



Теоретические методы исследования строительных конструкций, зданий и сооружений

Лекция 4.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математические модели в расчетах строительных объектов

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = R(x, y, z)$$

Общее квазигармоническое уравнение, описывающее

разнообразные физические явления в *неизотропной* среде.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + 2G\theta = 0$$

НДС элементов строительных конструкций.

(φ – функция напряжений);

- кручение упругого стержня некругового сечения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = R(x, y, z)$$

Задача теплопроводности, описывающая распространение тепла в трехмерной области.

$\varphi = T$ – температура, R - внутренний источник тепла или сток; $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ – коэффициенты теплопроводности.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \omega^2 \varphi = 0$$

(уравнение Гельмгольца).

Свободные и вынужденные колебания

φ – скалярная переменная, k_x, k_y, k_z – свойства среды в направлениях x, y и z соответственно, ω – частота колебаний



В зависимости от вида дополнительных условий:

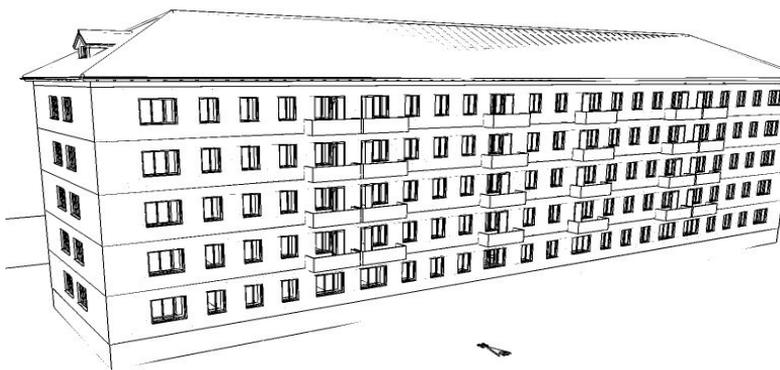
- **Задача Коши**, в которой одной из независимых переменных является *время*. При этом в *начальный момент времени* задаются некоторые условия относительно искомой непрерывной функции и ее производных – **начальные условия**. Граничные условия при этом не задаются, так как задача решается в неограниченном пространстве;
- **Краевая задача**, где решение ищется в некоторой области с определенными границами, на которых и задаются **граничные (краевые) условия** относительно искомой функции и ее производных;
- **Смешанная (нестационарная) краевая задача**, в которой ставятся как **граничные**, так **и начальные**

Численные методы решения краевых задач (*методы сеток*):

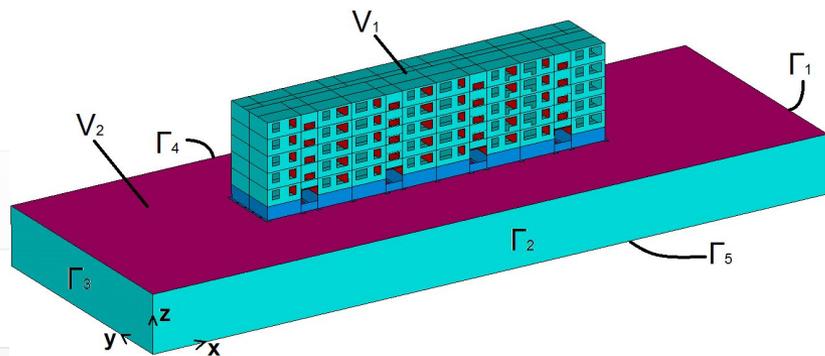
- метод конечных разностей (МКР);
- метод конечных элементов (МКЭ).

