Расчет пластин

Расчет пластин

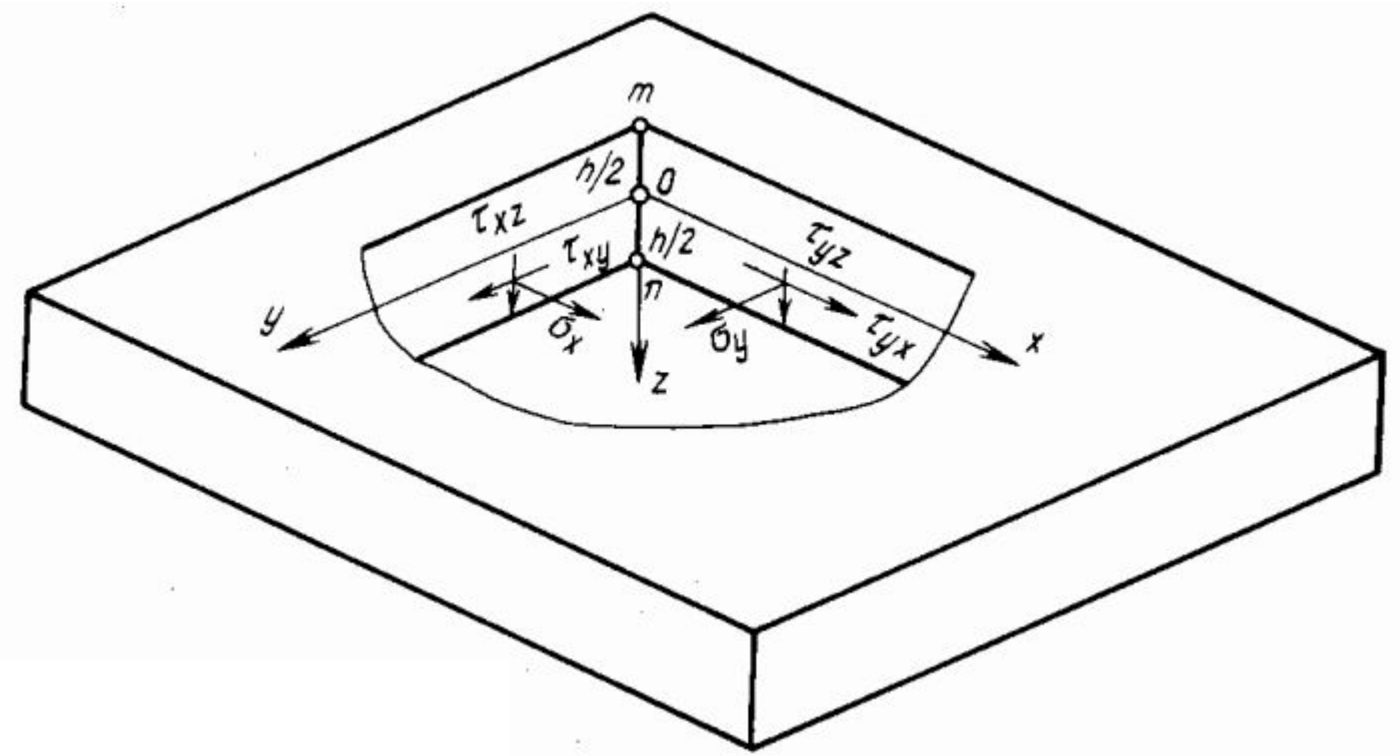
Пластина – это тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми h (толщина пластины, которая дальше считается постоянной) мало по сравнению с другими размерами.

Для расчета используется техническая теория пластин

При практическом применении теории пластин, необходимо соблюдать следующее пределы:

- **отношение толщины к наименьшему другому размеру пластины составляет меньше 1/10 (хотя теория остается применимой, когда это соотношение достигает 1/5);**
- **ожидаемые прогибы малы по сравнению с толщиной. Иногда верхний предел для указанного прогиба составляет 1/5 толщины пластины.**

Система координат



Плоскость *z = 0*, делящая толщину пластины пополам, называется срединной плоскостью.
Отрезок нормали *mn* к срединной плоскости называется нормальным элементом.

