Системы счисления

Введение

Г.В. Лейбинц говорил: «Кто хочет ограничиться настоящим, без знания прошлого, тот никогда его не поймет…».

ГЛАВА I
Непозиционные системы

Чтобы иметь дело с числами, необходимо прежде всего уметь называть и записывать их.

Способ наименования и записи чисел принято считать *системой счисления*.

Египетская нумерация

Египтяне придумали свою систему счисления около 5 000 лет назад

В ней ключевые числа:1,10,100 и т.д.- изображались значками-иероглифами.

Это одна из древнейших систем записи чисел, известная человеку

1. Как и большинство людей для счета небольшого количества предметов Египтяне использовали палочки.

Если палочек нужно изобразить несколько, то их изображали в два ряда, причем в нижнем должно быть столько же палочек сколько и в верхнем, или на одну больше.

10. Такими путами египтяне связывали коров

Если нужно изобразить несколько десятков, то иероглиф повторяли нужное количество раз. Тоже самое относится и к остальным иероглифам.

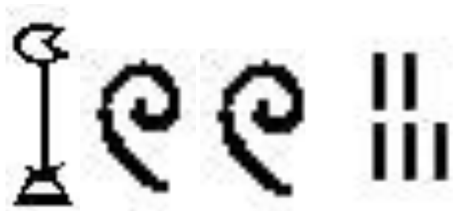
100. Это мерная веревка, которой измеряли земельные участки после разлива Нила.

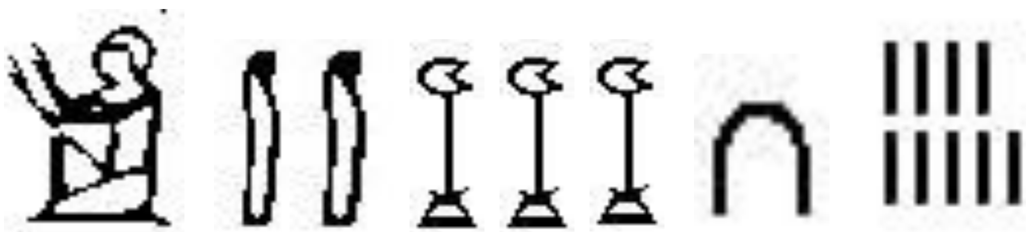
1 000. Вы когда-нибудь видели цветущий лотос? Если нет, то вам никогда не понять, почему Египтяне присвоили такое значение изображению этого цветка.

10 000. "В больших числах будь внимателен!" - говорит поднятый вверх указательный палец.

100 000. Это головастик. Обычный лягушачий головастик.

1 000 000. Увидев такое число обычный человек очень удивится и возденет руки к небу. Это и изображает этот иероглиф

 -1205,

 -1023019.

Алфавитная нумерация

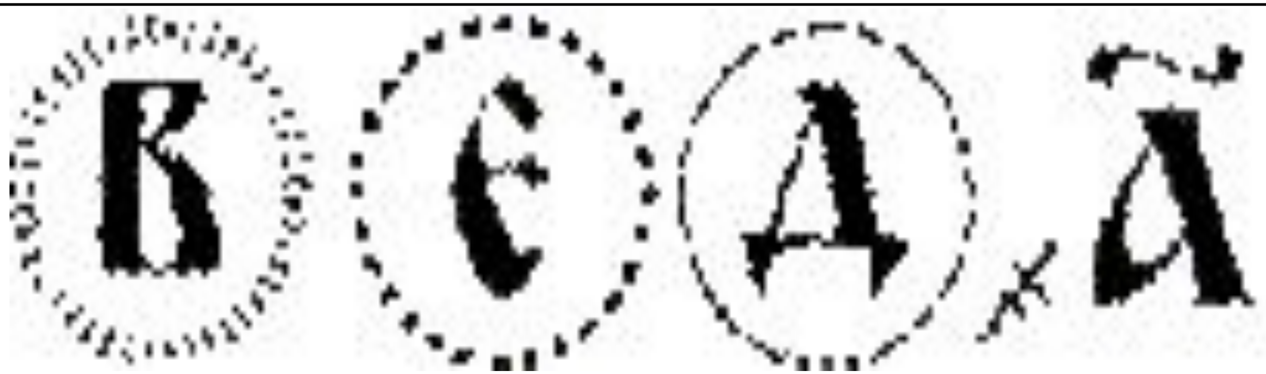
В середине V в. до н. э. появилась запись чисел нового типа, так называемая **алфавитная нумерация**.

