

***Лекция 3.***  
***ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ***  
***ОПОРНЫЕ СЕТИ***

**1. Назначение, виды и особенности построения опорных геодезических сетей.**

**2. Системы координат и высот, применяемые в инженерно-геодезических работах**

# **1. Назначение, виды и особенности построения опорных геодезических сетей.**

Опорные сети создаются для обеспечения всех видов инженерно-геодезических работ.

Их пункты хранят на территории работ плановые координаты и высоты.

Эти сети служат основой:

- для производства топографических съемок при изысканиях;
- для выполнения различных работ на территории городов;
- при составлении исполнительной документации;
- для выполнения разбивочных работ при строительстве зданий и сооружений;
- для наблюдений за деформациями оснований сооружений и самих сооружений.

Инженерно-геодезические плановые и высотные опорные сети представляют собой систему геометрических фигур, вершины которых закреплены на местности специальными знаками.

Плановые и высотные опорные сети создают в соответствии с заранее разработанным проектом производства геодезических работ.

При составлении этого проекта собирают сведения, относящиеся к опорным геодезическим сетям во всех организациях, производящих работы на территории предстоящего строительства, а также специальных геодезических организациях.

По собранным материалам составляют схему расположения пунктов ранее выполненных опорных сетей всех классов и разрядов в пределах территории предстоящих работ.

В геодезической практике достаточно часто сеть создают заново, даже при наличии близкорасположенных пунктов ранее созданных сетей.

Поступают так с целью обеспечения повышенной точности определения взаимного положения пунктов.

Инженерно-геодезические опорные сети обладают рядом характерных особенностей:

а) сети часто создаются в условной системе координат;

б) форма сети определяется обслуживаемой территорией или формой объектов;

в) сети имеют ограниченные размеры, часто с незначительным числом фигур или полигонов;

г) короткие длины сторон;

д) к пунктам сети предъявляются повышенные требования по стабильности их положения;

е) неблагоприятные условия наблюдений.

Выбор вида построения и его конфигурация зависит от следующих причин:

- типа объекта, его формы и занимаемой площади;
- назначения сети;
- физико-географических условий;
- требуемой точности;
- наличия измерительных средств у исполнителя.

Так, триангуляцию применяют на объектах, значительных по площади и протяженности, проектируемых в открытой пересеченной местности.

Полигонометрию используют на закрытой местности или застроенной территории.

Линейно-угловые сети – при необходимости создания сетей повышенной точности.

Трилатерацию – на небольших объектах, где требуется высокая точность.

Строительные сетки – на промышленных площадках.

Высотные опорные сети, в основном, создают методом геометрического нивелирования в виде одиночных ходов или полигонов, проложенных между исходными реперами.

В отдельных случаях, при наличии электронных тахеометров, может применяться способ тригонометрического нивелирования.

## **2. Системы координат и высот, применяемые в инженерно-геодезических работах**

Государственные геодезические сети до их уравнивания должны быть отнесены на какую-то поверхность относимости (референц-эллипсоид Красовского).

Для этого в сетях 1 и 2 класса в измеряемые элементы вводятся редуционные поправки.

Проектирование всех последующих сетей сгущения осуществляется на единой поверхности относимости.

Редукционные поправки вводят при выполнении геодезических измерений для того, чтобы получить результаты без искажений.

Существуют две поправки:

- поправка за отнесение базисной стороны на поверхность относимости;
- поправка в длину линии при переходе на плоскость.

В качестве поверхности относимости принимают средний уровень строительной площадки.

В гражданских зданиях - это уровень первого этажа, на трассах метрополитена - уровень оси тоннеля или головок рельсового пути и др.

В целях картографирования геодезические сети проецируются на плоскость в проекции Гаусса-Крюгера (на территории стран СНГ).

В инженерно-геодезических работах применяют государственные системы координат (СК-42, СК-63, СК-95) и местные системы координат.

Для современных промышленных комплексов применяется частная (условная) система координат, начало координат которой не совпадает с началом государственной системы координат, а ее оси развернуты относительно осей государственной системы координат.

