# Дискретная математика

## Лекция 3. Булевы константы и вектора

# Булевы константы

- ***Булевыми константами*** называются символы: 0 и 1.
- Символы 0 и 1 могут интерпретироваться как числа: ноль и единица, знаки: минус и плюс, потенциалы: низкий и высокий, высказывания: ложь и истина, и многое другое.
- ***Булевым множеством B*** называется множество булевых констант, т.е. $B = \{ 0, 1 \}$.

# Булев вектор

- ***Булев вектор*** — это последовательность конечного числа булевых констант, называемых ***компонентами*** булева вектора.
- Договоримся обозначать булевы векторы *греческими буквами,* а компоненты вектора — *латинскими* с указанием *номеров компонент*.
- **Примеры.** $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n = 010101$, $\beta = b_1 b_2 \ldots b_n = 11110000$.
- ***Длиной булева вектора*** назовем количество его компонент, а ***весом вектора*** — количество компонент, равных единице.
- **Пример.** Длина булева вектора

# **Теорема** о числе булевых векторов

- **Теорема.** Число различных булевых векторов длины $n$ равно $2^n$.
- **Доказательство** (методом математической индукции по длине булева вектора).
- <u>База индукции</u>. При $n = 1$ утверждение выполняется (число различных булевых векторов длины 1 равно двум: это 0 и 1).
- <u>Предположение</u>. Пусть число различных булевых векторов длины $n$ равно $2^n$.
- <u>Вывод</u>. К булевым векторам длины $n$ добавим $n+1$- ю компоненту, присвоив ей сперва значение 0 (получим $2^n$ векторов длины $n+1$), затем — значение 1 (получим еще $2^n$ векторов длины $n+1$), т.е. всего $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ различных векторов длины $n+1$. ЧТД.

# Представление булевыми векторами подмножеств

- Пусть заданы множество $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ и подмножество $A \subseteq M$. Построим *булев вектор* $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$, *представляющий подмножество* $A$, по следующему правилу: зафиксируем порядок элементов в множестве $M$ и положим
- $$a_i = \begin{cases} 1, \text{если } m_i \in A; \\ 0, \text{если } m_i \notin A. \end{cases}$$
- **Примеры.** В множестве $M = \{2, 6, 4, 7, 8\}$ булев вектор $\alpha = 11101$ выделяет подмножество четных чисел,
  булев вектор $\beta = 10010$ выделяет подмножество простых чисел.

# Пара булевых векторов

- Рассмотрим булевы векторы $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$ и $\beta = b_1 b_2 \ldots b_n$.
- Говорят, что булевы векторы α и β ***ортогональны по i-й компоненте***, если $a_i \neq b_i$.
- **Пример.** Булевы векторы α = 1010 и β = 1000 ортогональны по 3-й компоненте.
- ***Расстоянием между булевыми векторами*** (***расстоянием по Хэммингу***) называют число ортогональных компонент в данной паре векторов.
- **Пример**. Расстояние по Хэммингу между булевыми векторами α = 1010 и β = 1001 равно двум.
- Булевы векторы называются ***соседними*** (***соседями***), если они ортогональны по одной и только одной компоненте.
- **Пример.** Булевы векторы α = 1010 и β = 1000 соседние.
- Булевы векторы называются ***противоположными*** (***антиподами***), если они ортогональны по всем компонентам, т.е. расстояние по Хэммингу между булевыми векторами равно их длине.
- **Пример.** Булевы векторы α = 1010 и β = 0101 противоположные.

# Пара булевых векторов

- Говорят, что *булев вектор* $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$ ***предшествует*** *булеву вектору* $\beta = b_1 b_2 \ldots b_n$ (и это отношение обозначают $\alpha \preccurlyeq \beta$), если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется условие: $a_i \leq b_i$. В этом случае также говорят, что ***булев вектор*** $\beta$ ***следует за булевым вектором*** $\alpha$, булев вектор $\alpha$ называют ***предшественником***, а $\beta$ — ***последователем***.
- **Пример.** $\alpha = 1010$, $\beta = 1110$: $\alpha \preccurlyeq \beta$.

