ЛЕКЦІЯ 3
ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇЇ РОЗВ‘ЯЗУВАННЯ

План

3.1 Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування.

3.2 Форми запису задач лінійного програмування.

3.3 Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування.

3.4 Основні властивості розв'язків задачі лінійного програмування.

3.5 Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування.

Загальна економіко-математична модель задачі лінійного програмування

$$\max(\min)Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (3.1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m. \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \qquad (3.3)$$

Допустимий розв'язок (план) задачі лінійного програмування

$$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Оптимальний розв'язок (план) задачі лінійного програмування

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \le b_i$$

b_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+ a_{in}\, x_n + x_{n+1} = b_i$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k$$

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k$$

$(x_{n+1} \ge 0, x_{n+2} \ge 0)$

Форми запису задач лінійного програмування

(3.4)

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \, (i = 1, 2, \ldots, m);$$

$$x_j \geq 0 \;\; (j = 1, 2, \ldots, n).$$

$$\max(\min)\ Z = CX \qquad (3.5)$$

$$AX = A_0$$

$$X \geq 0$$

$$A = \{a_{ij}\} = \begin{pmatrix} a_{11},\ a_{12},\ \ldots,\ a_{1n} \\ a_{21}, a_{22},\ \ldots, a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1},\ a_{m2},\ \ldots, a_{mn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

$$\max(\min) Z = CX \qquad (3.6)$$

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = A_0$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Геометрична інтерпретація задачі лінійного програмування

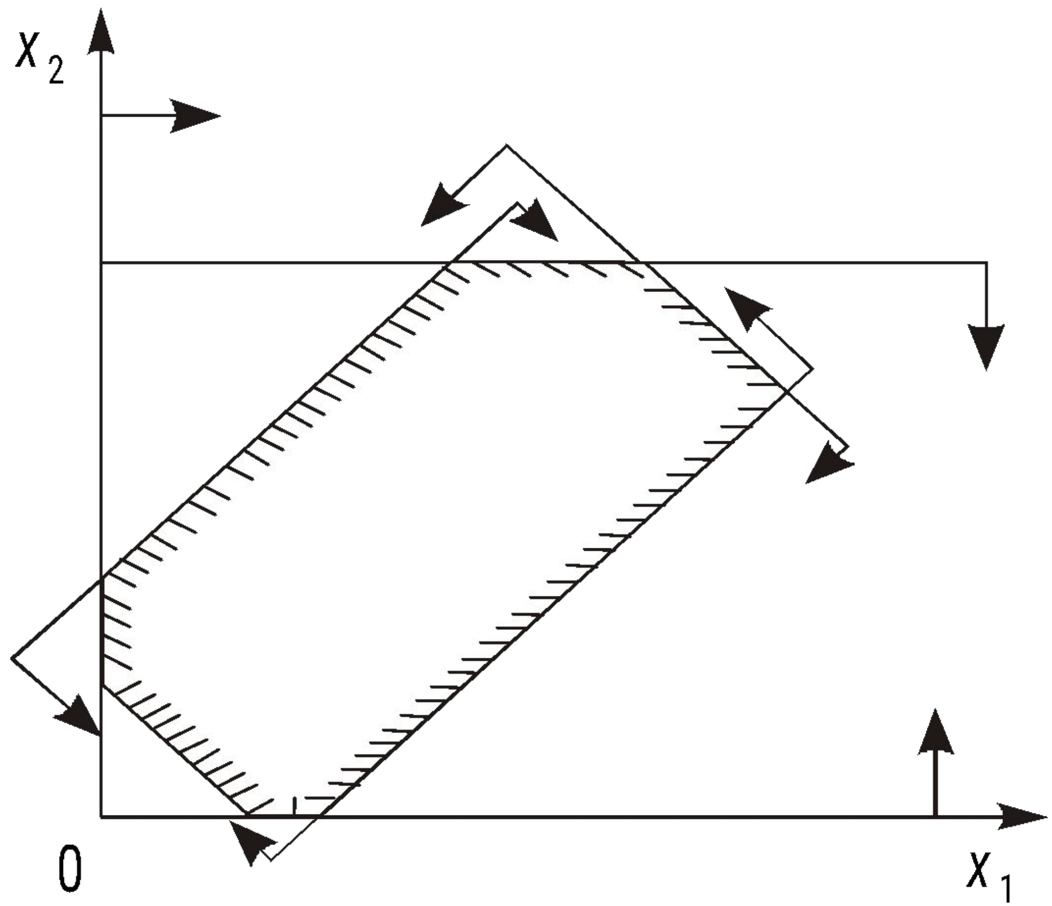
x_1Ox_2

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases} \tag{3.7}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i=1,2, …, m)

