Лекція №4.

Двоїста задача лінійного програмування та методи її розв'язування

1. Пряма і двоїста задачі лінійного програмування.
2. Зв'язок між розв'язками прямої і двоїстої задач. Теореми двоїстості.
3. Застосування симплекс-методу до розв'язання двоїстої задачі.

1. Пряма і двоїста задачі лінійного програмування

Дамо визначення двоїстої задачі по відношенню до загальної задачі лінійного програмування виду:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max\ (\min), \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+1}x_2 + \ldots + a_{k+1}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,s},\ s \le n. \qquad (3)$$

Означення 1. Задача

$$f^*(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min\ (\max), \qquad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \geq (\leq)\ c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \geq (\leq)\ c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1s}y_1 + a_{2s}y_2 + \ldots + a_{ms}y_m \geq (\leq)\ c_s, \\ a_{1s+1}y_1 + a_{2s+1}y_2 + \ldots + a_{ms+1}y_m = c_{s+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n = c_n, \end{cases} \qquad (5)$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1,k},\ k \leq m,\ y_i \in R,\ i = \overline{k+1,m}, \qquad (6)$$

називається ***двоїстою*** по відношенню до задачі (1)-(3).

Задачі (1)-(3) і (4)-(6) утворюють пару задач, яку в лінійному програмуванні називають ***двоїстою парою задач***, при цьому задачу (1)-(3) називають ***прямою*** задачею.

Двоїста задача по відношенню до прямої складається **за такими правилами**:

1. Якщо задача (1)-(3) є задачею **максимізації**, то двоїста задача (4)-(6) є задачею **мінімізації** і навпаки.

2. Матриця складена з коефіцієнтів при невідомих в системі обмежень (2) прямої задачі, і матриця системи обмежень (5) двоїстої задачі одержуються одна з одної **транспонуванням**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2n} \\ . & . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots a_{m2} \\ . & . & . \quad . \quad . \quad . \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. **Кількість змінних у двоїстій задачі** (4)-(6) дорівнює кількості обмежень в системі (2) прямої задачі, а кількість обмежень в системі (5) двоїстій задачі (4)-(6) дорівнює кількості змінних у прямій задачі.

4. **Коефіцієнти при невідомих** у цільовій функції (4) двоїстої задачі є вільні члени системи (2) прямої задачі, а праві частини в системі обмежень (5) двоїстої задачі є коефіцієнти при невідомих у цільовій функції (1) прямої задачі.

5. Коли змінна x_j прямої задачі (1)-(3) може приймати лише невід'ємні значення, то j-те обмеження в системі (5) двоїстої задачі є нерівністю виду "$\geq$", якщо пряма задача є задачею максимізації, і є нерівністю виду "$\leq$", якщо пряма задача є задачею мінімізації. Якщо ж змінна x_j може приймати довільні дійсні значення, то j-те обмеження в системі (5) двоїстої задачі є рівнянням. Аналогічні зв'язки мають місце між обмеженнями (2) прямої задачі і змінними двоїстої задачі (4)-(6). Якщо i-те обмеження в системі (2) прямої задачі є нерівністю, то змінна двоїстої задачі $y_i \geq 0$. Коли ж i-те обмеження в системі (2) прямої задачі є рівнянням, то змінна y_i може приймати довільні дійсне значення.

Правило побудови двоїстої задачі

Пряма задача	Двоїста задача
Знайти **max f(x)**	Знайти **min f*(y)**
Матриця коефіцієнтів системи функціональних обмежень $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m},\\ j=\overline{1,n}}}$	Матриця коефіцієнтів системи функціональних обмежень $A^T=(a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n},\\ i=\overline{1,m}}}$
Вільні члени системи обмежень $b_i, i=\overline{1,m}$	Коефіцієнти цільової функції $b_i, i=\overline{1,m}$
Коефіцієнти цільової функції $c_j,\ j=\overline{1,n}$	Вільні члени системи обмежень $c_j,\ j=\overline{1,n}$
Функціональні обмеження: 1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ 2) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$ 3) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$	Прямі обмеження на змінні: 1) $y_i \ge 0$ 2) $y_i \le 0$ 3) $y_i \in R$
Прямі обмеження на змінні: 1) $x_j \ge 0$ 2) $x_j \le 0$ 3) $x_j \in R$	Функціональні обмеження: 1) $\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i \ge c_j$ 2) $\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i \le c_j$ 3) $\sum_{i=1}^{m} a_{ji}y_i = c_j$

Двоїсті задачі бувають ***симетричними*** і ***несиметричними***. В симетричній парі двоїстих задач обидві задачі є стандартними задачами ЛП, при цьому пряма задача, як правило, є задачею максимізації, а двоїста – задачею мінімізації, обмеження (2) прямої задачі є нерівностями виду “$\leq$”, а обмеження (5) двоїстої задачі є нерівностями виду “$\geq$”, змінні обох задач можуть приймати лише невід’ємні значення.