Высотные сети (государственные и инженерно-геодезические) проектируют и создают в единой системе высот.

За начало высот принят средний уровень Балтийского моря.

Этот уровень отмечен горизонтальной чертой на медной металлической пластине, укрепленной в устье моста через обводной канал в Кронштадте.

Основным методом создания высотных сетей является геометрическое нивелирование.

При определении разности высот поверхности земли методом геометрического нивелирования возникает некоторая неопределенность в значении превышений вследствие того, что уровенные поверхности различных точек Земли не параллельны между собой.

Это обусловлено неравномерностью распределения масс земной коры и суточным вращением Земли.

В зависимости от принципа учета непараллельности уровенных поверхностей различают **нормальные**, **динамические** и **ортометрические высоты**.

По предложению М.С. Молоденского, принята система нормальных высот.

Нормальные высоты точек отсчитываются по направлениям отвесных линий от поверхности квазигеоида, которая близка к поверхности геоида.

Динамическую систему высот целесообразно применять для инженерно-технических расчетов, связанных с учетом работы, совершаемой в гравитационном поле Земли, в метеорологии.

Для вычисления результатов нивелирования при создании государственных геодезических сетей динамические высоты не применяются.

**ТЕМА:**

**«ОПРЕДЕЛЕНИЕ  
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ПУНКТОВ»**

**1. Снесение координат с вершин  
знака на землю.**

**2. Прямая засечка.**

**3. Обратная засечка.**

**4. Линейная засечка.**

# 1. Снесение координат с вершин знака на землю.

Дополнительные пункты определяются наряду со съемочной сетью в основном для сгущения существующей геодезической сети пунктами съемочного обоснования.

Они строятся **прямыми, обратными, комбинированными угловыми**, а при наличии электронных дальномеров – **линейными засечками и лучевым методом.**

В некоторых случаях дополнительный пункт определяется **передачей (сносением) координат с вершины знака на землю.**

При привязке полигонометрического (теодолитного) хода к пункту триангуляции, на котором нельзя установить прибор, выбирают на земле вблизи этого пункта **A** (на расстоянии 50–100 м от него) точку **P**.

в таком месте, чтобы, кроме пункта **A** были видны два удаленных пункта исходной сети **B** и **C** (один из них необходим для контроля) и удобно было измерить два базиса для определения неприступного расстояния **AP**.



Второй базис  $b'$  и углы при нем  $\beta'_1, \beta'_2$ , используют для контроля определения расстояния  $AP$  и повышения точности получения окончательного его значения.

**Рассмотрим решение задачи по этапам.**

**1. Вычисление дирекционных углов  $(AB), (AC)$  и расстояний  $AB=s, AC=s'$ .**

Имея координаты пунктов  $A$  и  $B$ , вычисляют дирекционный угол  $(AB)$

$$(AB) = \arctg \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \quad (1)$$

и расстояние  $AB = s$

$$s = \frac{Y_B - Y_A}{\sin(AB)} = \frac{X_B - X_A}{\cos(AB)} \cdot (2)$$

Если полученные значения  $s$  различаются на две единицы последнего знака, то за окончательное принимают среднее арифметическое.

Точно так же определяют дирекционный угол  $(AC)$  и расстояние  $AC$ .

Иногда дирекционные углы  $(AB)$ ,  $(AC)$  и расстояния  $AB$ ,  $AC$  бывают известны из материалов исходной геодезической сети.

## 2. Вычисление расстояния $AP=d$ .

Недоступное расстояние  $AP = d$  определяют дважды:

$$d_1 = \frac{b \sin \beta_2}{\sin \gamma}; \quad d_2 = \frac{b' \sin \beta'_2}{\sin \gamma'}; \quad (3)$$

где

$$\gamma = 180^\circ - (\beta_1 + \beta_2),$$
$$\gamma' = 180^\circ - (\beta'_1 + \beta'_2).$$

Разность  $|d_1 - d_2|$  не должна превышать  $2d \frac{1}{T}$

где  $\frac{1}{T}$  – предельная относительная погрешность измерения базисов  $b$  и  $b'$ .

