



ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ И ТЕОРИЯ НАДЁЖНОСТИ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ РАСЧЁТА
НАДЁЖНОСТИ.

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
НАДЁЖНОСТИ

Общая схема постановки задачи расчёта надёжности сооружения/конструкции

ОБОЗНАЧЕНИЯ: надёжность – P_s (s – successful), N
 вероятность отказа – P_f (f – failure), $P_s(0)$

$$P_s = 1 - P_f$$

$$N = 1 - P_s(0)$$

ОБОБЩЁННОЕ УСЛОВИЕ БЕЗОТКАЗНОСТИ (РАБОТОСПОСОБНОСТИ) ПО НЕКОТОРОМУ КРИТЕРИЮ:

$$\tilde{Q} \leq \tilde{R}$$

(по ГОСТ 27751 – 2014 – расчётный критерий предельного состояния)

По А.Р. Ржаницыну

Обобщённая нагрузка
 (нагрузочный фактор/эффект,
load effect) (по ГОСТ – результат (эффект) воздействия)

- параметр нагрузки
- усилие
- напряжение
- перемещение
- частота колебаний
- другое

Обобщённая прочность
 (сопротивление, **resistance**)

- предельная нагрузка (несущая способность)
- предельное усилие
- предел текучести, прочности
- допустимое перемещение
- частота колебаний (собств.)
- другое

$$P_s = P(Q < R)$$

Q, R – реализации случайных величин \tilde{Q} и \tilde{R}

(N)

Общая схема постановки задачи расчёта надёжности сооружения/конструкции

ВАРИАНТ ЗАПИСИ УСЛОВИЯ БЕЗОТКАЗНОСТИ (РАБОТОСПОСОБНОСТИ):

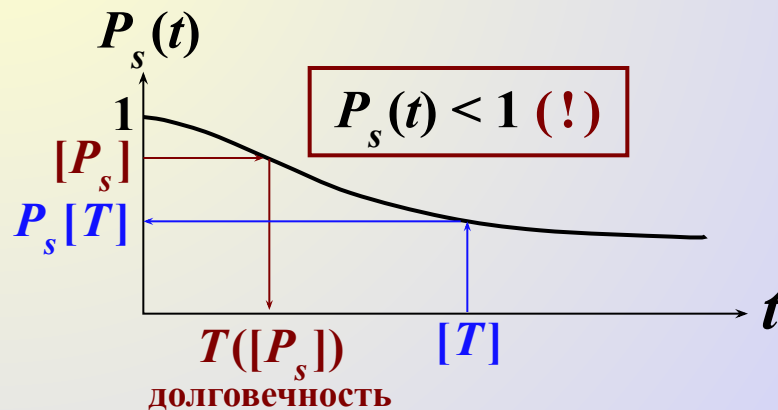
$$\tilde{S} \geq 0$$

$\tilde{S} = \tilde{R} - \tilde{Q}$ – резерв (обобщённой) прочности (функция работоспособности) – по А.Р. Ржаницыну

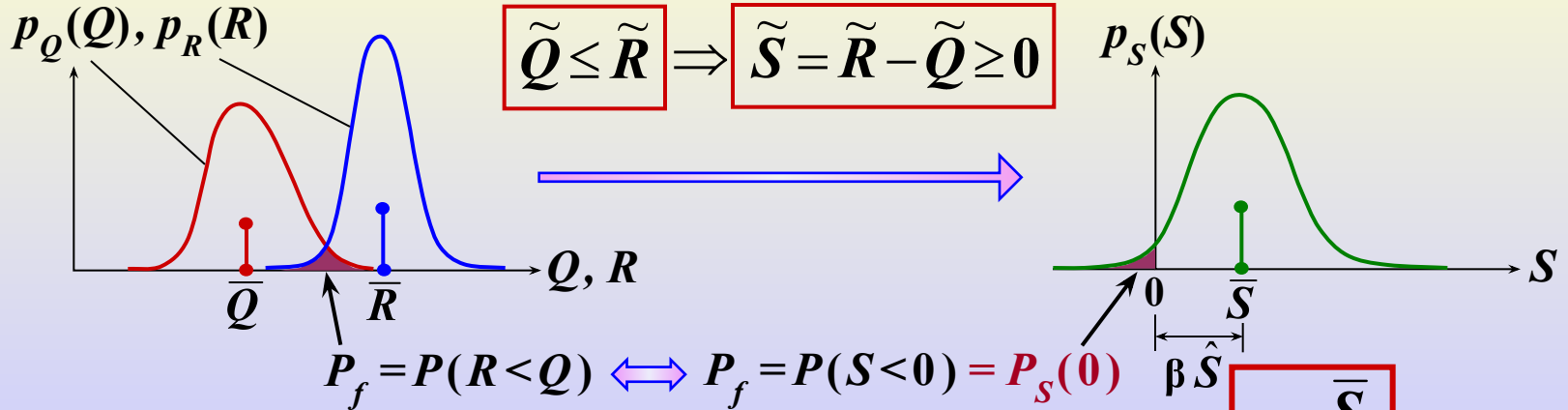
Надёжность $P_s = 1 - P_f$ где $P_f = P(S < 0)$;
 \tilde{S} – реализация случайной величины \tilde{S}