Приклад 1. Побудувати двоїсту задачу по відношенню до заданої задачі лінійного програмування:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \le 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}.$$

Розв'язування. Згідно правил побудови двоїстої задачі маємо

$$f^*(y) = 12y_1 + 17y_2 + 4y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1, \\ 4y_1 + y_2 - y_3 \ge 2, \\ -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge -1, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0, i = \overline{1,2},\ y_3 \in R.$$

Побудувати двоїсту задачу по відношенню до заданої задачі лінійного програмування:

а) $$f(x) = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}.$$

б) $$f(x) = 15x_1 + 12x_2 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ 2x_1 - 4x_2 \le 5, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,2}.$$

в) $$f(x) = 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7, \\ 12x_1 - 4x_2 + 2x_3 \le 6, \\ 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 \ge -7, \end{cases}$$
$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,3}.$$

Економічна інтерпретація задачі, двоїстої до задачі про використання ресурсів

Дамо економічну інтерпретацію задачі, двоїстої до задачі про використання ресурсів підприємства при плануванні виробництва з метою одержання максимальних прибутків. Нагадаємо, що математична модель цієї задачі є такою:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n},$$

де c_j – прибуток від реалізації одиниці j-го виду продукції (або ціна одиниці j-го виду продукції), a_{ij} – кількість одиниць i-го ресурсу, що йде на виготовлення j-го виду продукції, b_i – запаси одиниць i-го ресурсу, x_j – кількість одиниць j-го виду продукції, що планується виготовити.

Змістовна інтерпретація двоїстої задачі формулюється так: ***яку ціну призначити кожному виду ресурсу, щоб затрати на виготовлення одиниці кожного виду продукції були не менші, ніж прибуток від реалізації готової одиниці продукції, і водночас загальна вартість усіх ресурсів була б мінімальною***.

Ціни ресурсів $y_1, y_2, ..., y_m$ в економічній літературі мають різні назви, зокрема *неявна ціна* або *тіньова ціна ресурсів.*

2. Зв’язок між розв’язками прямої і двоїстої задач. Теореми двоїстості

Розглянемо пару двоїстих несиметричних задач:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max, \tag{7}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{8}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}. \tag{9}$$

Тоді двоїста задача має вигляд:

$$f^*(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min, \tag{10}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \ge c_n, \end{cases} \tag{11}$$

при цьому $y_i \in R^1,\ i = \overline{1,m}$.

Теорема 1 (перша теорема двоїстості). *Якщо одна з пари двоїстих задач* (7)-(9) *або* (10), (11) *має оптимальний план, то й інша задача має оптимальний план і при цьому має місце рівність* $f\max = f^*\min$.

Теорема 2 (друга теорема двоїстості). *План* $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ *прямої задачі* (7)-(9) *і план* $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$ *двоїстої задачі* (10), (11) *є оптимальними планами для цих задач тоді і тільки тоді, коли для кожного* $j\ (j = \overline{1,n})$ *має місце рівність*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j\right) x_j^* = 0. \qquad (12)$$

3. Застосування симплекс-методу для розв'язання двоїстої задачі

Розглянемо пару двоїстих задач лінійного програмування – (7)-(9) і (10), (11).

Припустимо, що за допомогою симплекс-методу знайдено оптимальний план $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ задачі (7)-(9) і цей план визначається базисом, який утворений векторами $P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{im}$.

Позначимо через $C_б = (c_{i1}, c_{i2}, ..., c_{im})$ вектор-рядок, який складено з коефіцієнтів при невідомих цільової функції (7), що відповідають базисним векторам $P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{im}$, а через P^{-1} – матрицю, обернену до матриці $P = (P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{im})$. Тоді має місце наступне твердження.

Теорема 4. *Якщо задача лінійного програмування в канонічній формі* (7)-(9) *має оптимальний план* $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$, *то*

$$Y^* = C_б P^{-1} \qquad (15)$$

є оптимальним планом двоїстої задачі (10), (11).

Зауваження. Матриця $P = (P_{i1}, P_{i2}, ..., P_{im})$ утворюється з відповідних вектор-стовпчиків обмежень (8) прямої задачі.

Приклад 3. Для пари двоїстих задач лінійного програмування з прикладу 1 знайти їх розв'язок за допомогою симплекс-методу.