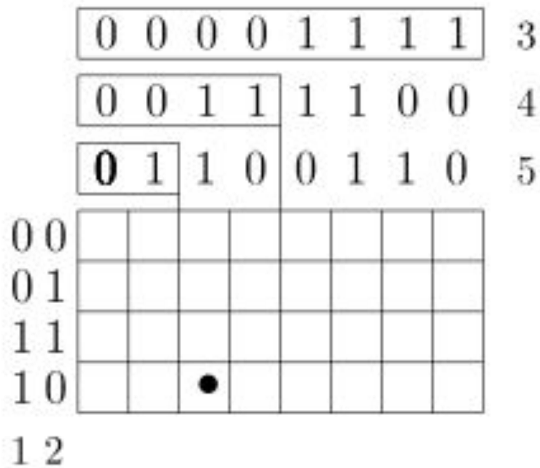
- **Определение**. Булевы векторы $\alpha$ и $\beta$ называются ***сравнимыми булевыми векторами***, если $\alpha \preccurlyeq \beta$ или $\beta \preccurlyeq \alpha$ (в противном случае говорят, что они ***несравнимы***).
- **Примеры**. Булевы векторы $\alpha = 1011$, $\beta = 1010$ — сравнимы, а $\alpha = 1011$, $\beta = 0111$ — несравнимы.

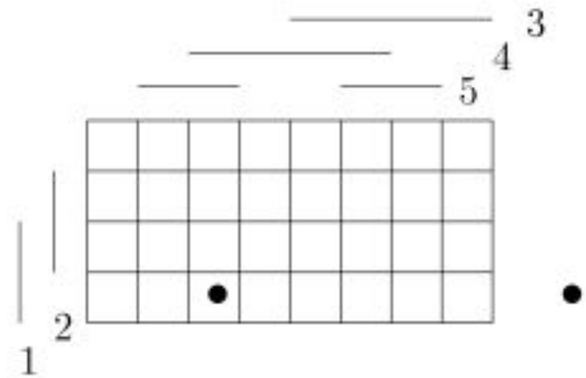
# Булево пространство и способы его представления

- ***Булевым пространством*** $B^n$ ***размерности*** $n$ называется множество всех булевых векторов длины $n$, расстояние между которыми вычисляется по Хэммингу.
- **Примеры.** $B^1 = \{0,1\} = B$ , $B^2 = \{00,01,10,11\}$.
- **Способы представления:**
- 1) ***Явным перечислением векторов.***
- **Пример.** $B^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.
- 2) ***Матрицей в коде Грея.*** Булево пространство размерности $n$ представляется матрицей, состоящей из $2^a$ строк и $2^b$ столбцов, где $a$ и $b$ — целые числа, такие что $a + b = n$. Строкам матрицы поставлены в соответствие булевы векторы длины $a$ (их называют ***кодами строк***), а столбцам — булевы векторы длины $b$

# Пример матрицы Грея

- Пусть $n = 5$ . На левой матрице показан процесс построения кодов столбцов. Выделенная клетка задает булев вектор 10011.




- Договоримся изображать коды условно: 1 – черточкой, 0 – ее отсутствием. Такой код более нагляден и быстрее рисуется.
- Код Грея обладает свойством симметрии. Места смены значений компонент называются ***осями симметрии*** компонент.
- Каждая ось имеет свою ***зону симметрии***, т.е. область, на которую распространяется ее действие:
- зоной симметрии осей младших компонент строк и столбцов (в примере: первой и третьей) является вся матрица;
- зонами симметрии осей следующих компонент (в примере: второй и четвертой) являются половины матрицы;
- и так далее (с каждым разом размер зоны уменьшается в два раза).

# Интервал в булевом пространстве

- Пусть задана пара векторов: $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$ и $\beta = b_1 b_2 \ldots b_n$.
- ***Интервалом*** $\boldsymbol{I(\alpha,\beta)}$ в булевом пространстве $B^n$, заданным парой булевых векторов $\alpha$ и $\beta$, таких что $\alpha \preccurlyeq \beta$, называется множество всех булевых векторов $\gamma$ длины $n$, удовлетворяющих условию $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, т.е. $I(\alpha,\beta) = \{\gamma \in B^n / \alpha \preccurlyeq \gamma \preccurlyeq \beta\}$.
- **Пример.** $I(000,011) = \{000, 001, 010, 011\}$.
- Булевы векторы $\alpha$ и $\beta$, задающие интервал $I(\alpha,\beta)$, называются ***границами интервала***, вектор $\alpha$ — ***наименьшим элементом интервала***, а $\beta$ — ***наибольшим.***
- Компоненты, по которым все булевы векторы интервала совпадают, называются ***внешними компонентами интервала***, остальные — ***внутренними***. Количество внешних компонент называется ***рангом интервала*** ($r$), а количество внутренних — его ***размерностью*** ($s$).
- **Пример.** $I(000,011) = \{000, 001, 010, 011\}$, первая компонента —внешняя, вторая и третья — внутренние, ранг $r = 1$, размерность $s = 2$.
- Введем сжатое представление интервала ***троичным вектором***, в котором 0 и 1 зададут значения внешних компонент, а черточка отметит внутренние компоненты.
- **Примеры.** $I(000,101)$ = - 0 - .