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ «ЗДАНИЕ-ФУНДАМЕНТ-ОСНОВАНИЕ»

Содержательная постановка задачи



Концептуальная постановка задачи



$$V = V_1 \cup V_2$$

Математическая постановка (краевая задача)

Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j}(\vec{x}) + \rho(\vec{x})F_i = 0, \vec{x} \in V$$

Геометрические уравнения Коши:

$$\varepsilon_{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\vec{x}) + u_{j,i}(\vec{x})), \vec{x} \in V$$

Определяющие соотношения:

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = F_{ij}(\varepsilon_{kl}(\vec{x})), \quad \vec{x} \in V$$

$\sigma_{ij} = \lambda(\bar{x})\theta\delta_{ij} + 2\mu(\bar{x})\varepsilon_{ij}$ изотроп. лин-упруг среда

Граничные условия:

$$\begin{cases} u_x(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \\ u_y(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \\ u_z(\vec{x}) = f(x), & \vec{x} \in (\Gamma_5) \\ \sigma_{ij}(\vec{x})n_j(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in (V_1 \cup V_2) \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{h}{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L}\right) + 1 \right].$$



Выбор вариационного принципа

- Выбор вариационного принципа определяет основные неизвестные функции, через которые впоследствии устанавливаются остальные неизвестные.
- В задачах МДТТ используются следующие вариационные принципы:
 - **принцип Лагранжа**, в соответствии с которым варьируются перемещения;
 - принцип Кастильяно (варьируются напряжения),
 - **принцип Рейсснера** (варьируются перемещения и напряжения),
 - принцип Ху-Вашицы (варьируются перемещения, напряжения и деформации).
- В практических расчетах чаще всего используется принцип Лагранжа.

Метод конечных элементов численный аналог краевой задачи

Сплошное тело разбивается на элементы ограниченной протяженности - *конечные элементы* (КЭ).

Эти элементы имеют общие узловые точки (или просто *узлы*) и в совокупности аппроксимируют форму области.

Вариационная задача – (потенциальная энергия системы)

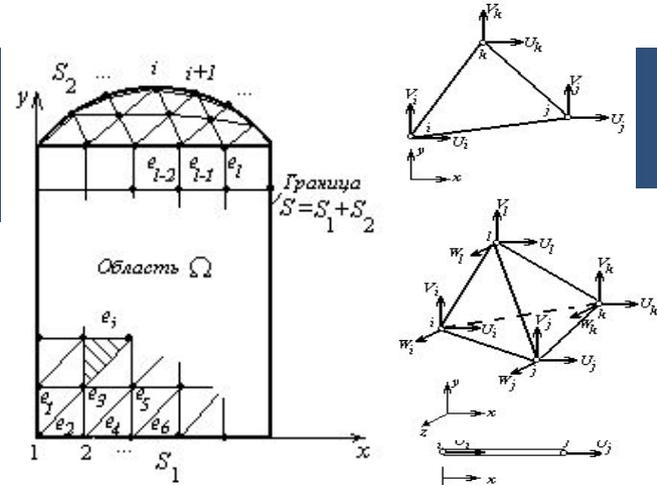
$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] d\Omega - \int_{\Omega} f(x, y) u d\Omega \quad \leftarrow u = f(x, y) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (K3)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^s [EJ \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + \left(\frac{du}{dx} \right)^2 Es] ds - \int_0^s [f(x)w + f_1(x)u] ds$$

$$u_i^e(\vec{x}) = u_n^e \varphi_n^e(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega_e$$

аппроксимирующая, базисная функция

Искомую непрерывную функцию, которая интересует нас в каждой конкретной задаче (перемещение) аппроксимируют полиномом, который подбирается так, чтобы обеспечить непрерывность этой функции в узлах каждого элемента.