В этой системе записи числа обозначались при помощи букв алфавита., над которыми ставились черточки: первые девять букв обозначали числа от 1 до 9, следующие девять - числа 10, 20, 30, ..., 90, и следующие девять - числа 100, 200, ..., 900.

Таким образом, можно было обозначать любое число до 999.

Славянская нумерация

а҃	в҃	г҃	д҃	є҃	ѕ҃	з҃	и҃	ѳ҃
аз	ве́ди	глаго́ль	добро́	есть	зело́	земля́	и́же	фита́
1	2	3	4	5	6	7	8	9
і҃	к҃	л҃	м҃	н҃	ѯ҃	ѻ҃	п҃	ч҃
и	ка́ко	лю́ди	мысле́те	наш	кси	он	поко́й	червь
10	20	30	40	50	60	70	80	90
р҃	с҃	т҃	ү҃	ф҃	х҃	ѱ҃	ѡ҃	ц҃
рцы	сло́во	тве́рдо	ук	ферт	хер	пси	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900



например это число

$$2\cdot 10^6+5\cdot 10^5+4\cdot 10^4+10^3=2\,541\,000$$

Римская система счисления

До нас дошла римская система записи чисел, которая в некоторых случаях применяется в нумерации (века, тома в собрании сочинений и др.). В римской системе в качестве цифр используются латинские буквы:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Эта система непозиционная.

В ней цифры записываются слева направо.

Римская система счисления

1. *Если знак, изображающий меньшее число, стоит после знака, изображающего большее число, то производится сложение*.

VI=5+1=6,

XV=10+5=15,

CLV=100+5+5=155,

MCCV=1000+100+100+5=1205.

2. *Если знак, изображающий меньшее число, стоит перед знаком, изображающим большее число, то производится вычитание:*

IV=5-1=4,

IX= 10-1=9,

XL=50-10=40,

XC=100-10=90,

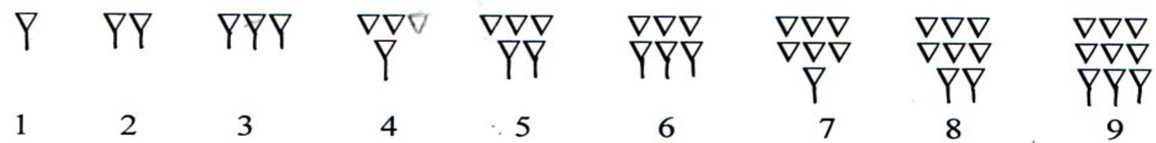
MCDXXIX=1000+ (500-100)+ 10+10+ (10-1)=1429.

Происхождение позиционных систем счисления

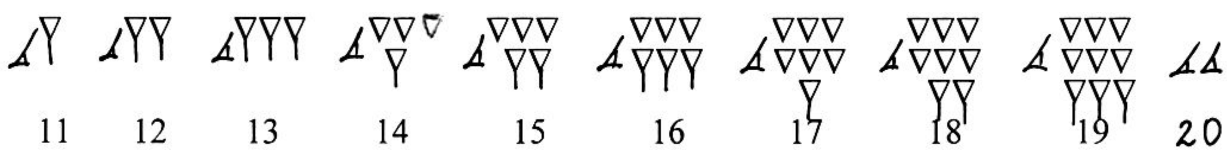
Около 1700 г. до н.э.

Глиняные таблички, найденные в Месопатамии с культурным центром - г.Вавилон.

Вавилоняне писали палочками на глиняных пластинках. Все числа они записывали при помощи двух знаков  – означавшего единицу и горизонтального клина  означавшего 10. Первые девять чисел натурального ряда у них записывались так:



Числа второго десятка записывали в таком виде



Система счисления ацтеков и майя

У ацтеков и майя, населявших американский континент и создавших там высокую культуру, почти полностью уничтоженную испанскими завоевателями в XVI - XVII в., была принята двадцатеричная система счисления.

Та же система была принята у кельтов, населявших Западную Европу, начиная со II тысячелетия до нашей эры.

Десятичная система

Эта система пришла к нам из Индии, где зародилась около V в н.э.