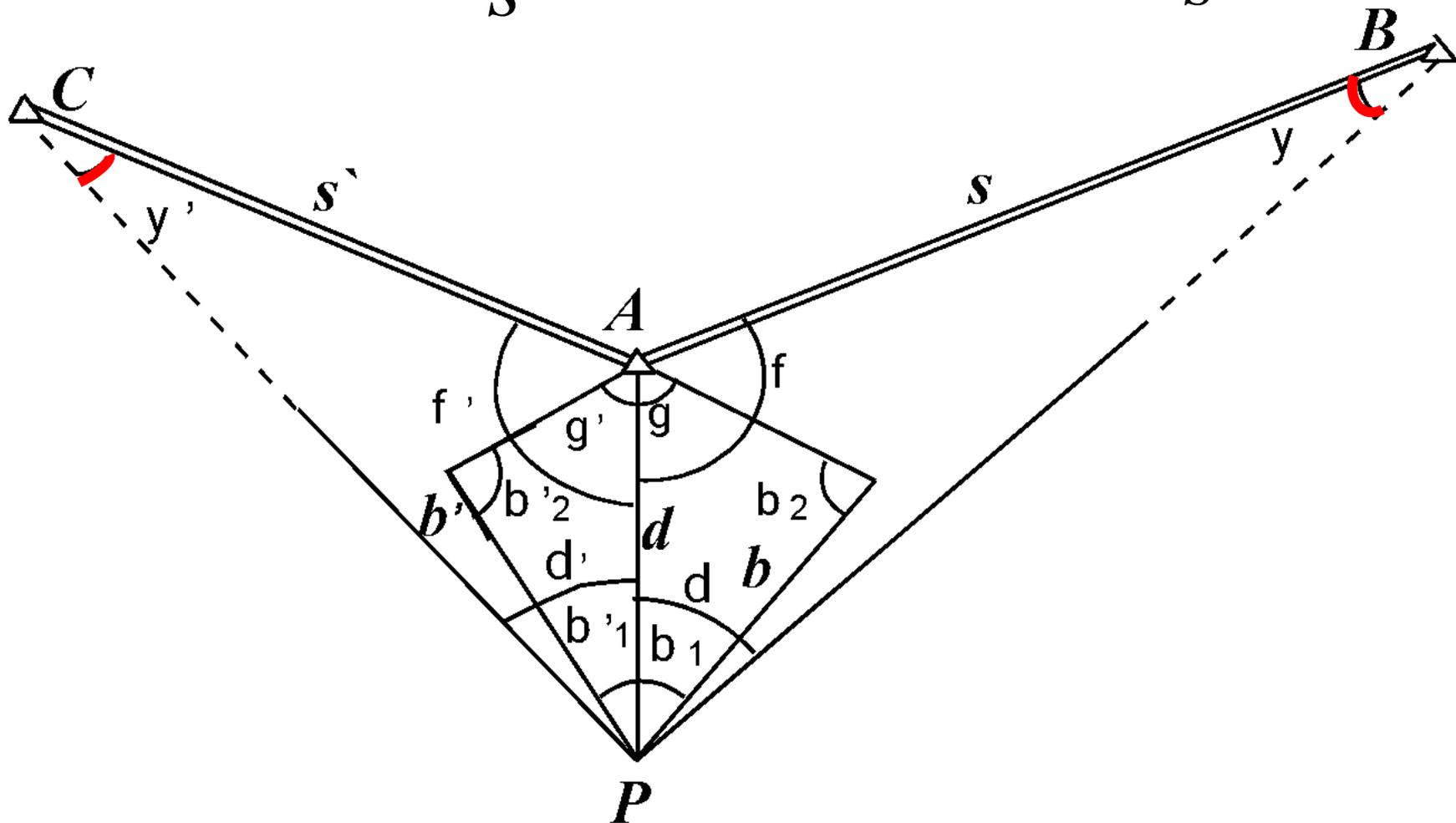
За окончательное значение расстояния  $AP$  принимают среднее арифметическое значение