Метод конечных элементов (МКЭ)

- Узловые значения искомой функции должны быть «отрегулированы» таким образом, чтобы обеспечивалось «наилучшее» приближение к истинным значениям функции.
- Это регулирование осуществляется путем *минимизации функционала*, связанного с физической сущностью задачи. В задачах строительной механики и теории упругости минимизируется *потенциальная энергия* системы.
- Важная особенность МКЭ - *каждый КЭ* можно считать *изолированным* от всей совокупности, и аппроксимировать функцию на этом элементе через ее значения в узлах независимо от того, какое место он займет в связанной модели и от поведения функции на других КЭ
- При рассмотрении задач распределения тепла или течения жидкости минимизируется функционал, связанный с соответствующей краевой задачей.
- Процесс минимизации функционала приводит к *системе линейных алгебраических уравнений* относительно узловых значений искомой функции

$$[\mathbf{K}]\{\delta\} = \{F\}$$

СЛАУ

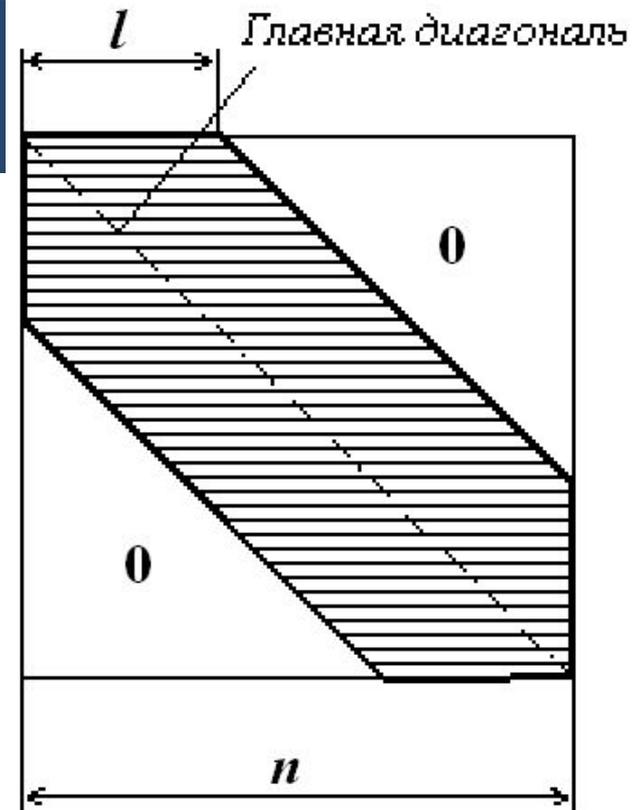
$$[\mathbf{K}]\{\delta\} = \{F\}$$

$[\mathbf{K}]$ Матрица жесткости

$\{\delta\}$ Вектор искомых перемещений узлов

$\{F\}$ Вектор внешних нагрузок

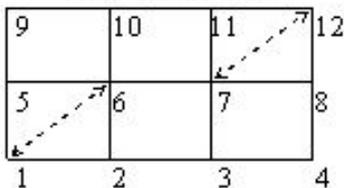
Решение системы алгебраических уравнений.
Используются стандартные программы, имеющиеся в математическом обеспечении ЭВМ, и специально подготовленные и лучшим образом учитывающие симметрию и структуру матрицы жесткости системы – редкозаполненность или ленточность.



$$l = (R+1)Q$$

$$n = N_{\text{узд}} Q$$

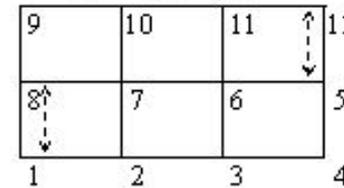
$R=5, l=12$



$R=4, l=10$



$R=7, l=16$



Решение СЛАУ и расчет НДС

Определение деформаций и напряжений. Определив узловые перемещения, по известным соотношениям теории упругости определяются деформации и напряжения:

Связь между деформациями и перемещениями в КЭ :

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\{\delta\} \quad (1) \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Физические уравнения:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon\} \quad (2)$$

ПНС

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}$$

ПДС

$$[\mathbf{D}] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \mu/(1-\mu) & 0 \\ \mu/(1-\mu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2(1-\mu) \end{bmatrix}$$



