

XVIII Командная олимпиада школьников Санкт-Петербурга по информатике и программированию


Разбор задач
30 октября 2011 года

Санкт-Петербург



Задача А Летопись



- 
- Автор задачи – Виталий Аксёнов
 - Условие – Алексей Цыпленков
 - Подготовка тестов – Демид
Кучеренко
 - Разбор – Алексей Цыпленков



Постановка задачи

- Даны числа вида aa , bb и cc
- Вывести все различные перестановки этих чисел, соответствующие реальным датам



Как решать?


- Всего существует 6 перестановок из aa, bb и cc
- Каждую перестановку проверяем на соответствие реальной дате
- Сохраняем все и выкидываем одинаковые

Подводные камни

- на самом деле перестановки не всегда бывают различными – 01/01/01
- Если получилась дата вида dd/mm/00, значит, что дата соответствует 2100 -невисокосному году

Задача В Икебана



- 
- Автор задачи – Алексей Цыпленков
 - Условие – Алексей Цыпленков
 - Подготовка тестов – Павел Кунявский
 - Разбор – Павел Кунявский

Постановка задачи

- Есть n ростков бамбука, растущих $m - 1$ ночь, у которых заданы изначальная высота и скорость роста
- Можно подравнять ростки s_i по j до величины T
- Надо сделать минимальное число стрижек, чтобы в день m высота всех ростков была h

Как решать?


- Если все ростки в день t вырастают до величины h , то ответ 0
- Если какой-то росток в день t в любом случае не может достичь величины h , то ответ -1
- Во всех остальных случаях мы можем подстричь бамбук однажды – в последний день до высоты h , то есть ответ 1



Задача С

Номер страницы

Страница 3 из 11

- 
- Автор задачи – Михаил Дворкин
 - Условие – Ульяна Зотова
 - Подготовка тестов – Андрей Комаров
 - Разбор – Олег Давыдов



Постановка задачи

- Дана последовательность цифр длины n
- Надо разбить её на 2 части так, чтобы первое число было не больше второго, и оба не начинались с нуля

Как решать?

- Будем последовательно перебирать место разбиения последовательности
- Если длина второй части уже короче, чем длина первой, то это разбиение нам уже не подходит
- Если длины частей равны, то нужно просто сравнить 2 длинных числа
- Если вторая часть "длиннее" и не начинается с 0 – то это разбиение нам подходит




Подводные камни

- Если длина строки 1, то ответ всегда 0
- Если строка начинается с 0, то ответ всегда 0
- Если второе число начинается на 0, то его считать не надо

Задача D

Пизанская башня



- 
- Автор задачи – Андрей Станкевич
 - Условие – Андрей Комаров
 - Подготовка тестов – Андрей Станкевич
 - Разбор – Юрий Петров

Постановка задачи

- Модификация задачи о Ханойской башне
- Изменение: со второго стержня мы можем переложить любое количество дисков сверху на какой-нибудь другой в том же порядке
- Надо найти минимальное количество действий для переноса с первого стержня на третий

Как решать?

- Будем считать динамику $dp[from][to][k]$ – минимальное число действий нужно сделать, чтобы перенести со стержня $from$ на стержень to ровно k дисков
- Если $from = 2$, то $dp[from][to][k] = 1$
- Иначе,
$$dp[from][to][k] = dp[from][mid][k - 1] + 1 + dp[mid][to][k - 1],$$
где mid – не to , и не $from$

Приблизительное

доказательство

- Нам обязательно надо $n-1$ диск перенести со стержня from, чтобы достать самый большой
- Стержень to перед переносом туда самого большого диска должен быть пустым


Приблизительное доказательство (продолжение)

- Получается, что самый оптимальный способ перенести диски – перенести с *from* на *mid* ровно $n-1$ диск, перенести большой диск на стержень *to*, а потом опять перенести $n-1$ диск с *mid* на *to*

Задача E

Печать



- 
- Автор задачи – Георгий Корнеев
 - Условие – Алина Дубатовка
 - Подготовка тестов – Аксёнов
Виталий
 - Разбор – Аксёнов Виталий

Постановка задачи

- Есть набор картриджей с параметрами: стоимость и количество страниц, которое может напечатать
- Найти минимальную сумму, которую нужно заплатить, чтобы мы могли распечатать ровно k страниц

Как решать?

