Симплекс-метод

Теорема 1 Пусть исходная задача решается на минимум, тогда если для некоторого опорного решения все z-оценки $\Delta_j \quad (j = \overline{1,n})$ неположительные, то такое опорное решение является оптимальным.

Теорема 2 Если исходная задача решается на максимум, то в случае, когда все $\Delta_j \quad (j = \overline{1,n})$– неотрицательные, получаем оптимальное решение исходной задачи.

Теорема 3 Если опорный план ЗЛП не вырожден и $\exists \Delta_k > 0$ такое, что в *k*-ом столбце системы ограничений есть хотя бы одно положительное число, т.е. не все $a_{ik} < 0$, то существует такое опорное решение x', что $z(x') < z(x)$, где x – исходное опорное.

Теорема 4 Если опорное решение ЗЛП не вырождено и $\exists \Delta_k > 0$ и в *k*-ом столбце системы ограничений нет ни одного положительного числа, т.е. все $a_{ik} < 0$, то целевая функция не ограничена на ОДР.

Структура симплекс таблицы

			C_1	C_2	...	C_m	C_{m+1}	...	C_n
$X_Б$	$C_Б$	A_0	A_1	A_2	...	A_m	A_{m+1}	...	A_n
x_1	C_1	b_1	1	0	...	0	$a_{1,\ m+1}$	...	$a_{1,\,n}$
x_2	C_2	b_2	0	1	...	0	$a_{2,\ m+1}$	...	$a_{2,\,n}$
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
x_m	C_m	b_m	0	0	...	1	$a_{m,\ m+1}$	...	$a_{m,\,n}$
Δ_k		Δ_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n

Методы контроля:

1. Z-оценки при базисных переменных равны нулю $\Delta_i = 0 \quad i = (\overline{1, m})$;

2. Значения правой части всегда неотрицательны $b_j \geq 0 \quad j = (\overline{1, n})$;

3. Значение целевой функции на каждом шаге не ухудшается.

Зацикливание

Зацикливание может возникать при наличии вырожденного опорного решения. Выражается в том, что значение целевой функции на следующем шаге не меняется.

Пример:

$$-3x_1 - 5x_3 + 7x_5 \to \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_4 \geq 10 \\ 3x_1 + 2x_3 \leq 8 \\ 7x_1 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = (\overline{1,5})$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_4 - x_6 = 10 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_7 = 8 \\ 7x_1 + x_3 - 7x_4 + x_5 = 12 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = (\overline{1,7})$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 10 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 7 & 0 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right)$$

Составим симплекс-таблицу:

			-3	0	-5	0	7	0	0
x_2	0	10	2	1	0	-3	0	-1	0
	0	8	3	0	2	0	0	0	1
x_7	7	12	7	0	1	-7	1	0	0
x_5		84	52	0	12	-49	0	0	0

Найдем в каждом столбце с положительной z-оценкой

$$\min\left(\frac{b_i}{a_{ik}}\right):$$

для первого столбца:			для второго столбца:		
10	2	5	10	0	-
8	3	2,666667	8	2	4
12	7	1,714286	12	1	12
1,71 – минимальное			4 – минимальное		

Теперь получившиеся значения умножаем на соответствующую z-оценку:

1,714286 * 52 = 89, 14, 4 * 12 = 48.

Т.о. новый разрешающий элемент - a_{13}