В общем случае \tilde{Q} и \tilde{R} зависят от времени t :

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{Q} = \tilde{Q}(t) \\ \tilde{R} = \tilde{R}(t) \end{array} \right\} P_s = P_s(t)$$



Обобщённое условие безотказности по некоторому критерию работоспособности



$$P_f = \int_{-\infty}^0 p_S(S) dS$$

$\beta = \frac{\bar{S}}{\hat{S}}$ — характеристика безопасности (индекс надёжности, reliability index)

$$\tilde{S} = S(\tilde{Q}, \tilde{R})$$

$$\tilde{Q} = Q(\{\tilde{X}_Q\})$$

$$\{\tilde{X}_Q\} = \{\tilde{x}_{Q1} \tilde{x}_{Q2} \dots \tilde{x}_{Qi} \dots \tilde{x}_{Qn_Q}\}$$

$$\tilde{R} = R(\{\tilde{X}_R\})$$

$$\{\tilde{X}_R\} = \{\tilde{x}_{R1} \tilde{x}_{R2} \dots \tilde{x}_{Ri} \dots \tilde{x}_{Rn_R}\}$$

Пример: $\tilde{Q} = \left| \tilde{M} \right|_{\max} = \tilde{q} \tilde{l}^2 / 8$ (нагрузочный эффект)

$$\{\tilde{X}_Q\} = \{\tilde{q} \tilde{l}\}$$

$$\tilde{R} = \tilde{M}_0 = \tilde{\sigma}_u \tilde{W}$$
 (сопротивление)

$$\{\tilde{X}_R\} = \{\tilde{\sigma}_u \tilde{W}\}$$

$$\tilde{W} = \frac{\tilde{b} \tilde{h}^2}{6}$$

$$\tilde{u} = u(\{\tilde{X}\})$$

При нескольких условиях безотказности:

$$\tilde{u} = \{\tilde{u}_1 \tilde{u}_2 \dots \tilde{u}_k \dots \tilde{u}_m\}$$

Для j -го условия безотказности по некоторому критерию работоспособности:

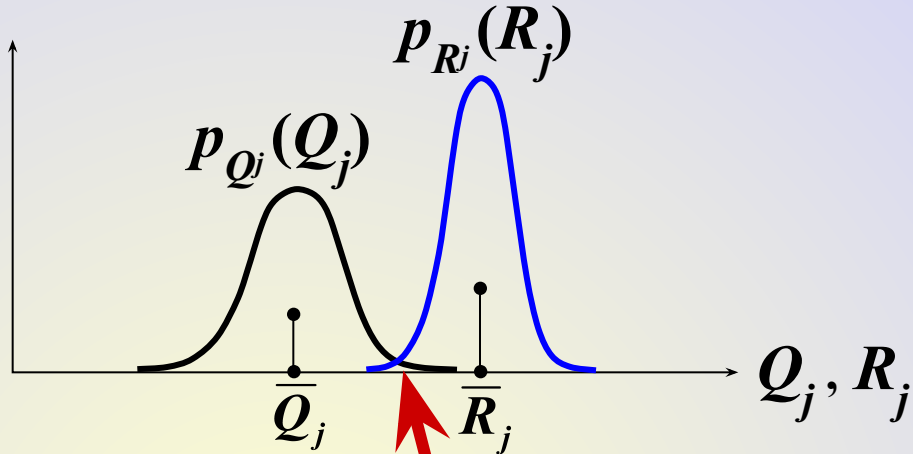
$$\tilde{S}_j = \tilde{R}_j - \tilde{Q}_j \geq 0$$

Резерв обобщённой прочности (функция работоспособности)