В десятичной системе счисления используется всего десять цифр – 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Значение каждой цифры в позиционной системе счисления определяется не только ею самой, но также и местом (позицией), которое она занимает в записи числа.

$$135609=1\cdot 10^5+3\cdot 10^4+5\cdot 10^3+6\cdot 10^2+0\cdot 10^1+9\cdot 10^0.$$

Позиционные системы счисления

В позиционных системах значение применяемых символов (цифр) зависит от места, которое он занимает в записи числа. При этом сдвиг цифры на одно место влево влечет увеличение ее числового значения в g- раз, где g- некоторое натуральное число, больше единицы. Число g – называют основанием системы счисления.

Определение: *Систематической записью натурального числа m по основанию g называют представление этого числа в виде суммы:*

$$m = k_n \cdot g^n + k_{n-1} \cdot g^{n-1} + \ldots + k_1 \cdot g + k_0,$$

$k_n, k_{n-1}, \ldots k_1, k_0$ – числа, принимающие значения от 0, 1, … , g – 1

При g >10 также используют необходимые цифры десятичной системы, а числа от десяти до g – 1 обычно записывают в виде соответствующих чисел, заключенных в круглые скобки: (10), (11), …, (g- 1).

Позиционные системы счисления

Система счисления - это совокупность правил для обозначения и наименования чисел.

Системы счисления делятся на позиционные и непозиционные.

Знаки, используемые при записи чисел, называются цифрами.

Арифметические действия над систематическими числами

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Это таблицы сложения и умножения чисел в пятеричной системе

Для выполнения действий пользуются составленными таблицами сложения и умножения.

Перевод целых чисел из одной позиционной системы в другую

Пусть дана g- ичная запись числа m.

$$m = k_n \cdot g^n + k_{n-1} \cdot g^{n-1} + \dots + k_1 \cdot g + k_0$$

Найти десятичную запись этого же числа.

Для решения этой задачи достаточно подставить в запись

$$m = k_n \cdot g^n + k_{n-1} \cdot g^{n-1} + \dots + k_1 \cdot g + k_0$$

вместо $k_n \ \mathrm{k}_{n-1} \dots k_0$ и g – десятичные записи этих чисел и выполнить действия. и g – десятичные записи этих чисел и выполнить действия.

Найти десятичную запись числа

- Найти десятичную запись числа

$$(10)6(11)_{12} = 10 \cdot 12^2 + 6 \cdot 12^1 + 11 \cdot 12^0 = 1523_{10}.$$

Перевод целых чисел из одной позиционной системы в другую

Пример 1.

1) Найти десятичную запись числа 4602_7

$$4602_7 = 4 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 1668_{10}.$$

2) Найти десятичную запись числа $(10)6(11)_{12}$.

$$(10)6(11)_{12} = 10 \cdot 12^2 + 6 \cdot 12^1 + 11 \cdot 12^0 = 1523_{10}.$$

3) Найти десятичную запись числа 4602_7

$$4602_7 = 4 \cdot 7^3 + 6 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 2 \cdot 7^0 = 1668_{10}.$$

Число 58 перевести в двоичную систему счисления.

Выполним деление 58 на 2.

Таким образом $58_{10} = 111010_2$

Двоичная система счисления

Официальное рождение двоичной арифметики связанно с именем Г.В. Лейбница, опубликовавшего в 1703 г. статью, в которой он рассмотрел правила выполнения арифметических действий над двоичными числами.

Двоичная система проста, так как для представления информации в ней используются всего два состояния или две цифры.

Представление информации в двоичной системе использовалось человеком с давних времен.

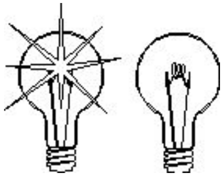
Так, жители островов Полинезии передавали необходимую информацию при помощи барабанов: чередование звонких и глухих ударов.

Единица – вздор. Единица – ноль."
В. Маяковский

Для электронных машин характерно наличие двух различных устойчивых состояний (есть ток- нет тока, намагничен – не намагничен).

Поэтому для изображения чисел в вычислительных машинах требуется такая система, в которой имеются лишь две различные цифры т.е. двоичная система счисления.

"***Единица"*** условно обозначает включенное состояние,
а "***нуль"*** - выключенное состояние.



Почему люди пользуются десятичной системой, а компьютеры — двоичной?