Розв'язування. Знайдемо розв'язок прямої задачі методом штучного базису (табл. 1).

Для цього спочатку побудуємо розширену задачу для цієї задачі:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - Mx_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_6 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,6}.$$

Подальші обрахунки подано у таблиці 1.

Таблиця 1.

i	Базис	$c_б$	P_0	1	2	-1	0	0	$-M$
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	12	**-1**	**4**	-2	1	**0**	0
2	P_5	0	17	**1**	**1**	2	0	**1**	0
3	P_6	$-M$	4	**2**	**-1**	2	0	**0**	1
4			0	-1	-2	1	0	0	0
5			-4	-2	1	-2	0	0	0
1	P_4	0	14	0	7/2	-1	1	0	1/2
2	P_5	0	15	0	3/2	1	0	1	-1/2
3	P_1	1	2	1	-1/2	1	0	0	1/2
4			2	0	-5/2	2	0	0	1/2
1	P_2	2	**4**	0	1	-2/7	**2/7**	**0**	**1/7**
2	P_5	0	**9**	0	0	13/7	**-3/7**	**1**	**-5/7**
3	P_1	1	**4**	1	0	6/7	**1/7**	**0**	**4/7**
4			**12**	0	0	9/7	**5/7**	**0**	**6/7**

З таблиці 1 видно, що: пряма задача має розв'язок $X^* = (4, 4, 0)$, $f_{\max} = 12$,

$$C_б = (2, 0, 1),\ P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & 0 & 1/7 \\ -3/7 & 1 & -5/7 \\ 1/7 & 0 & 4/7 \end{pmatrix}.$$

Тоді двоїста задача має розв'язок

$$Y^* = C_б P^{-1} = (2, 0, 1)\begin{pmatrix} 2/7 & 0 & 1/7 \\ -3/7 & 1 & -5/7 \\ 1/7 & 0 & 4/7 \end{pmatrix} = (5/7, 0, 6/7),$$

$$f^*_{\min} = 12 \cdot (5/7) + 17 \cdot 0 + 4 \cdot (6/7) = 12.$$

Такий же самий оптимальний план $Y^* = (5/7, 0, 6/7)$ одержано в останній симплекс-таблиці в 4-ому рядку на місцях, що відповідають початковим базисним векторам P_4, P_5, P_6.

Задача.

Для заданої задачі лінійного програмування побудувати двоїсту задачу. Знайти розв’язок двоїстої задачі, використовуючи результати розв’язування прямої задачі симплекс-методом.

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$$
$$\begin{cases} 6x_1 + x_2 \le 22, \\ 3x_1 - 4x_2 \ge 5, \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,2}.$$

i	Базис	$c_б$	P_0	2	3	0	0	0	-M	-M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_3	0	22	6	1	1	0	0	0	0
2	P_6	-M	5	3	-4	0	-1	0	1	0
3	P_7	-M	3	**5**	2	0	0	-1	0	1
4			0	-2	-3	0	0	0	0	0
5			-8	-8	2	0	0	1	0	0

1	P_3	0	92/5	0	-7/5	1	0	6/5	0	-6/5
2	P_6	-M	16/5	0	-26/5	0	-1	**3/5**	1	-3/5
3	P_1	2	3/5	1	2/5	0	0	-1/5	0	1/5
4			6/5	0	-11/5	0	0	-2/5	0	2/5
5			-16/5	0	26/5	0	1	-3/5	0	8/5

i	Базис	$c_б$	P_0	2	3	0	0	0	-M	- M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_3	0	12	0	**9**	1	2	0	-2	0
2	P_5	0	16/3	0	-26/3	0	-5/3	1	5/3	-1
3	P_1	2	5/3	1	-4/3	0	-1/3	0	1/3	0
4			10/3	0	-17/3	0	-2/3	0	2/3	0

i	Базис	$c_б$	P_0	2	3	0	0	0	-M	- M
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_2	3	4/3	0	1	1/9	2/9	0	-2/9	0
2	P_5	0	152/9	0	0	26/27	7/27	1	-7/27	-1
3	P_1	2	31/9	1	0	4/27	-1/27	0	1/27	0
4			98/9	0	0	17/27	16/27	0	-16/27	0

$$f(y) := 22y_1 + 5y_2 + 3y_3$$

$$y_3 := 0$$

Given

$$6y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 2$$

$$y_1 - 4y_2 + 2y_3 \geq 3$$

$$y_1 \geq 0 \qquad y_2 \leq 0 \qquad y_3 \leq 0$$

$$p := \text{Minimize}(f, y) \qquad p = \begin{pmatrix} 0.63 \\ -0.593 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(p) = 10.889$$