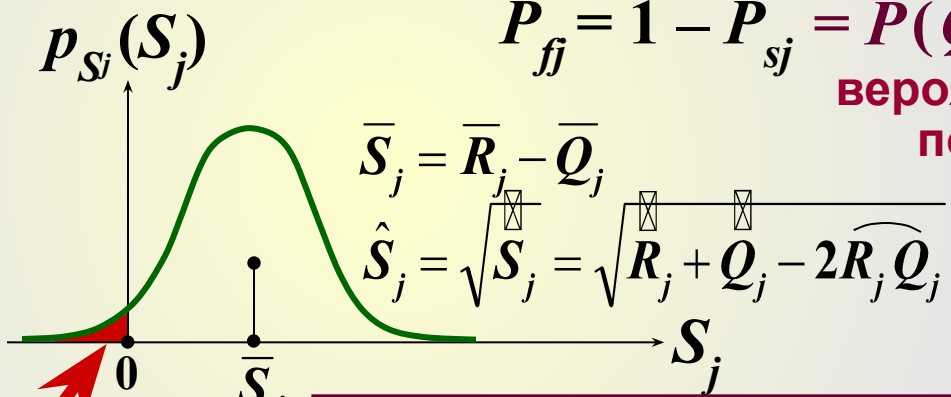
$$P_{ff} = \int_{-\infty}^0 p_{Sj}(S_j) dS_j$$

Для нормального распределения

$$p_{Sj}(S_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_j}} e^{-\frac{(S_j - \bar{S}_j)^2}{2S_j}}$$



$P_{ff} = 1 - P_{sj} = P(Q_j > R_j)$ – вероятность отказа по j -му условию безотказности

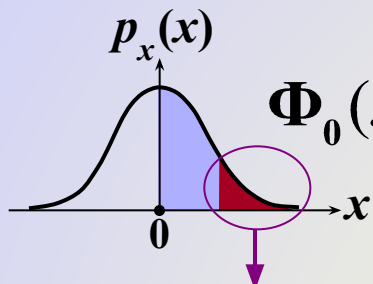


$$\beta_j = \bar{S}_j / \hat{S}_j - \text{индекс надёжности (характеристика безопасности)}$$

$$\beta_j = \frac{\bar{S}_j}{\hat{S}_j} = \frac{1}{A_{Sj}} = \frac{1 - \xi_j}{\sqrt{A_{Rj}^2 + (\xi_j A_{Qj})^2}}; \quad \xi_j = \frac{\bar{Q}_j}{R_j}$$

вычисление P_{ff} возможно с помощью интеграла вероятностей (функции Лапласа)

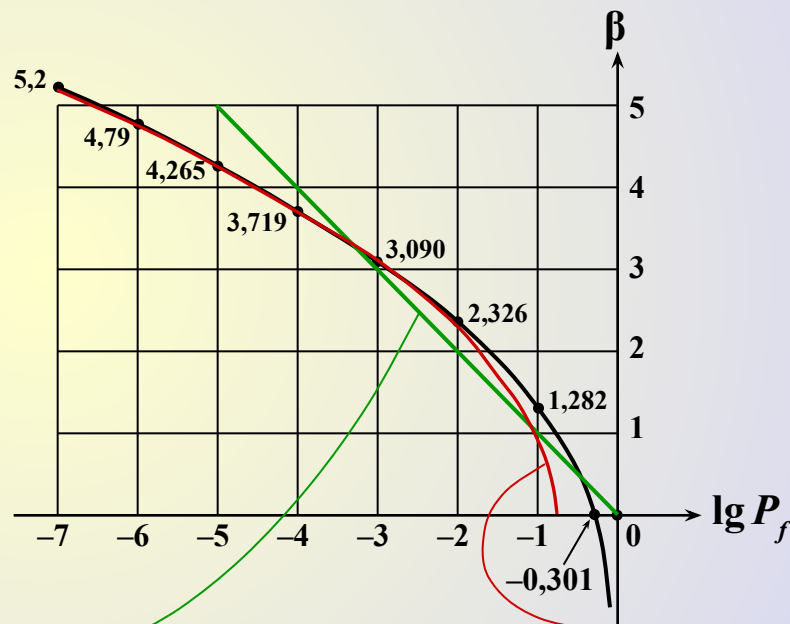
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА ВЕРОЯТНОСТЕЙ (ФУНКЦИИ ЛАПЛАСА) ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОТКАЗА ПО ИНДЕКСУ НАДЁЖНОСТИ



$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

В расчётах надёжности $x \equiv \beta$

Вероятность $P_f = 0,5 - \Phi_0(x)$	$x = \beta$
10^{-7}	5,2
10^{-6}	4,79
10^{-5}	4,265
0,0001	3,719
0,0005	3,291
0,001	3,090
0,002	2,878
0,005	2,576
0,01	2,326
0,02	2,054
0,05	1,645
0,1	1,282



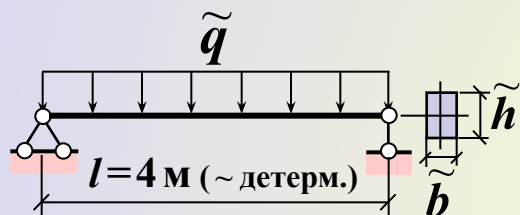
$P_f \approx 10^{-\beta}$ при $\beta = 1 \dots 4$ (из зарубежных источников)

Более точно (ВГС): $P_f \approx 10^{-(0,23\beta_2 + 0,8)}$ при $\beta = 2 \dots 7$

Определение вероятности отказа методом статистических испытаний:

по результатам n_0 расчётов системы при различных случайных реализациях входных расчётных параметров выявляется количество испытаний n_{fj} , в которых получено $Q_j > R_j$ ($S_j < 0$), тогда $P_{fj} = n_{fj} / n_0$. Ориентировочно $n_0 \sim (10^2 \dots 10^3) / P_{fj}$.