Багатокутник розв'язків, або область допустимих планів (розв'язків) задачі лінійного програмування



$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i \; (i = 1, 2, \ldots, m)$

$x_j = 0 \; (j = 1, 2, 3)$

$x_1, x_2, \ldots x_n$

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$

$(i = 1, 2, \ldots, m)$

$x_j = 0 \; (j=1, 2, 3, \ldots, n)$

Таблиця 3.1 – Показники вирощування сільськогосподарських культур

Показник (із розрахунку на 1 га)	Озима пшениця	Цукрові буряки	Наявний ресурс
Затрати праці, людино-днів	5	25	270
Затрати праці механізаторів, людино-днів	2	8	80
Урожайність, тонн	3,5	40	—
Прибуток, тис. грн	0,7	1	—

Задача лінійного програмування має такий вигляд:

$$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2 \qquad (3.8)$$

за умов:

$$x_1 + x_2 \le 20; \qquad (3.9)$$

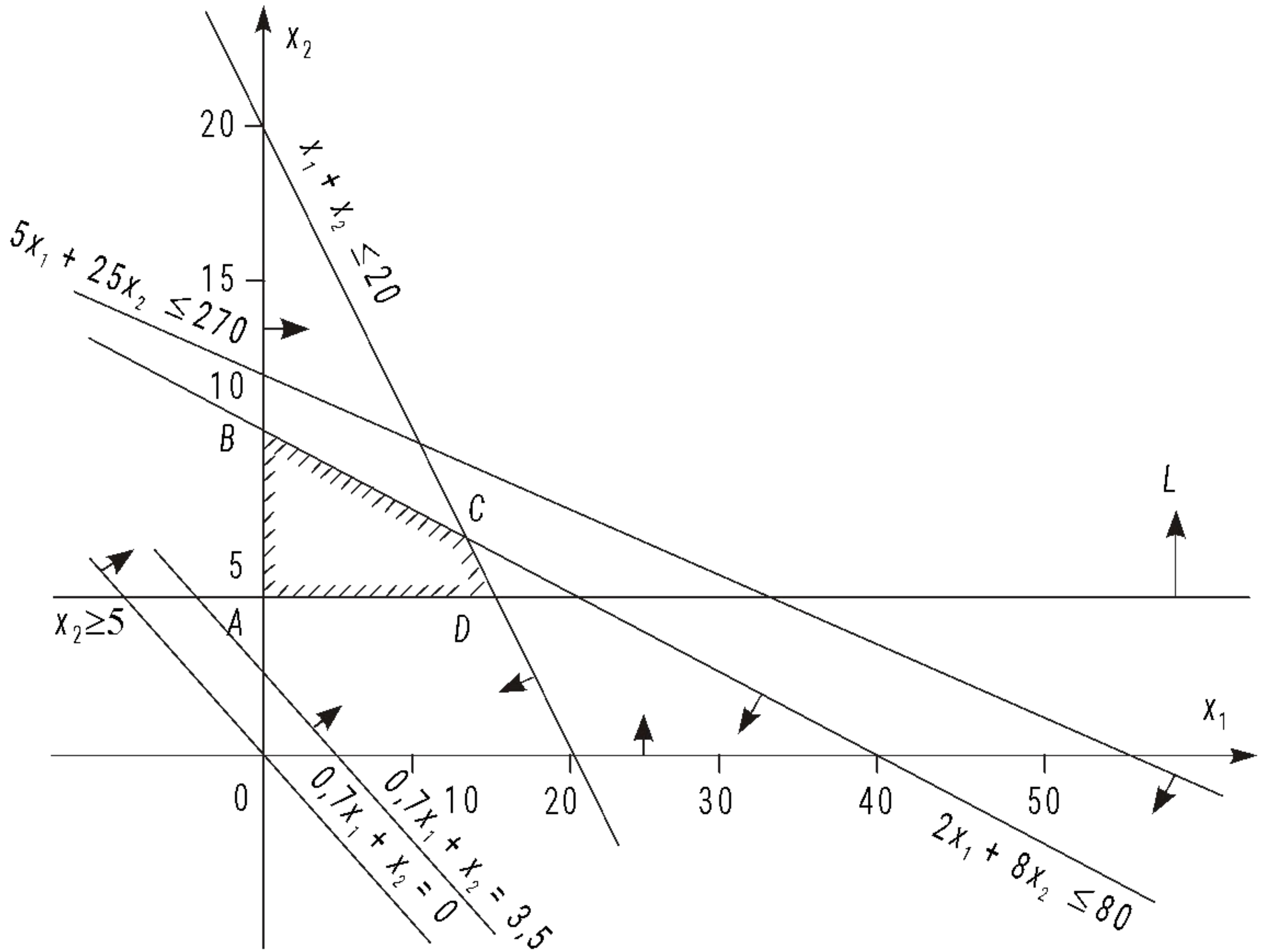
$$5x_1 + 25x_2 \le 270; \qquad (3.10)$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 80; \qquad (3.11)$$

$$x_2 \ge 5; \qquad (3.12)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \qquad (3.13)$$