Этапы практической реализации МКЭ

1. **Переход от реальной конструкции (РК) к расчетной схеме (РС) (непрерывной механико-математической модели) -**
(статический или динамический расчет, линейный или нелинейный анализ, размерность задачи, геометрия, схема нагружения, условия закрепления, модель деформирования, критерии разрушения; возможные допущения)
2. **Переход от РС к дискретной (компьютерной) модели (КМ), приспособленной к возможностям конкретного ПК** *(выбор типов КЭ, дискретизация, связи, нагрузки...)* ;
3. **Проведение расчета, получение численных результатов (ЧР)**
(плохо обусловленные матрицы жесткости);
4. **Интерпретация и анализ результатов расчета, получение итоговой информации (ИИ).**

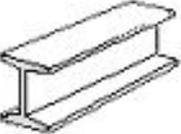
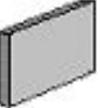
Каждый этап содержит элементы моделирования, а значит — вносит свою долю в накопление погрешностей при переходе от реальной конструкции к итоговой информации;

На каждом из этих этапов степень участия инженера-расчетчика и роль используемого программного обеспечения различны, равно как и различна их ответственность.

Дискретизация

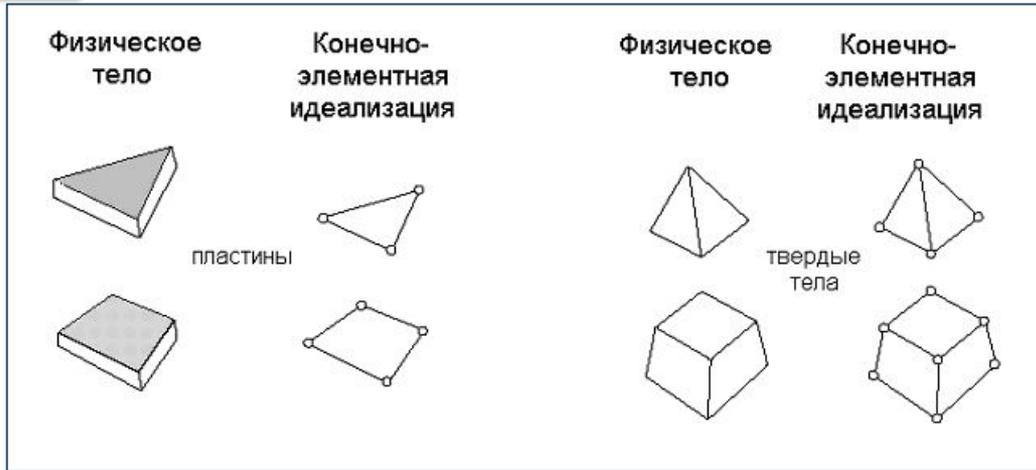
КЭ, используемые в механике

Простейшие конструкционные элементы

Компонента физической конструкции (структуры)	Имя математической модели	Конечно-элементная дискретизация
	стержень	
	балка	
	труба	
	брус средней толщины	

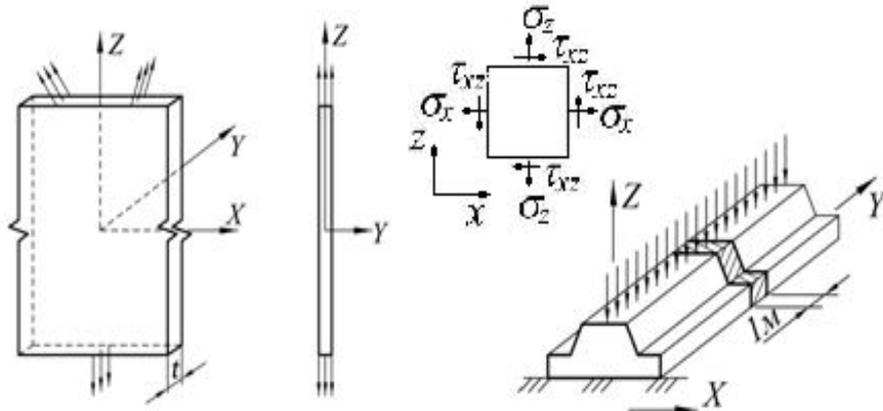
- ❖ К простейшим структурным элементам относятся элементы типа *стержень, балка, труба, брус, панель, работающая на сдвиг*.
- ❖ Уравнения, описывающие данные элементы, выводятся из теоретических положений *сопротивления материалов*, т.е. из упрощенных механических формулировок.
- ❖ Исторически, именно эти типы КЭ стали использоваться п.ервыми