Пример

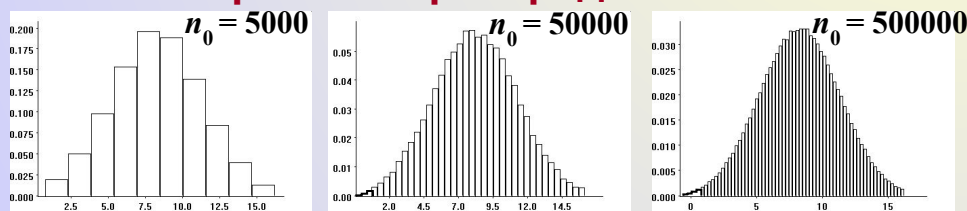


Требуется определить вероятность отказа деревянной балки по условию прочности $\tilde{\sigma}_0 = |\tilde{\sigma}|_{\max} \leq \tilde{\sigma}_u$ при $\tilde{q} = \tilde{q}_c + \tilde{q}_s$ (\tilde{q}_c – постоянная нагрузка, \tilde{q}_s – снеговая). $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{q} l^2 / (8W)$

$\bar{q}_c = 6$ кН/м; $\hat{q}_c = 0,48$ кН/м; $\bar{q}_s = 5$ кН/м; $\hat{q}_s = 1,6$ кН/м ($A_{q_c} = 0,08$; $A_{q_s} = 0,32$);
 $\bar{b} = 0,15$ м; $\hat{b} = 0,0006$ м; $\bar{h} = 0,3$ м; $\hat{h} = 0,0015$ м; ($A_b = 0,004$; $A_h = 0,005$);
 $\bar{\sigma}_u = 18$ МПа; $A_{\sigma_u} = 0,15$).

$$\tilde{S} = \tilde{\sigma}_u - \tilde{\sigma}_0$$

Вариант 1 – все расчётные параметры нормально распределённые



Для сравнения – по методу статистической линеаризации:

$$\bar{S} = 8,222 \text{ МПа} \quad \hat{S} = 3,083 \text{ МПа} \quad P_f = 0,00367$$

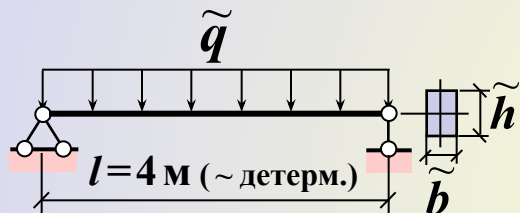
$n_c \times n_s$	\bar{S} , МПа	\hat{S} , МПа	P_f
400 × 5	8,218	3,028	0,002
1000 × 5	8,229	3,095	0,004
2000 × 5	8,256	3,040	0,003
10 ⁴ × 5	8,233	3,082	0,00376
2 × 10 ⁴ × 5	8,215	3,065	0,00374
10 ⁵ × 5	8,224	3,079	0,003782
2 × 10 ⁵ × 5	8,219	3,081	0,003766

Определение вероятности отказа методом статистических испытаний:

по результатам n_0 расчётов системы при различных случайных реализациях входных расчётных параметров выявляется количество испытаний n_{fj} , в которых получено $Q_j > R_j$ ($S_j < 0$), тогда $P_{fj} = n_{fj} / n_0$. Ориентировочно $n_0 \sim (10^2 \dots 10^3) / P_{fj}$.