Область допустимих розв’язків задачі



Основні властивості розв’язків задачі лінійного програмування

Властивість 1. (Теорема 3.1) Множина всіх планів задачі лінійного програмування опукла.

Властивість 2. (Теорема 3.2) Якщо задача лінійного програмування має оптимальний план, то екстремального значення цільова функція набуває в одній із вершин її багатогранника розв’язків. Якщо ж цільова функція набуває екстремального значення більш як в одній вершині цього багатогранника, то вона досягає його і в будь-якій точці, що є лінійною комбінацією таких вершин.

Властивість 3. (Теорема 3.3) Якщо відомо, що система векторів $A_1, A_2, \ldots, A_k$ ($k \le n$) у розкладі $A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0$, $X \ge 0$ лінійно незалежна і така, що

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_kx_k = A_0,$$

де всі $x_j \ge 0$, то точка $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ є кутовою точкою багатогранника розв'язків.

Властивість 4. (Теорема 3.4) Якщо $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – кутова точка багатогранника розв'язків, то вектори в розкладі

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = A_0, X \ge 0,$$

що відповідають додатним x_j, є лінійно незалежними.

Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування

$$\max(\min) Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \qquad (3.15)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, =, \ge\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, =, \ge\} b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \{\le, =, \ge\} b_3; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, =, \ge\} b_m. \end{cases} \qquad (3.16)$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0 \qquad (3.17)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \qquad (i = 1, 2, \dots, m)$$

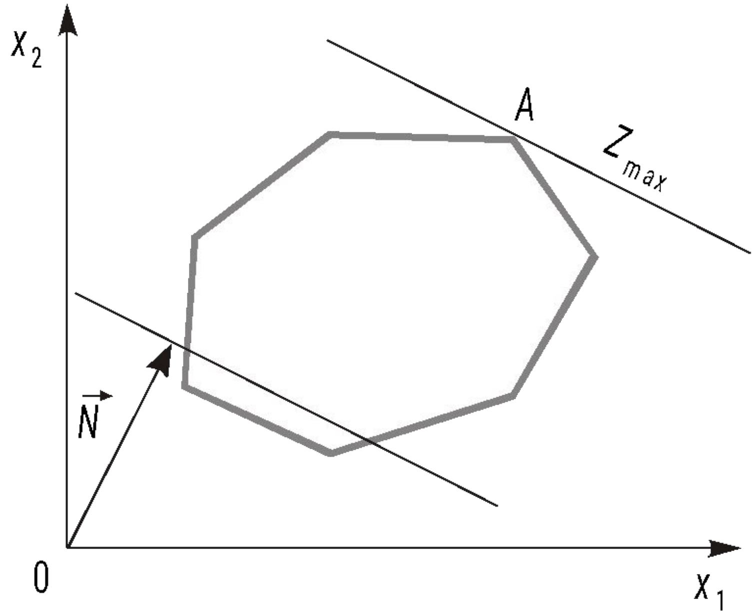
Алгоритм графічного методу

1. Будуємо прямі, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (3.16) знаків нерівностей на знаки рівностей.
2. Визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
3. Знаходимо багатокутник розв'язків задачі лінійного програмування.
4. Будуємо вектор $\overrightarrow{N} = (c_1;\ c_2)$, що задає напрям зростання значення цільової функції задачі.