Континуальные КЭ



Континуальные элементы – это конечные объемы или площади сплошной среды (континуума): *пластины, оболочки, осесимметричные элементы, трехмерные твердотельные элементы.*

Уравнения, описывающие данный тип КЭ, получаются из общих соотношений механики сплошной среды (ТУ, ТПЛ).

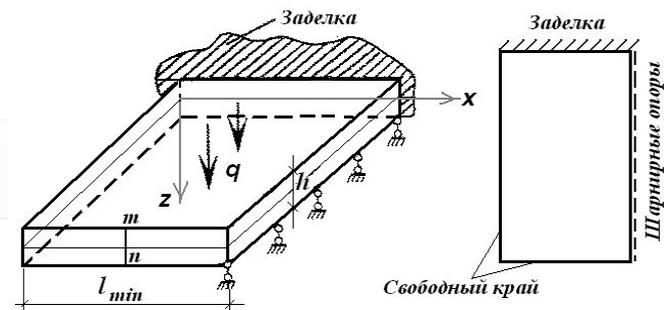


а)

ПНС

б)

ПДС



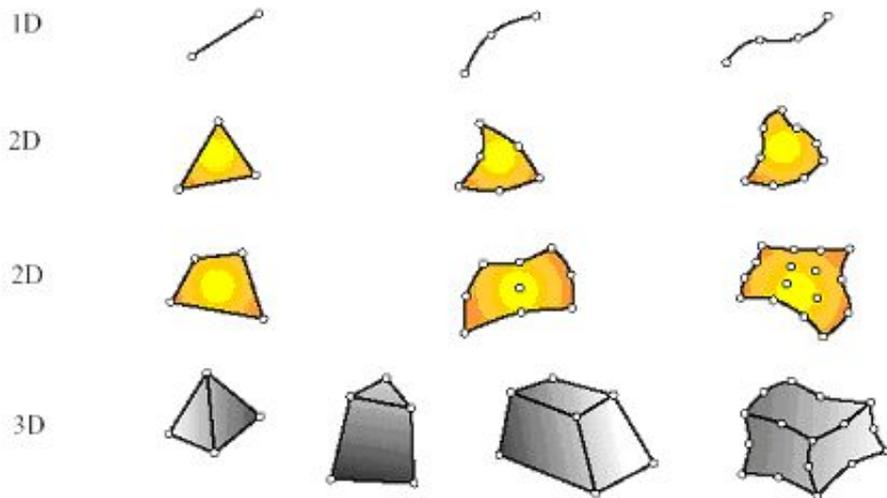
в)

Специальные элементы

- ❖ Специальные элементы обладают свойствами как конструкционных, так и континуальных элементов.
- ❖ Они выводятся из уравнений механики сплошной среды, но включают в себя некоторые особенности непосредственно связанные с физическими особенностями решаемых задач, например: элемент с трещиной - для задач механики разрушения; многослойная панель; бесконечные и полубесконечные элементы; контактные элементы, абсолютно твердые элементы.



Атрибуты КЭ



2. Узловые точки

предназначены для описания геометрии КЭ и для задания физических степеней свободы (числа неизвестных функций). Наличие дополнительных узлов связано с порядком аппроксимирующей функции. КЭ, имеющие только угловые узлы (линейные), обеспечивают *линейную интерполяцию* геометрии и функций. КЭ, имеющие дополнительные узлы - *квадратичную* или даже *кубичную* интерполяцию.

1. Собственная размерность

В зависимости от размерности задачи КЭ могут описываться 1, 2 или 3 координатами - собственная размерность КЭ.