# Крайние случаи. Мощность интервала

- **Крайние случаи:**
- $I$ (010, 010) = 010, границы интервала совпадают, он состоит из одного булева вектора, ранг $r = 3$, размерность $s = 0$;
- $I$ (000, 111) = - - - , интервал — все булево пространство $B^3$, ранг $r = 0$, размерность $s = 3$.

- **Утверждение** о мощности интервала**.** Мощность интервала размерности $s$ равна $2^s$.
- **Доказательство.** Так как интервал состоит из булевых векторов со всевозможными комбинациями нулей и единиц во внутренних компонентах, а внутренние компоненты образуют булев вектор длины $s$, то число таких векторов равно $2^s$.

- **Примеры.** Мощность интервала -0- = {000, 001, 100, 101} равна $2^2 = 4$, интервала1-1 = {101, 111 } равна $2^1 = 2$, интервала 101 равна $2^0 = 1$.

# Алгоритм распознавания интервала

- Задано множество $A$ булевых векторов длины $n$. Требуется определить, образует ли множество $A$ интервал и, если образует, найти его границы: $\alpha$, $\beta$ (алгоритм основан на утверждении о мощности интервала и на теореме о числе векторов).
- **Шаг 1:** если мощность множества $A$ не является целой степенью двойки, т.е.
- $|A| \neq 2^c$, где $c$ — целое, то $A$ — не интервал, идем на шаг 3.
- **Шаг 2:** считаем число $s$ несовпадающих компонент в векторах множества $A$, т.е. число компонент, претендующих быть внутренними;

  если $s \neq c$,

  то $A$ — не интервал, идем на шаг 3;

  иначе $A$ — интервал, $s$ — его размерность, $r = n - s$ — ранг;

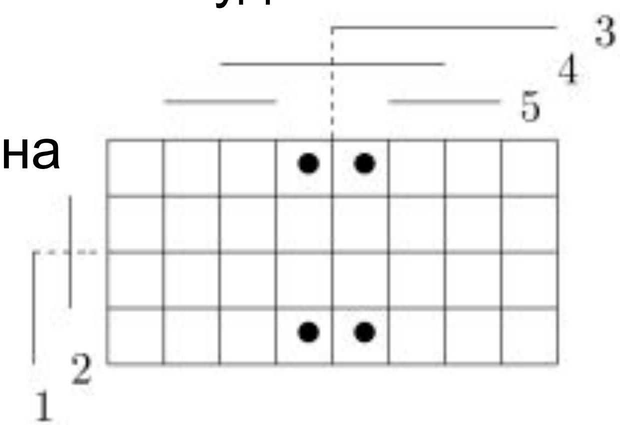
  вектор минимального веса (из всех векторов множества $A$) является наименьшим элементом интервала ($\alpha$), а вектор максимального веса — его наибольшим элементом ($\beta$), т.е. $\alpha$ и $\beta$ — границы интервала.
- **Шаг 3:** конец.
- **Примеры.** $A = \{010, 011, 001\}$: множество не образует интервал, так как его мощность, равная 3, целой степенью двойки не является.
- $A = \{010, 011, 001, 100\}$: множество не образует интервал — мощность является целой степенью двойки, но показатель ($c = 2$) не совпадает с количеством компонент, претендующих быть внутренними ($s = 3$).
- $A = \{010, 011, 001, 000\}$: множество образует интервал, так как его мощность является целой степенью двойки ($c = 2$), и эта степень совпадает с количеством компонент, претендующих быть внутренними ($s = 2$), $A = I(000, 011) = 0 - -$.

# Соседние интервалы

- Интервалы $I_1$, $I_2$ называют ***соседними интервалами*** (***соседями***), если они совпадают по номерам внешних компонент, но различаются по значению одной из внешних компонент. Ее называют ***ортогональной*** *компонентой*, а интервалы $I_1$, $I_2$ — ***соседями по данной компоненте***.
- **Примеры.** Интервалы $I_1$ = 11- и $I_2$ = 01- — соседи (по первой компоненте);
  интервалы $I_1$ = 01- и $I_2$ = 10- — не соседи (различаются по двум внешним компонентам);
  интервалы $I_1$ = 01- и $I_2$ = 1-0 — не соседи (различаются по номерам внешних компонент).
- **Утверждение** о соседних интервалах. Два соседних интервала ранга $r$ (размерности $s$) не пересекаются, но, объединяясь, образуют интервал ранга $r$-1 (размерности $s$+1).
- Операцию объединения двух интервалов $I_1$ и $I_2$, соседних по $i$-й компоненте, назовем ***склеиванием*** интервалов, а результат их склеивания ($I = I_1 \cup I_2$) — ***расширением*** интервалов $I_1$ и $I_2$ по $i$-й компоненте.
- **Пример.** Соседние интервалы $I_1$ = 11-, $I_2$ = 01- ранга 2 склеиваются, образуя интервал $I$ = -1- ранга 1 (он является расширением интервалов $I_1$ и $I_2$ по первой компоненте).