Силы, действующие на пластину и задачи

В общем случае на пластину может действовать

- **система объемных сил;**
- **система поверхностных нагрузок на плоскостях $z = \pm h/2$;**
- **система контурных сил.**

Эти силы могут вызывать:

- **растяжение-сжатие;**
- **сдвиг пластины;**
- **изгиб пластины;**
- **сложное напряженное состояние.**

Пластина, как и любое упругое тело, может быть описана общими уравнениями теории упругости, полученными ранее.

Общие уравнения теории упругости

Статические (или динамические) уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X\rho = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y\rho = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z\rho = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Общие уравнения теории упругости

Геометрические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Общие уравнения теории упругости

Физические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}.$$

Особенности работы пластин

Пластины обладают большой жесткостью на сдвиг и служат основным элементом, например, авиационных конструкций, воспринимающих погонные сдвигающие усилия.

Пластины могут также работать на растяжение, если растягивающие усилия приложены в их срединной плоскости.

Тонкие пластины плохо работают на изгиб, кручение и сжатие (потеря устойчивости и выпучивание).

Пластины, нагруженные нормальными к поверхности силами, приходится подкреплять часто расположенными ребрами, воспринимающими основную часть изгибающего момента.

Особенности работы пластин

Конструктивное применение пластин затрудняется тем, что они не могут воспринимать сосредоточенных усилий.

Сосредоточенная сила, даже лежащая в плоскости пластины, вызывает большие местные деформации (смятие и растягивание материала) и разрушение конструкции.

Для передачи сосредоточенных сил на тонкую пластину приходится применять специальные конструктивные меры, обеспечивающие включение в работу значительной части пластины.

Утолщение самой пластины в месте приложения силы ведет к недопустимому усложнению производства.

Гипотезы Кирхгофа

1. Кинематическая гипотеза. Нормальный элемент *mn* в процессе деформирования пластины:

- **не изменяет своей длины;**
- **остается прямым и нормальным к поверхности, в которую переходит в результате деформации срединная поверхность.**

2. Статическая гипотеза. Напряжения σ_z малы по сравнению с основными напряжениями.

Гипотезы Кирхгофа является по существу обобщением закона плоских сечений, используемого при расчете балок.

Гипотеза плоских сечений. *Плоские сечения, нормальные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси стержня после деформации.*

Вывод уравнений теории тонких пластин

1а. Кинематическая гипотеза. Нормальный элемент *mn* в процессе деформирования пластины не изменяет своей длины.

$$\varepsilon_z = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad => \quad w = w(x, y)$$

Перемещение *w* является основной неизвестной функцией в теории изгиба пластин и называется прогибом пластины.

Вывод уравнений теории тонких пластин

1б. Нормальный элемент *mn* в процессе деформирования пластины остается прямым и нормальным к поверхности, в которую переходит в результате деформации срединная поверхность.

$$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0\,; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,.$$

Интегрируя эти соотношения по z с учетом того, что w не зависит от z, получим

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y)\,; \qquad v = -z\frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y)\,.$$

$u_0(x, y),\ v_0(x, y)$ **– две произвольные функции, (перемещения точек срединной плоскости).**

Вывод уравнений теории тонких пластин

Геометрические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Вывод уравнений теории тонких пластин

Физические уравнения (модель ПНС)

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}.$$

Вывод уравнений теории тонких пластин

Физические уравнения (модель ПНС)

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial u_0}{\partial x} + \mu\frac{\partial v_0}{\partial y} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right];$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial v_0}{\partial y} + \mu\frac{\partial u_0}{\partial x} - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right];$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right].$$

Распределение напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} по толщине пластины включает постоянную, не зависящую от z составляющую, которая статически эквивалентна распределенному усилию, и линейно зависящую от z составляющую, которая эквивалентна моменту.