В динамическом анализе *время* - дополнительная размерность.

В расчетах используются спец. **КЭ с нулевой размерностью**, (точечные массы, пружины)

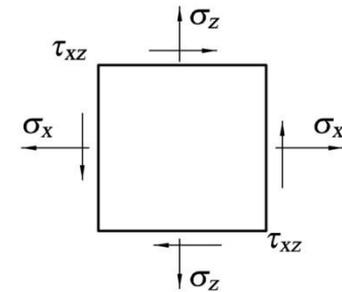
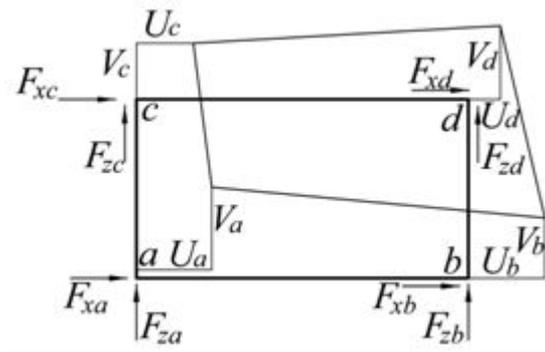
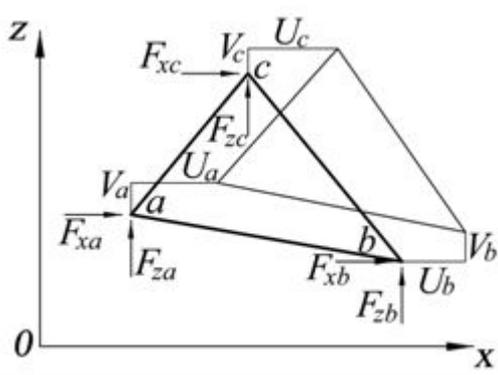
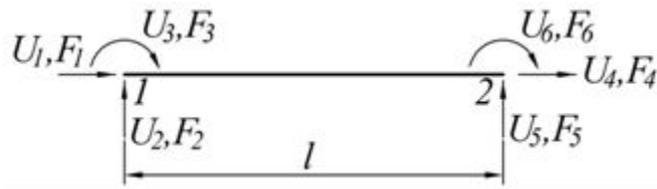
3. Степени свободы

определяют физическое состояние или физическое поле, которое описывает данный КЭ.

Благодаря общим степеням свободы в соседних элементах, осуществляется сборка модели и формирование глобальной системы КЭ уравнений.

В качестве степеней свободы могут фигурировать как узловые значения неизвестной функции, так и ее производные по пространственным координатам в узлах. В 1-м случае - *лагранжевы* элементы во 2-м - *эрмитовы* элементы.

Степени свободы плоских КЭ



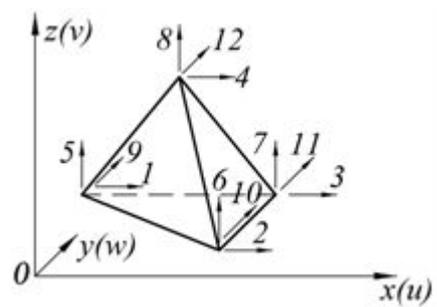
Компоненты напряжений
в точках

Плоские КЭ (а–стержень общего вида, б–треугольник, в–прямоугольник), степени свободы (возможные перемещения) и узловые силы в их узлах и вершинах

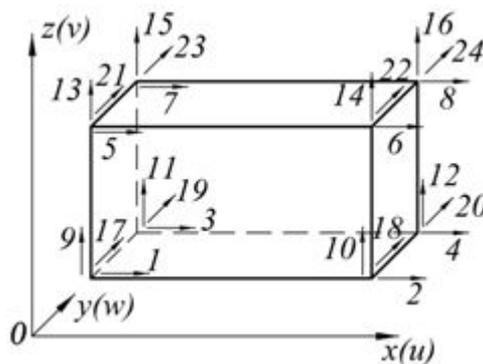
4. Узловые силы.