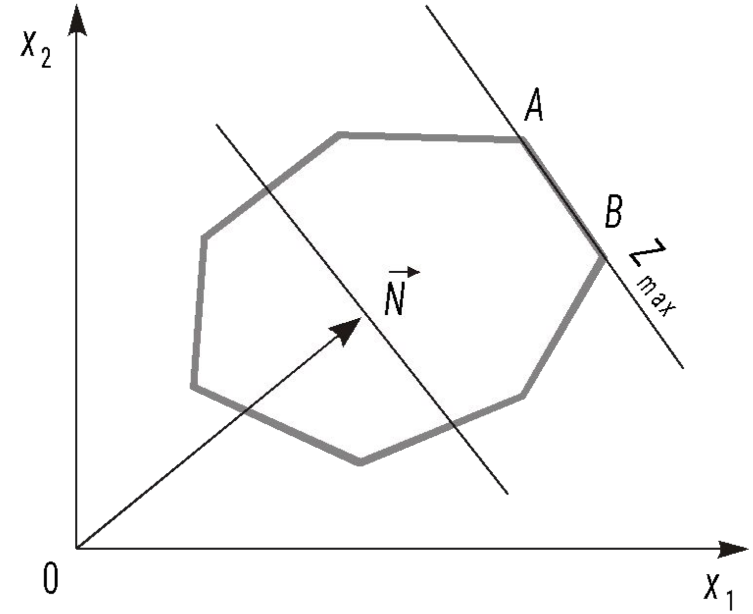
5. Будуємо пряму $c_1x_1+c_2x_2$=const, перпендикулярну до вектора .

6. Рухаючи пряму $c_1x_1+c_2x_2$=const в напрямку вектора
 (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі
 (для задачі мінімізації), знаходимо вершину багатокутника розв'язків, де цільова функція набирає екстремального значення.

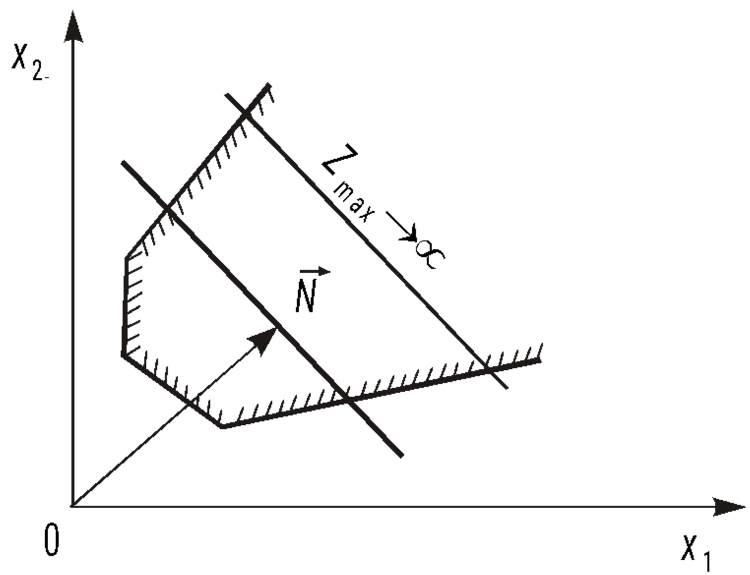
7. Визначаємо координати точки, в якій цільова функція набирає максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.