Пример

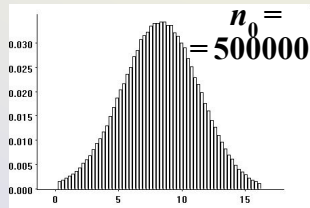
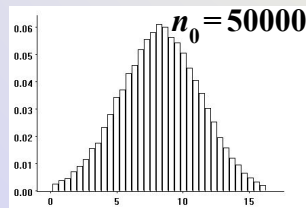
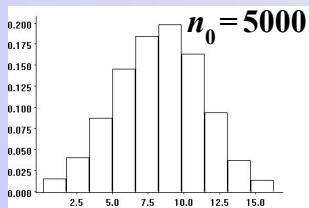
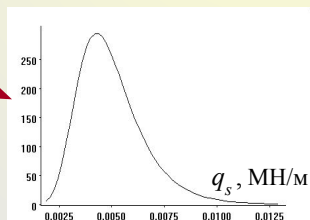
Требуется определить вероятность отказа деревянной балки по условию прочности $\tilde{\sigma}_0 = |\tilde{\sigma}|_{\max} \leq \tilde{\sigma}_u$ при $\tilde{q} = \tilde{q}_c + \tilde{q}_s$ (\tilde{q}_c – постоянная нагрузка, \tilde{q}_s – снеговая). $\tilde{\sigma}_0 = \tilde{q} l^2 / (8W)$



$\bar{q}_c = 6 \text{ кН/м}; \hat{q}_c = 0,48 \text{ кН/м}; \bar{q}_s = 5 \text{ кН/м}; \hat{q}_s = 1,6 \text{ кН/м}$ ($A_{qc} = 0,08$; $A_{qc} = 0,32$);
 $\bar{b} = 0,15 \text{ м}; \hat{b} = 0,0006 \text{ м}; \bar{h} = 0,3 \text{ м}; \hat{h} = 0,0015 \text{ м}$; ($A_b = 0,004$; $A_h = 0,005$);
 $\bar{\sigma}_u = 18 \text{ МПа}; A_{\sigma u} = 0,15$).

$\tilde{S} = \tilde{\sigma}_u - \tilde{\sigma}_0$

Вариант 2 – для снеговой нагрузки – **распределение Гумбеля**, остальные параметры нормально распределённые



$n_0 \times n_s$	\bar{S} , МПа	\hat{S} , МПа	P_f
400 x 5	8,201	3,124	0,003
1000 x 5	8,257	3,130	0,0052
2000 x 5	8,223	3,087	0,0058
10 ⁴ x 5	8,222	3,099	0,0057
2 x 10 ⁴ x 5	8,196	3,112	0,00576
10 ⁵ x 5	8,199	3,109	0,00601
2 x 10 ⁵ x 5	8,213	3,111	0,00599

Надёжность по комплексу критериев безотказности (при нескольких альтернативных критериях)

$$P_s = P_{s \text{ прочн}} \cdot P_{s \text{ устойч}} \cdot P_{s \text{ жёстк}} \cdot P_{s \text{ друг}}$$

При m условиях расчётных предельных состояний по всем используемым критериям безотказности