Система узловых сил полностью соответствует степеням свободы элемента и выражается с помощью глобального вектора узловых сил.

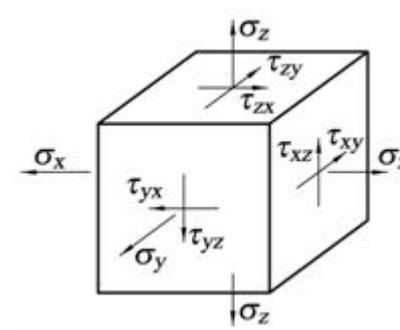
Степени свободы пространственных КЭ



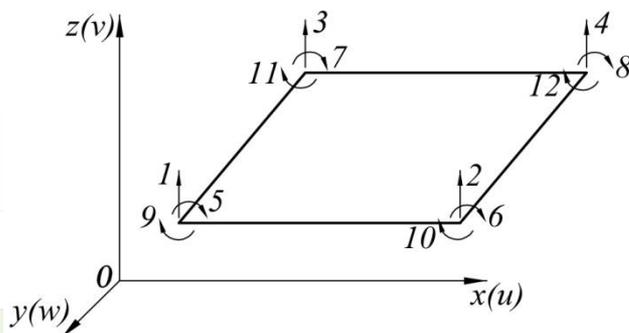
Тетраэдр, пространственное напряженное состояние



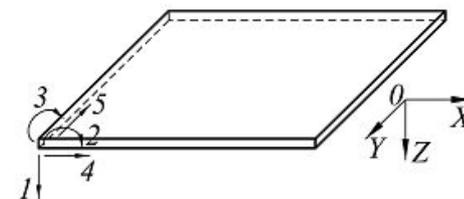
Параллелепипед, пространственное напряженное состояние



Компоненты напряжений в точках

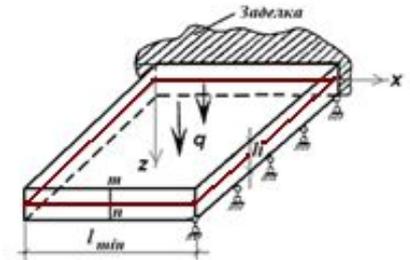


Прямоугольный КЭ плиты



ПЛИТА (пластина)

- ❖ Пластина, нагруженная перпендикулярно её плоскости и работающая преимущественно на изгиб из собственной плоскости, называется **плитой**.
- ❖ При нагружении плита изгибается, и ее срединная плоскость превращается в поверхность.
- ❖ Выбор расчетной модели плиты зависит от соотношения размеров $\frac{h}{l_{\min}}$ и от **жесткости** плиты.



- ❖ Плита считается **тонкой**, если ее толщина меньше других размеров ~ в 5 раз.
- ❖ **Тонкая плита**, у которой максимальный прогиб под действием поперечной нагрузки не превышает четверть её толщины, называется **жесткой** –

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБА ПЛИТ.

Техническая теория изгиба плит.

Допущения технической теории изгиба плит:

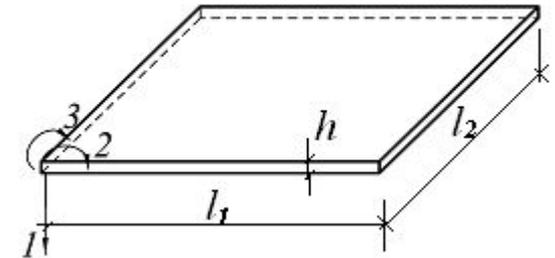
1 — прямолинейные элементы, нормальные к срединной плоскости, остаются после деформации прямыми, нормальными деформированной срединной поверхности (*гипотеза прямых нормалей*);

2 — считается, что пластина несжимаема по толщине, или слои, параллельные срединной поверхности, не давят друг на друга;

3 — Срединная поверхность при изгибе не деформируется в своей плоскости при $z = 0$, т.е. деформации при $z = 0$ отсутствуют.