Вывод уравнений теории тонких пластин

Погонные усилия и моменты

$$T_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz\,; \qquad T_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz\,; \qquad T_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz\,;$$

Изгибающие моменты

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\, dz\,; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\, dz\,;$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\, dz$$ **– крутящий момент.**

Вывод уравнений теории тонких пластин

$$T_x = \frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_x^0 + \mu\varepsilon_y^0) = B(\varepsilon_x^0 + \mu\varepsilon_y^0);$$

$$T_y = B(\varepsilon_y^0 + \mu\varepsilon_x^0);$$

$$T_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}^0 = \frac{B(1-\mu)}{2}\gamma_{xy}^0;$$

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}; \qquad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x};$$

$$B = \frac{Eh}{1-\mu^2}$$ **– жесткость пластины при растяжении-сжатии.**

Вывод уравнений теории тонких пластин

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = D(\chi_x + \mu\chi_y);$$

$$M_y = D(\chi_y + \mu\chi_x); \qquad M_{xy} = \frac{D}{2}(1-\mu)\chi_{xy};$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \qquad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$ **– кривизна поверхности;**

$$\chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$ **– кручение поверхности;**

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$ **– цилиндрическая жесткость, характеризует изгибную жесткость пластины;**

Вывод уравнений теории тонких пластин

Таким образом, гипотезы Кирхгофа позволили значительно упростить задачу.

Исходная трехмерная задача об определении перемещений

$$u(x,y,z),\ v(x,y,z),\ w(x,y,z)$$

приводится к двумерной, т.е. к определению функций

$$u_0(x,y),\ v_0(x,y),\ w(x,y)$$

Система уравнений теории пластин разделяется на две независимых подсистемы, описывающие нагружение в плоскости пластины и ее изгиб.

2 задачи:

- **плоское напряженное состояние пластин;**
- **изгиб пластин.**

Плоское напряженное состояние пластин

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0\,; \qquad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0\,;$$

Геометрические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Физические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right); \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}.$$

Плоское напряженное состояние пластин

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0\,; \qquad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} = 0\,.$$

Геометрические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\,; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\,; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,.$$

Физические уравнения

$$T_x = B(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)\,; \qquad T_y = B(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)\,;$$

$$T_{xy} = \frac{B(1-\mu)}{2}\gamma_{xy}\,.$$

Изгиб пластин

$$w \neq 0, \qquad u_0 = v_0 = 0.$$

Горизонтальные смещения точек, не принадлежащих срединной поверхности

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y); \qquad u = -z\frac{\partial w}{\partial x}; \qquad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Деформации

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \qquad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \qquad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Изгиб пластин

Физические уравнения

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right];$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Изгиб пластин

Из первых двух уравнений равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0\,;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0\,.$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right].$$

Изгиб пластин

Интегрируя эти уравнения, получаем:

$$\tau_{xz} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \varphi_1(x, y);$$

$$\tau_{yz} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \varphi_2(x, y).$$

Граничные условия: **при** $z = \pm h/2$ $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$\varphi_1(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];$$

$$\varphi_2(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right].$$

Изгиб пластин

$$\tau_{xz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];$$

$$\tau_{yz} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right].$$

Законы изменения τ_{xz} и τ_{yz} по толщине пластины – параболические.

В чем заключается противоречие между уравнениями равновесия и закона Гука для деформаций с индексом z?

Дифференциальное уравнение упругой поверхности пластины

Из третьего уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = -\frac{E(h^2 - 4z^2)}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right];$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E\left(h^2 - 4z^2\right)}{8(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right].$$

Дифференциальное уравнение упругой поверхности пластины

Интегрируя по *z*, получаем:

$$\sigma_z = \frac{Ez\left(h^2 - \frac{4}{3}z^2\right)}{8(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \varphi(x, y).$$

Граничные условия: 1) при $z = h/2 \quad \sigma_z = p$

2) при $z = -h/2 \quad \sigma_z = 0$

$$\sigma_{z|z=h/2} = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \varphi(x, y) = p;$$

$$\sigma_{z|z=-h/2} = -\frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \varphi(x, y) = 0.$$

Изгиб пластин

$$2\varphi(x, y) = p \quad => \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2} p$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = p\,;$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Основное уравнения точек изгиба плоской пластины (уравнение Софи-Жермен).

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}.$$

Граничные условия при расчете пластин

1. Жестко защемленный край

$$w = 0; \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

2. Шарнирно-опертый край

$$w = 0; \qquad M_x = 0 \qquad => \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

при $x = 0$ $$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Граничные условия при расчете пластин

3. Свободный край

$$\sigma_x = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0\,;$$

$$\sigma_x = 0 \quad => \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,;$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad => \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0\,;$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\,.$$

Благодарю за внимание!