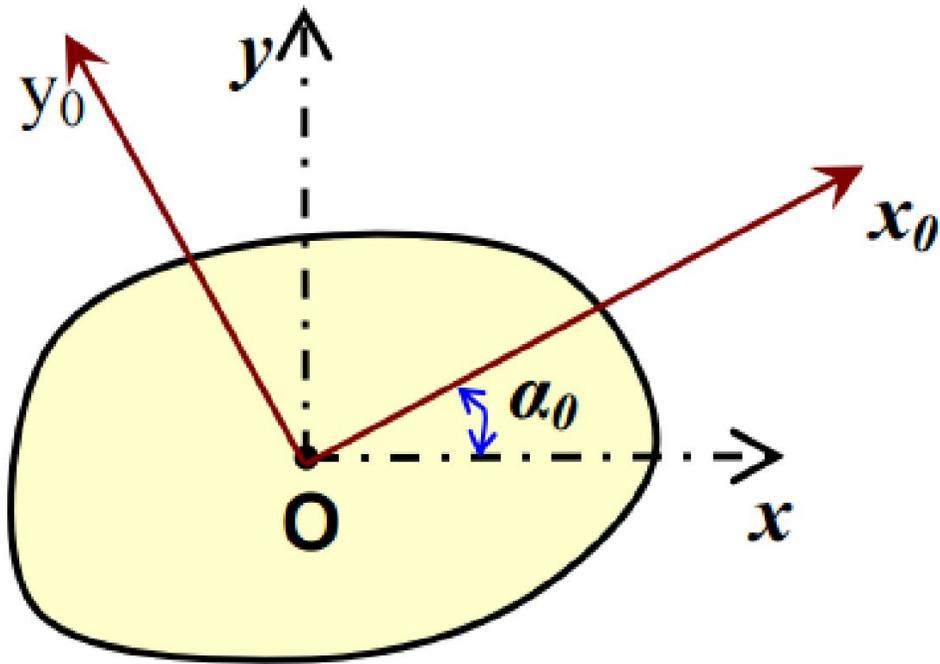
Главные оси инерции и главные моменты инерции

Центральные оси инерции относительно которых центробежный момент инерции равен нулю называются главными осями инерции.

$$I_{x_0y_0} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha$$

$$I_{x_0y_0} = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$



$$I_{\max} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$
$$I_{\min} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{\max} + I_{\min} = I_x + I_y$$