$$P_s = \prod_{j=1}^m P_{sj} = \prod_{j=1}^m [1 - P_{fj}]$$

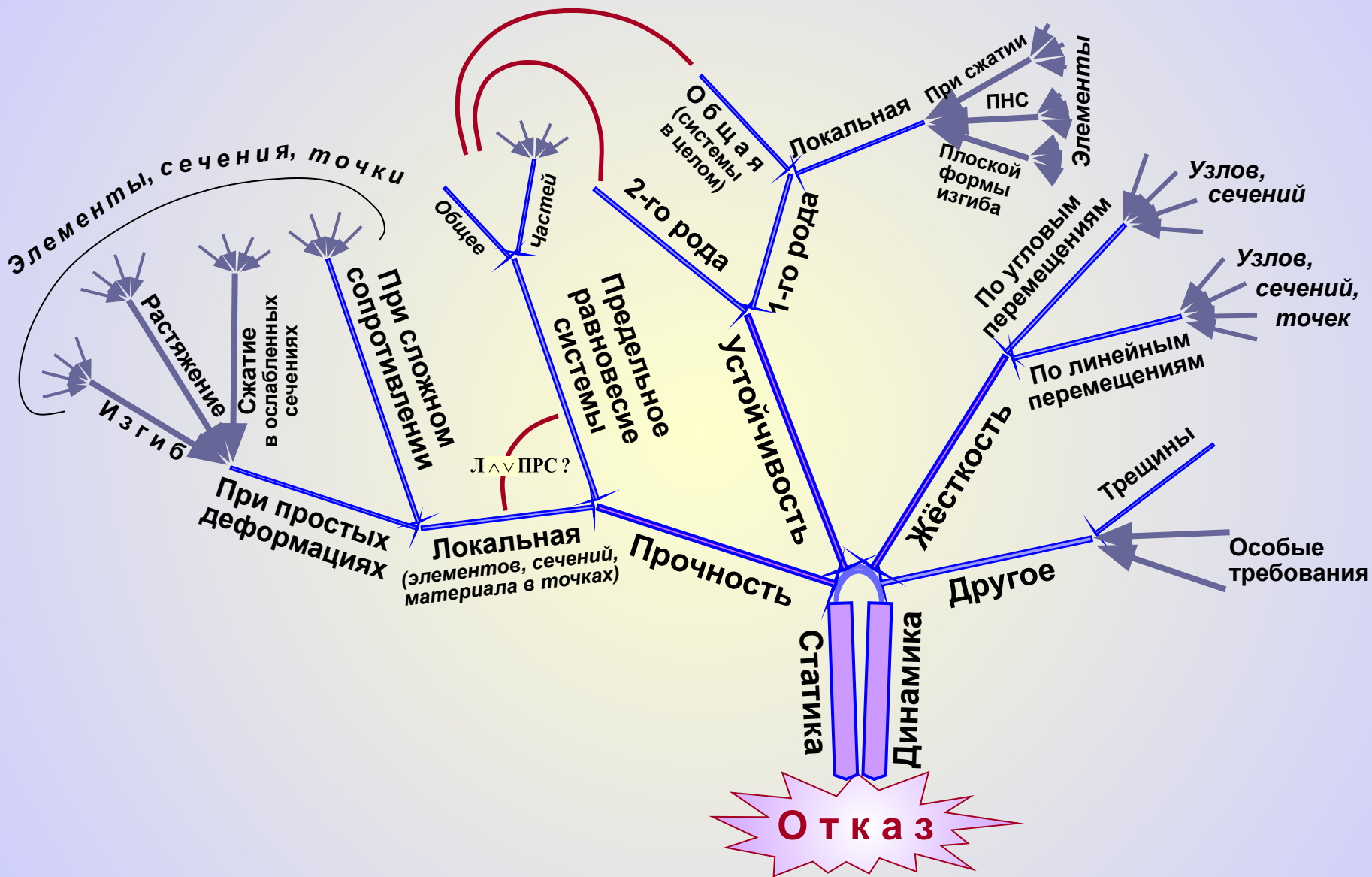
Вероятность отказа

$$P_f = 1 - P_s = 1 - \prod_{j=1}^m P_{sj} = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - P_{fj})$$

Приблизённо
при $P_{fj} \ll 1/m$:

$$P_f \approx \sum_{j=1}^m P_{fj}$$

Построение «дерева отказов (рисков)» и анализ рисков



ТИПЫ ЗАДАЧ ТЕОРИИ НАДЁЖНОСТИ

- ▶ прямая (поверочная) задача – ПЗТН
- ▶ обратная (проектная) задача – ОЗТН
- ▶ оптимизационная задача – ОптЗТН

ПЗТН: при известных (заданных) функциональных или числовых характеристиках вероятностных свойств расчётных параметров и обозначенных критериях / условиях безотказности определить **надёжность системы** (сооружения, конструкции) P_s и / или **вероятность её отказа** $P_f = 1 - P_s$.

ОЗТН: определить **область допустимых значений** (ОДЗ)^{*)} вероятностных характеристик указанной группы случайных расчётных параметров, обеспечивающих надёжность системы **не менее требуемой** [P_s] или вероятность отказа **не более допустимой** [P_f], при известных стохастических описаниях остальных расчётных величин и обозначенных критериях / условиях безотказности.

^{*)} Иначе – доверительную область значений (ДОЗ).

Варианты ОЗТН – определение ОДЗ вероятностных характеристик

- геометрических параметров сечений конструктивных элементов – подбор сечений;
- воздействий (нагрузок);
- физико-механических свойств материалов;
- группы разнотипных расчётных параметров.

ОптЗТН: найти стохастические расчётные параметры системы, оптимальной по некоторому критерию, с учётом требований надёжности или обладающей наибольшей возможной надёжностью.

Примечание: некоторые заданные или подлежащие определению расчётные параметры системы могут быть детерминированными (или квазидетерминированными) величинами.

Математическая модель ПЗТН:
 заданы $\{\tilde{X}\}$ и ограничения $\tilde{Q}_j \leq \tilde{R}_j$ ($j = \overline{1, m}$);
 найти $P_s \wedge \vee P_f = 1 - P_s$.