# Способы представления интервалов

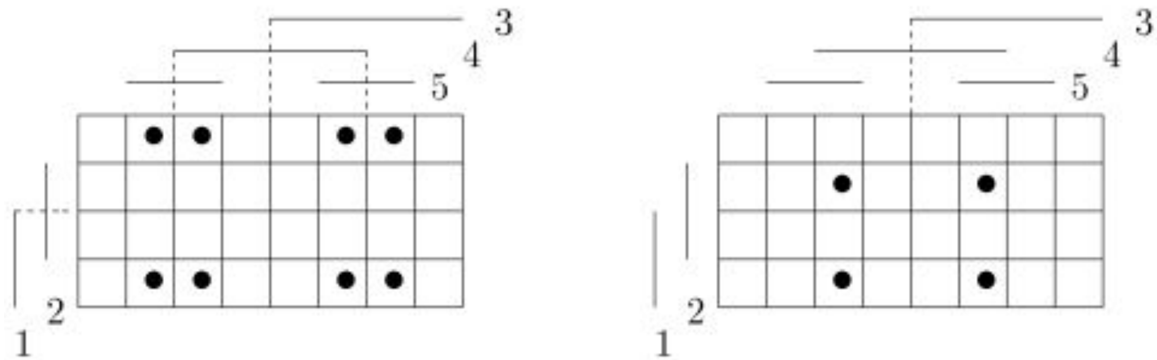
- Мы уже пользовались тремя способами представления интервалов.
- 1) ***Границами*** интервала.
- 2) ***Явным перечислением*** всех векторов, образующих интервал.
- 3) ***Троичным вектором.***
- 4) ***Матрица Грея.***
- Булево пространство представляется матрицей, а все булевы векторы (клетки), образующие интервал, выделяются.
- Чтобы нарисовать интервал, достаточно отметить все строки и все столбцы, коды которых совпадают с заданным интервалом по внешним компонентам — на их пересечении и будет лежать интервал.
- **Пример.** *I* = - 0-10 : отмечаем строки, в кодах которых вторая компонента равна 0 (верхняя и нижняя строки), и столбцы, в кодах которых четвертая компонента равна1, а пятая — 0 (два средних столбца ), — на их пересечении и лежит заданный интервал.



# Алгоритм распознавания интервала на матрице Грея

- **Шаг 1:** если количество клеток заданного множества $A$ не является целой степень ($c$) двойки, то $A$ — не интервал, идем на шаг 3.
- **Шаг 2:** если множество клеток ($A$) лежит симметрично относительно $c$ осей симметрии, т.е. его можно "разрезать" осями симметрии на половины, затем каждую половину на четвертины, затем любую четвертину на осьмушки и так далее до тех пор, пока множество $A$ не "разрежется" на отдельные клетки, то $A$ — интервал, идем на шаг 3. иначе $A$ — не интервал.
- **Шаг 3:** конец.

# Примеры




- На левой матрице интервал $I$ = -0 - - 1 (8 клеток и 3 оси симметрии) , на правой - не интервал (4 клетки, но одна ось симметрии).
- **Частные случаи**
- Очевидно, что интервалами являются следующие множества:
- каждая отдельная клетка,
- любая пара симметричных клеток, в том числе, рядом лежащих,
- любая строка и любой столбец,
- любая пара симметричных строк или столбцов, в том числе, рядом лежащих,
- любой "квадрат" размером $2 \times 2$,
- любая половина или четвертина матрицы,
- четверка клеток, лежащих в углах матрицы.

# Задачи

**1.** Перечислить булевы векторы, образующие следующие интервалы: $I_1(0001, 1001)$, $I_2(01010, 11011)$, $I_3(0000, 1100)$, $I_4(000, 111)$. Задать эти интервалы на матрице Грея и вычислить их ранги.