Компьютеры используют двоичную систему потому, что она имеет ряд преимуществ перед другими системами:

- для ее реализации нужны технические устройства с двумя устойчивыми состояниями (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.), а не, например, с десятью, — как в десятичной
- представление информации посредством только двух состояний надежно и помехоустойчиво;
- двоичная арифметика намного проще десятичной.

Решение задач в различных системах счисления

«Необыкновенная девочка» А.Н.Стариков

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила –
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно…
Но станет все сейчас обычным,
Когда поймете мой рассказ

Решение.

«Ей было тысяча сто лет»

$1100 = 1 * 2^3 + 1 * 2^2+0*2+0*2^0 = 8 + 4 = 12$ лет

«Она в сто первый класс ходила»

$101 = 1*. 2^2 +0*2+ 1*2^0 = 4 + 1 = 5$ класс

«…пыля десятком ног»

$10 =1* 2+0*2^0 = 2$ ноги

«С одним хвостом, зато стоногий»

$1 = 1*2^0 = 1$ хвост,

$100 = 1*2^2+0*2+0*2^0 = 4$ ноги

и т.д.

Ответ: двоичная с/с.

Ей было 12 лет,
Она в 5 класс ходила,
В портфеле по четыре книги носила.
Все это правда, а не бред.
Она ловила каждый звук
Своими двумя ушами,
И две загорелые руки
Портфель и поводок держали.
Когда, пыля двумя ногами,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато четырехногий.
И двое темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно …
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

Загадочная автобиография

В бумагах одного математика была найдена странная автобиография:

«Я окончил курс университета 44 лет отроду. Спустя год, 100- летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте – всего 11 лет способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного времени у меня уже была маленькая семья из 10 детей. Жалованья я получал в месяц всего 200 руб., из которых 1/10 приходилось отдавать сестре, так, что мы жили на 130 руб. в месяц.»

Расшифруйте автобиографию.

Решение: Запись выполнена в пятеричной системе. Выполним перевод чисел в десятеричную систему:

44 = 4 5+ 4 =24, аналогично 100 = 1 5 +0 5 +0= 25, 34 = 3 5+ 4 =19, 11= 1 5+1= =6, 200 = 2 5+ 0 5+ 0= 50, 10 = 5, 1/10 = 1/5, 130 = 1 5 + 3 5 + 0 = 40.

Записка имеет следующее содержание:

«Я окончил курс университета 24 лет отроду . Спустя год, 25-летним молодым человеком, я женился на 19-летней девушке. Незначительная разница в возрасте – всего 6 лет способствовала тому, что мы жили общими интересами и мечтами. Спустя немного времени у меня уже была маленькая семья из 5 детей. Жалованья я получал в месяц всего 50 руб., из которых 1/5 приходилось отдавать сестре, так , что мы жили на 40 руб. в месяц.».

Задача

Один школьный учитель на наш вопрос -много ли у него в классе учеников, ответил: «У меня в классе 100 детей, из них 24 мальчика и 32 девочки».

Сначала его ответ нас удивил. Но потом мы поняли, что просто учитель пользовался не десятичной системой. Какую систему имел в виду учитель?

Решение:

Пусть x- основание системы счисления о которой идет речь.

Тогда слова учителя означают следующее: у него

$100_x=1\ x^2+0\ x+0=x^2$ учеников, из них $24_x=2x+4$ мальчика и $32_x=3x+2$ девочки. Таким образом, $2x+4+3x+2=x^2$,

Решим уравнение

x^2-5x-6=0,

$$x^2-2\cdot x\cdot 2{,}5+2{,}5^2-6-2{,}5^2=0,$$

$$(x-2{,}5)^2-6{,}25-6=0,$$

$$(x-2{,}5)^2-12{,}25=0,$$

$$(x-2{,}5)^2-3{,}5^2=0,$$

$$(x-2{,}5-3{,}5)\cdot(x-2{,}5+3{,}5)=0,$$

$$(x-6)\cdot(x+1)=0,$$

$x-6=0$ или $x+1=0$

x=6, x= -1.

Так как -1 не может быть основанием системы счисления, то x=6. Итак, ответ учителя был дан в шестеричной системе; при этом было 1 36=36 учеников. Из них 2 6+4=16 мальчиков и 3 6+2=20 девочек.