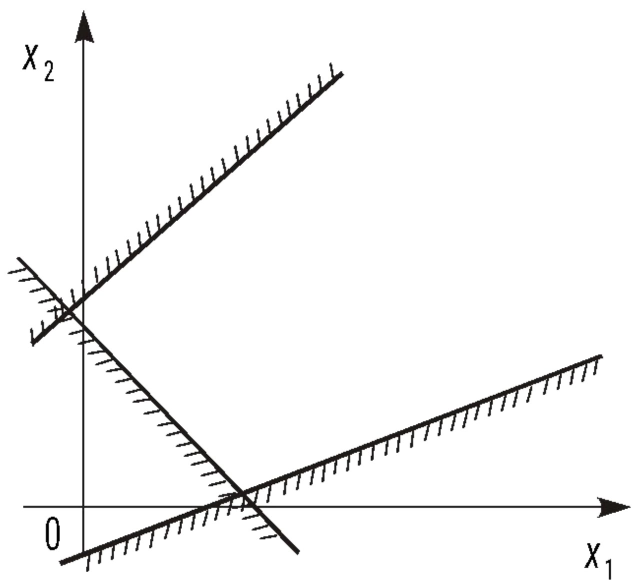
x_2
A
Z_{max}
$\vec{N}$
0
x_1



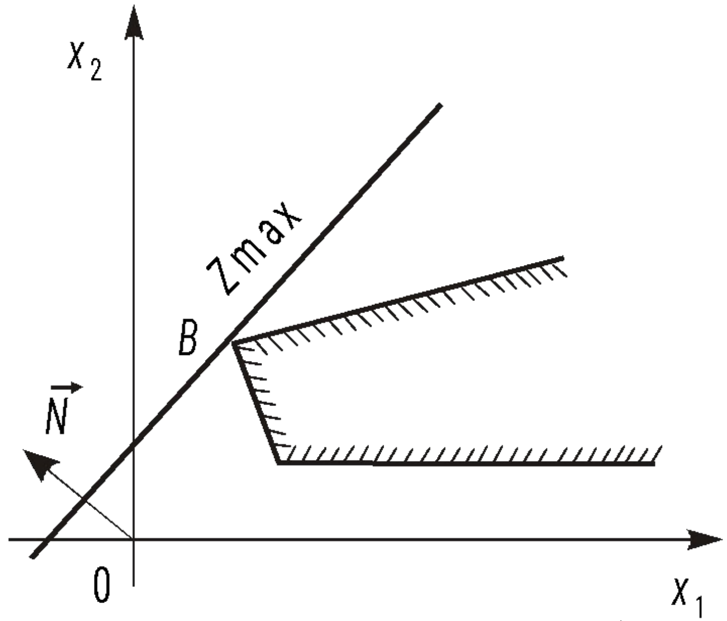
x_2
A
B
Z_{max}
$\vec{N}$
0
x_1



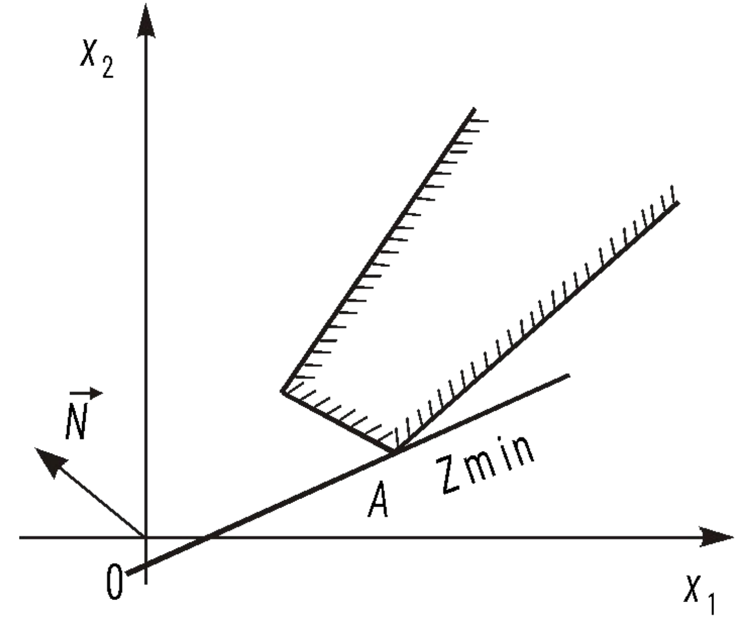
x_2
$Z_{max} \to \infty$
$\vec{N}$
0
x_1



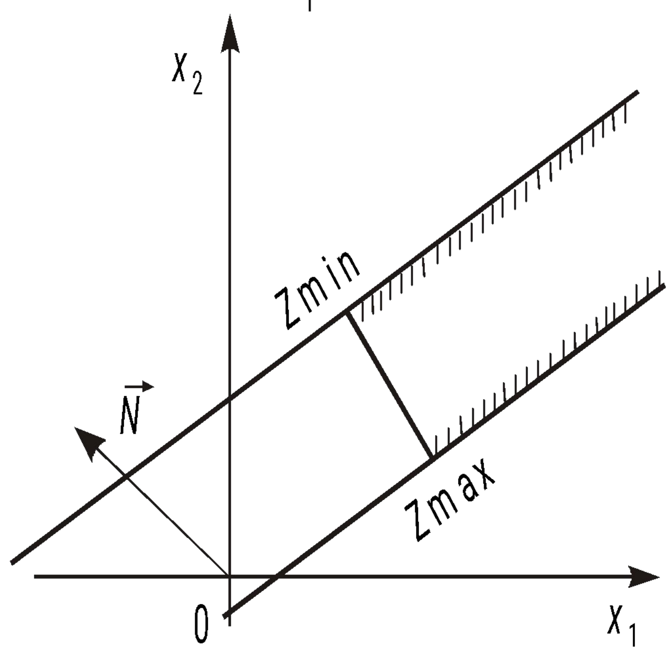
x_2
0
x_1



x 2
Zmax
B
N
0
x 1



x 2
N
Zmin
A
0
x 1



x 2
Zmin
N
Zmax
0
x 1

$$m = n - 2$$

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \beta_3; \\ x_4 = \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \beta_4; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \beta_n. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \;\; (i = \overline{1, n})$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$$

$$\begin{cases} x_3 = \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \beta_3 \geq 0; \\ x_4 = \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 + \beta_4 \geq 0; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \beta_n \geq 0. \end{cases} \qquad (3.18)$$

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$$

$$F' = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2$$