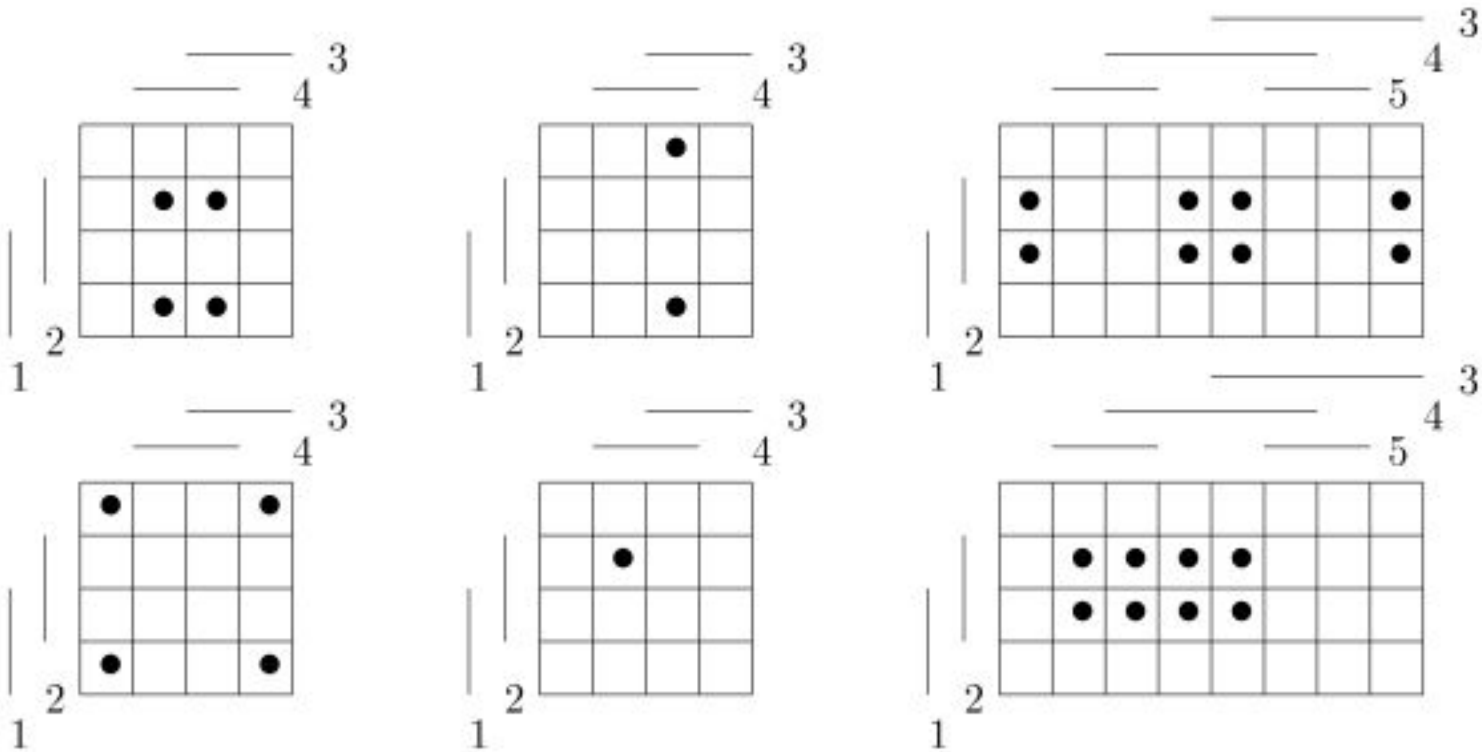
**2.** Перечислить все интервалы ранга 1 в булевом пространстве $\mathcal{B}^3$, представив их троичными векторами.

**3.** Перечислить все интервалы в пространстве $\mathcal{B}^5$, первая и четвертая компоненты которых являются внешними, а все остальные – внутренними. Представить интервалы на матрице Грея.

**4.** Являются ли следующие множества булевых векторов интервалами? Если да, то задать их троичными векторами.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A_1 =$ 00000 | $A_2 =$ 01100 | $A_3 =$ 0101 | $A_4 =$ 0001 | $A_5 =$ 10011 |
| 00001 | 01101 | 1011 | 0101 | |
| 01000 | 00100 | 1101 | | |
| | 00101 | 0001 | | |
| | 10101 | | | |
| | 10100 | | | |
| | 11100 | | | |
| | 11101 | | | |

**5.** Образуют ли интервал векторы, выделенные на матрице Грея? Если да, то представить интервал троичным вектором и найти его границы.



**6.** Найти на матрице Грея все интервалы, соседние для интервала $I = 1\,0 - 0 -$.