- Нам имеет смысл рассматривать не более 200 картриджей
- Картридж, у которого отношение стоимости к количеству напечатанных страниц максимально, имеет номер opt
- Картридж с максимальным количеством страниц имеет номер max

Как решать? (продолжение)

- Выгодно брать картридж opt , до тех пор когда количество страниц не станет меньше $p_{max} * p_{opt}$
- А для количества страниц до $p_{max} * p_{opt}$ решим стандартную задачу о рюкзаке


Обоснование

- Имеет смысл считать только до $p_{\max} p_{\text{opt}}$, так как мы можем получить почти все остатки от деления на p_{opt} , не превышая $p_{\max} p_{\text{opt}}$. А, значит, этого хватает, чтобы понять, что алгоритм находит самое оптимальное решение.

Задача F

Квадродерево



- 
- Автор задачи – Павел Кротков, Михаил Дворкин
 - Условие – Павел Кротков
 - Подготовка тестов – Аксёнов Виталий
 - Разбор – Аксёнов Виталий



Постановка задачи

- Дано квадродерево на таблице из 0 и 1
- Найти минимальное число вершин, которое может остаться, при изменении не более, чем k ячеек

Как решать?

- Посчитаем динамику на полном квадродереве, то есть в каждой вершине посчитаем - какое минимальное количество ячеек нужно изменить, чтобы в квадродереве с корнем в этой вершине было ровно m вершин


Обоснование

- Если таблица имеет размер $n \times n$ – то количество вершин в квадродереве $O(n^2)$
- Каждая такая вершина “пересчитывается” за $O(n^4)$
- $T(n) = O(n^4) + 4T(n/4) = O(n^4)$
- Итого: $O(n^4)$ – время работы программы

Задача G

Шпаги



- 
- Автор задачи – Юрий Петров
 - Условие – Алина Дубатовка, Андрей Станкевич
 - Подготовка тестов – Павел Кротков
 - Разбор – Павел Кротков

Постановка задачи


- Дано k чисел
- Построить такое двоичное дерево, что числа, записанные в детях, меньше, чем число, записанное в вершине, не менее, чем на k

Как решать?

- Отсортируем числа в порядке убывания
- У вершины с индексом v – предком будет вершина с индексом $\lfloor n/2 \rfloor$
- Не очень трудно убедиться, что если не выполняются условия задачи для этого ответа, то ответ равен -1

Задача N Светофор



- 
- Автор задачи – Виталий Аксёнов
 - Условие – Андрей Комаров
 - Подготовка тестов – Павел Куньявский
 - Разбор – Павел Куньявский

Постановка задачи

- Даны 2 односторонние дороги, по которым машины едут к центру
- У машин есть 3 параметра: дорога, по которой едут, положение в начальный момент времени, скорость
- Надо найти такое разбиение периода светофора, чтобы максимальное число машин, которые одновременно стоят на перекрёстке, было минимально

Как решать?


- Для каждой машины надо найти время, когда она доедет до перекрёстка
- Это время равно максимуму из её времени "без торможения" и из времен приезда машин, которые находятся ближе к перекрёстку

Как решать? (продолжение)

- “Нужные отрезки” – $(k(r+g)+g, (k+1)(r+g))$ для первой и $(k(r+g), k(r+g)+g)$ для второй прямой
- “Разобьём” время на блоки по x
- Нам нужно найти такое g , что максимум из количества машин на “нужных” отрезках была минимальной
- Каждая машина принадлежит какому-то блоку

Как решать? (продолжение)

- Возьмём все времена по модулю x и отсортируем, а далее воспользуемся методом сканирующей прямой
- Изначально, $g = 0$
- 2 события:
 - Машина с первой прямой успевает на зелёный
 - Машина со второй прямой теперь не успевает на зелёный




Как решать? (продолжение)

- Для каждой машины мы знаем блок, которому она принадлежит
- При использовании сканирующей количество машин в блоках мы можем поддерживать с помощью дерева отрезков

Задача I

Гири



- 
- Автор задачи – Михаил Дворкин
 - Условие – Ульяна Зотова
 - Подготовка тестов – Андрей Комаров
 - Разбор – Павел Кротков



Постановка задачи

- Разбить числа от 1 до n на 3 группы, суммы чисел в которых равны

Как решать?

- $n \leq 4$ и $n \equiv 1 \pmod{3}$ – разбить на кучи нельзя
- Если мы умеем разбивать n , то умеем и $n + 6$
 - $n = 5$ – $\{\{5\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$
 - $n = 6$ – $\{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$
 - $n = 8$ – $\{\{4, 8\}, \{5, 7\}, \{1, 2, 3, 6\}\}$
 - $n = 9$ – $\{\{7, 8\}, \{6, 9\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$

Спасибо за внимание!
Вопросы?

<http://neerc.ifmo.ru/school>