Эти допущения позволяют выразить перемещения всех точек плиты через поперечные перемещения срединной плоскости.

Расчет пластин с использованием этих допущений составляет основу *технической теории изгиба плит*

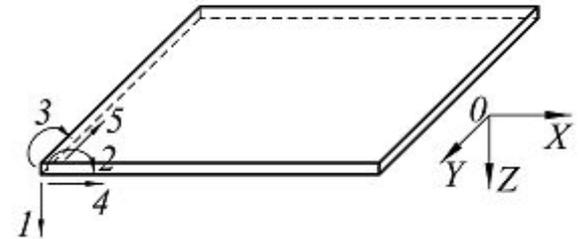


4-угольный
изгибаемый КЭ с
тремя степенями
свободы в узле

Напряжённое состояние такого КЭ описывается изгибающими моментами M_x , M_y и поперечными силами Q_x , Q_y . Изгибаемые плитные КЭ не воспринимают продольные силы.

Гибкая пластина

- ❖ **Тонкая пластина**, у которой максимальный прогиб под действием поперечной нагрузки превышает четверть её толщины, называется **гибкой пластиной**.
- ❖ В ней нужно учитывать напряжения, равномерно распределенные по толщине пластинки (мембранные).
- ❖ Такие пластинчатые КЭ имеют в каждом узле по три осевых и два угловых перемещения относительно осей X и Y .
- ❖ В расчётах пластинчатых систем кроме моментов и поперечных сил определяются нормальные и касательные напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} в плоскости XOY



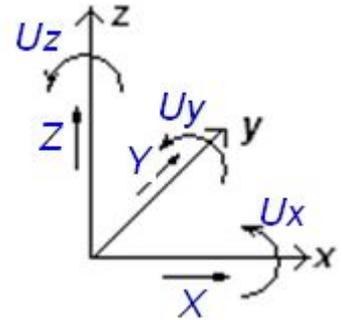
4-угольный изгибаемый пластинчатый КЭ с пятью степенями свободы в узле

В более толстых плитах (при $\frac{h}{l_{\min}} > 5$) сдвигающие напряжения в вертикальных сечениях плиты приводят к существенному искажению нормалей к срединной поверхности при деформировании плиты. Поэтому толстые плиты рассчитываются уточнёнными методами без использования гипотез технической теории изгиба пластин

Признак системы

Сокращенный набор степеней свободы (**неизвестных перемещений**)

- а) *плоская ферма* или *стена* (балка-стенка), размещенная в плоскости XOZ – учитываются только перемещения вдоль осей X и Z ;
- б) *плоская рама*, расположенная в плоскости XOZ – учитываются перемещения вдоль осей X и Z и угол поворота U_Y ;
- в) *плита* или *балочный ригель* в плоскости XOY – учитываются перемещения вдоль оси Z и углы поворота U_X , U_Y ;
- г) *пространственная ферма* – исключаются все углы поворота, учитываются перемещения X , Y , Z .
- д) *пространственная система* – все 6 степеней свободы





Атрибуты КЭ

4. Узловые силы. Система узловых сил полностью соответствует степеням свободы элемента и выражается с помощью глобального вектора узловых сил.

5. Определяющие соотношения (физические уравнения). Для конечных элементов, используемых в механических расчетах, определяющее соотношение задает поведение материала, из которого изготовлена конструкция. Например, закон Гука, связывающий тензор деформаций и тензор напряжений в точке. Для линейного упругого стержневого элемента достаточно задать один модуль Юнга E и один коэффициент температурного расширения.

6. Свойства сечения. К свойствам сечения относятся площади и моменты инерции одномерных и двумерных конечных элементов, таких как балки, стержни, пластины. В эту группу также входит толщина пластин и оболочек. При построении конечного элемента свойства сечений считаются заданными и входят в результирующую матрицу жесткости элемента