



# Решение логарифмических неравенств

*(Рекомендации по выполнению задания С3)*

*При решении логарифмических неравенств можно использовать условия равносильности. Преимущество использования условий равносильности по сравнению с обычным способом решения состоит в том, что не надо думать о том, большим или меньшим единицы является основание. Это особенно важно при решении заданий ЕГЭ, когда время для их решения ограничено.*



Для неравенств вида  
 $\log_a f(x) > 0 (< 0)$ ;  
 $\log_a f(x) \geq 0 (\leq 0)$   
существует

Правило 1: Знак  $\log_a f(x)$  совпадает со  
знаком произведения  
 $(a - 1)(f(x) - 1)$  в ОДЗ.

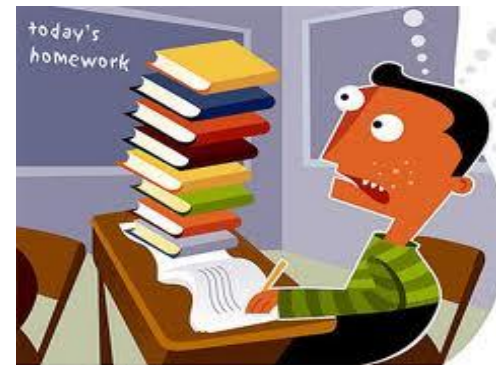
***Используя это правило, можно записать  
условие равносильности, включающее  
ОДЗ***

• *для строгих логарифмических  
неравенств:*

$$\log_a f(x) > 0 (< 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ (a - 1)(f(x) - 1) > 0 (< 0). \end{cases}$$

• для нестрогих логарифмических неравенств:

$$\log_a f(x) \leq 0 (\geq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ (a - 1)(f(x) - 1) \leq 0 (\geq 0). \end{cases}$$



Для логарифмических неравенств вида  $\log_a f(x) > \log_a g(x)$  и более сложных существует

**Правило 2. Знак разности  $\log_a f(x) - \log_a g(x)$  совпадает со знаком произведения  $(a - 1)(f(x) - g(x))$  в ОДЗ.**

*Используя Правило 2, можно записать условие равносильности, включающее ОДЗ для неравенств вида:*

$$\log_a f(x) > (<) \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ (a - 1)(f(x) - g(x)) > 0 (< 0). \end{cases}$$

*Также можно очень просто решить более сложные неравенства, используя Правило 2, например:*

$$\frac{\log_a f(x) - \log_a g(x)}{h(x)} \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow \frac{(a - 1)(f(x) - g(x))}{h(x)} \geq 0 (\leq 0)$$

*в ОДЗ.*



*Очень важно, что освобождение от всех логарифмов происходит за один шаг. Использование данных правил сводит решение логарифмических неравенств к рациональным (дробно-рациональным) неравенствам, которые решаются методом интервалов.*



*Рассмотрим применение  
Правила 1 на примере.*



*Решим логарифмическое неравенство:*

$$\frac{\log_3 \left( x + \frac{4}{5} \right)}{\log_7 \left( x^2 - 2x + \frac{7}{16} \right)} < 0$$

*Найдем ОДЗ:*

$$\begin{cases} x + \frac{4}{5} > 0, \\ x^2 - 2x + \frac{7}{16} > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{4}{5}, \\ (x - \frac{7}{4})(x - \frac{1}{4}) > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{4}{5}, \\ x < \frac{1}{4}, \\ x > \frac{7}{4}. \end{cases}$$

*Применяя метод интервалов, найдем общее решение данной системы:*

$$\left(-\frac{4}{5}; \frac{1}{4}\right) \boxtimes \left(\frac{7}{4}; \infty\right)$$

## По Правилу 1

**знак**  $\log_3\left(x + \frac{4}{5}\right)$

**совпадает со знаком произведения**  $(3-1)\left(x + \frac{4}{5} - 1\right)$

**а знак**  $\log_7\left(x^2 - 2x + \frac{7}{16}\right)$

**со знаком**  $(7-1)\left(x^2 - 2x + \frac{7}{16} - 1\right)$

**Поэтому в ОДЗ имеем:**

$$\frac{\log_3\left(x + \frac{4}{5}\right)}{\log_7\left(x^2 - 2x + \frac{7}{16}\right)} < 0 \quad \frac{(3-1)\left(x + \frac{4}{5} - 1\right)}{(7-1)\left(x^2 - 2x + \frac{7}{16} - 1\right)} < 0;$$

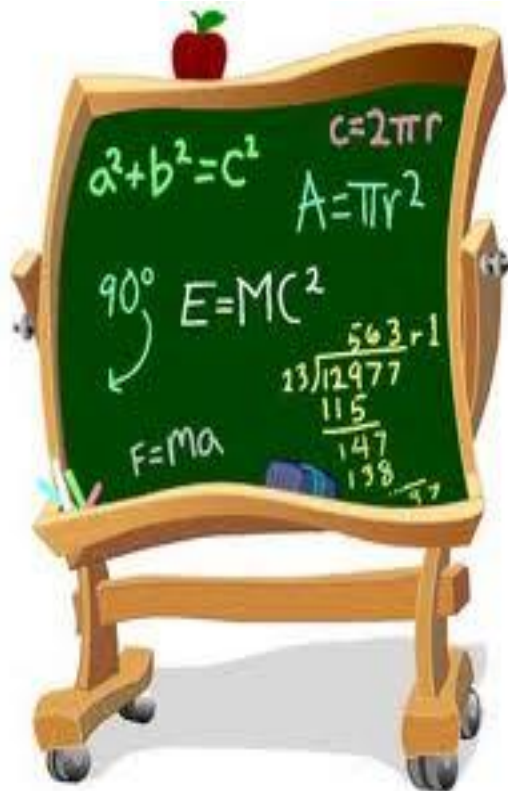
$$\frac{x - \frac{1}{5}}{x^2 - 2x - \frac{9}{16}} < 0; \quad \frac{x - \frac{1}{5}}{\left(x + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{9}{4}\right)} < 0$$

*Применяя метод интервалов, получим решение данного неравенства:*

$$\left(\infty; -\frac{1}{4}\right) \boxtimes \left(\frac{1}{5}; \frac{9}{4}\right)$$

*Найдем общее решение исходного неравенства с учетом ОДЗ.*

*Ответ:*  $\left(-\frac{4}{5}; -\frac{1}{4}\right) \boxtimes \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right) \boxtimes \left(\frac{7}{4}; \frac{9}{4}\right)$



*Таким образом, использование данных правил, позволяет просто справиться с логарифмическими неравенствами, решение которых обычным способом потребует гораздо больше вычислений.*





Спасибо за внимание!