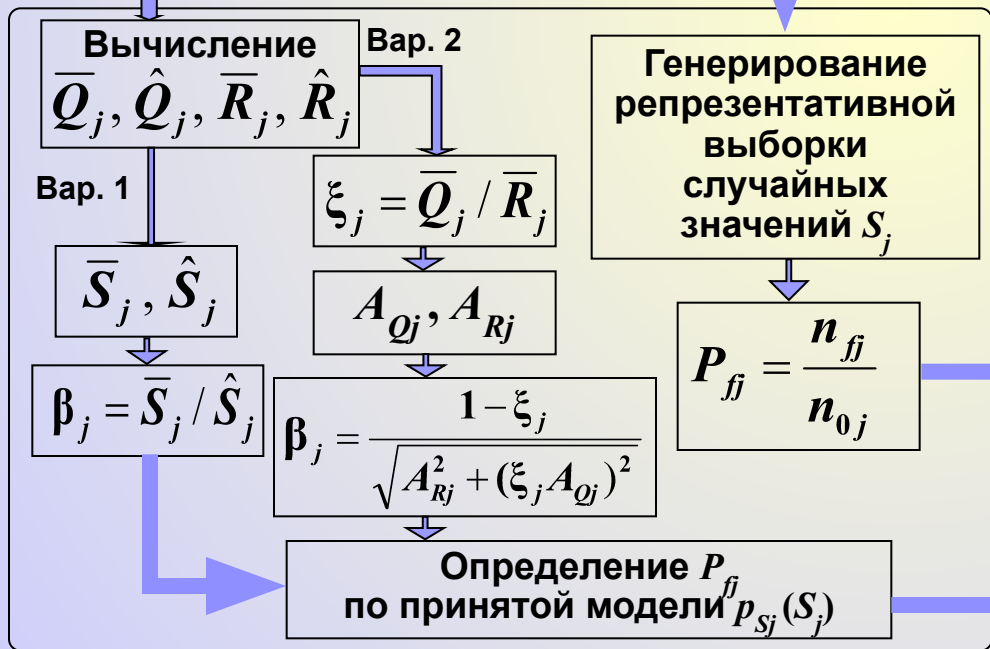
**Алгоритм
 решения ПЗТН**

Анализ и ввод исходной статистической информации

Выбор критериев и формирование комплекса условий безотказности

МСЛ Выбор метода вероятностного расчёта МСИ

Цикл по $j = \overline{1, \dots, m}$



$$P_f = 1 - \prod_{j=1}^m (1 - P_{fj}) \approx \sum_{j=1}^m P_{fj}$$

$$P_s = 1 - P_j = \prod_{j=1}^m [1 - P_{fj}] \rightarrow \text{К}$$

Математическая модель ОЗТН:

заданы: требуемая $[P_s]$ или допустимая $[P_f]$,
 часть расчётных параметров $\{\tilde{X}_0\}$ и ограничения $\tilde{Q}_j \leq \overline{R}_j$ ($j = \overline{1, m}$);
найти область допустимых значений (ОДЗ) входных параметров.

В общей постановке:

$$P_s(\{\bar{X}_0\}, \{A_X\}) \geq [P_s] \text{ или } P_f(\{\bar{X}_0\}, \{A_X\}) < [P_f] \quad (\text{a})$$

где $\{\bar{X}_0\}$ и $\{A_X\}$ – векторы искомого МО и КВ расчётных параметров (в них могут присутствовать и детерминированные величины с КВ, равными 0).

Взятые со знаком равенства требования (а) определяют граничную гиперповерхность искомой ОДЗ в $2n_X$ -мерном пространстве характеристик (n_X – размерность векторов).

Применение достаточно удачных аппроксимаций позволяет получить из (а) уравнение границы ОДЗ расчётных параметров в пространстве частных индексов надёжности, например

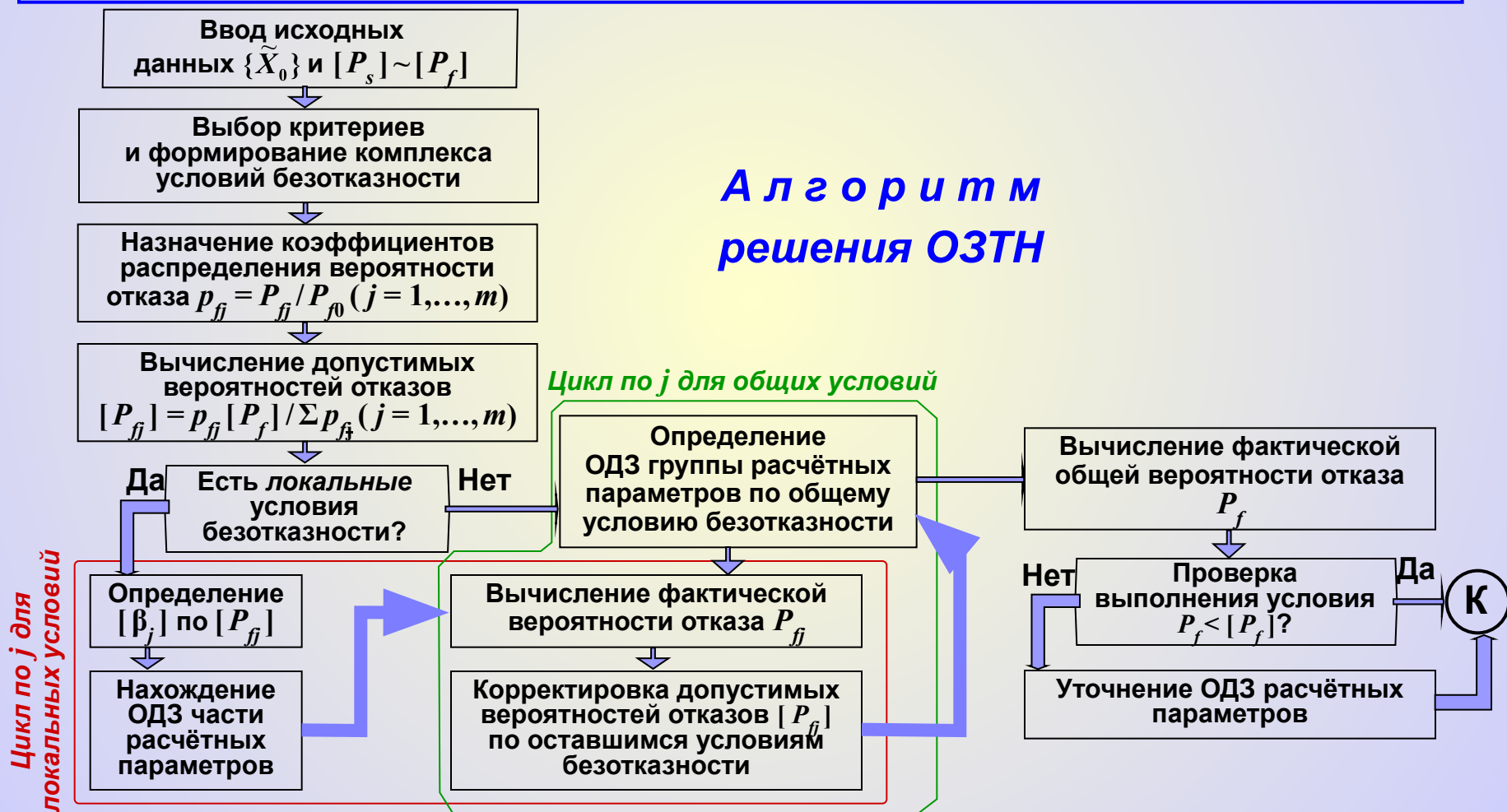
$$\lg \sum_{j=1}^m 10^{-\varphi_j(\beta_j)} - \lg [P_f] = 0. \quad (\text{б})$$

Если нормируется не надёжность или вероятность отказа, а общий индекс надёжности $[\beta_0]$, то в (б): $\lg [P_f] = -(0,23[\beta_0]^2 + 0,8)$

Математическая модель ОЗТН:

заданы: требуемая $[P_s]$ или допустимая $[P_f]$,
 часть расчётных параметров $\{\tilde{X}_0\}$ и ограничения $\tilde{Q}_j \leq \tilde{R}_j$ ($j = \overline{1, m}$);
найти область допустимых значений (ОДЗ) входных параметров.

Алгоритм решения ОЗТН



А л г о р и т м (вариант):

1) по известной $[P_f]$ определяется требуемое значение частного индекса надёжности в предположении наиболее невыгодного по общей надёжности, но выигрышного по расходу материала случая равной вероятности отказов по всем m условиям работоспособности:

$$[\beta_j] = 2,085 \sqrt{-\lg[P_f] - 0,8 + \lg m} = \sqrt{[\beta_0]^2 + 4,348 \lg m} ;$$

2) выбирается одно из условий, содержащее либо одну из подлежащих определению расчётных величин, либо несколько взаимосвязанных (например, площадь и моменты сопротивления сечения стержневого конструктивного элемента в условии прочности при пространственной деформации в упругой стадии); из равенства $\beta_j = [\beta_j]$ получается уравнение, связывающее МО и КВ искомым расчётных параметров, решаемое, как правило, подбором – последовательными приближениями, причём КВ сначала могут назначаться ориентировочно;

удобно использовать заданный по смыслу коэффициент A_{Qj} (A_{Rj} обычно известен), откуда решением квадратного уравнения находится коэффициент нагруженности ξ_j , далее по ξ_j находятся комбинации искомым МО параметров при соответствующих их КВ;

3) последовательно аналогичным образом используются все расчётные условия безотказности, причём в каждом последующем учитываются уже ранее найденные параметры.

При переходе к расчёту по очередному условию безотказности целесообразно уточнять $[\beta_j]$ с учётом вероятностей отказов P_{ff} по уже рассмотренным условиям:

$$[\beta_j^-] = 2,085 \sqrt{-\lg \left([P_f] - \sum_{j=1}^{m_p} P_{ff} \right) - 0,8 + \lg(m - m_p)},$$

где m_p – количество ранее использованных условий.