$$d = \frac{d_1 + d_2}{2}. \quad (4)$$

### 3. Вычисление дирекционного угла (AP).

Решая треугольники  $ABP$  и  $ACP$ , находят

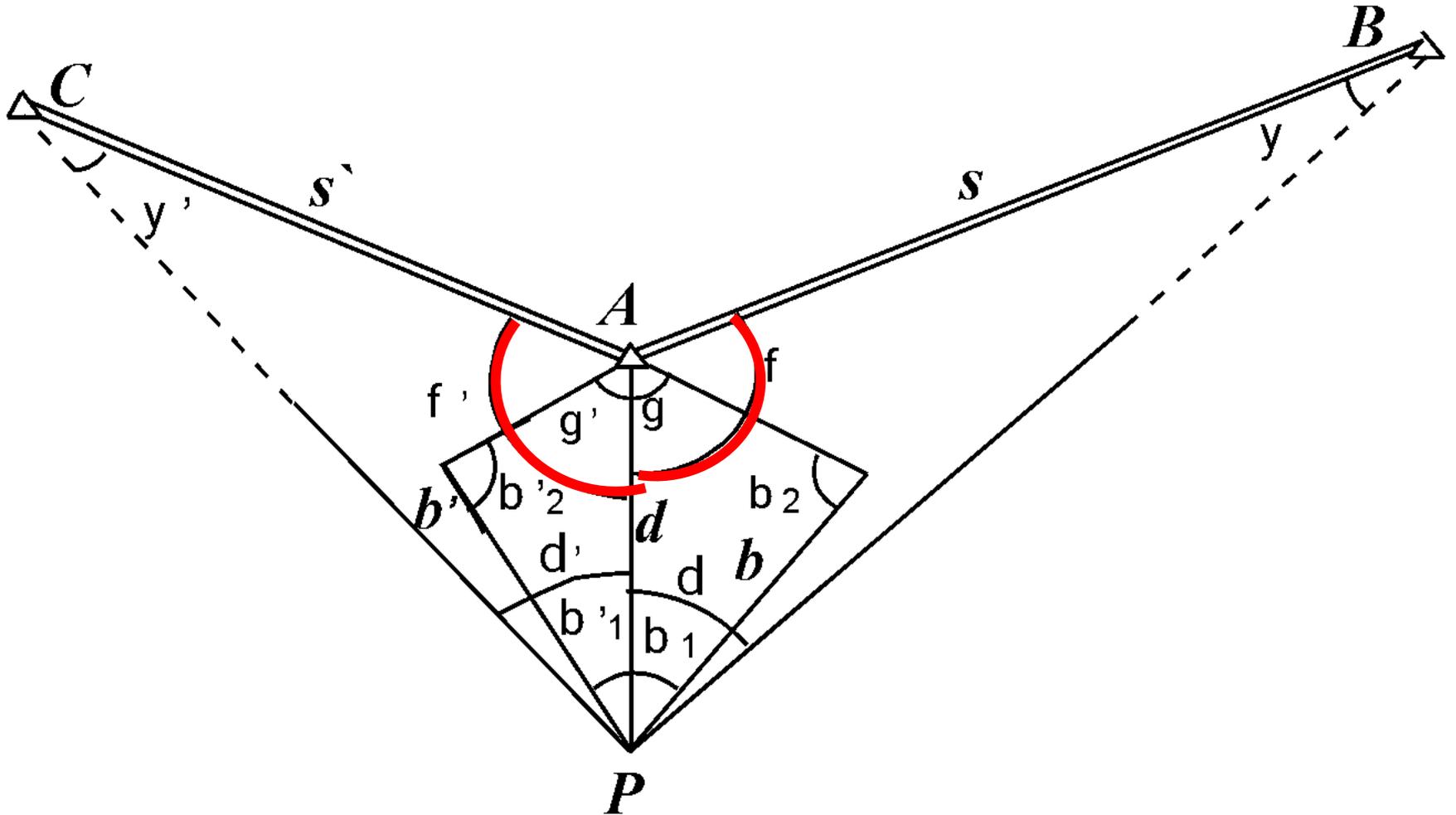
$$\psi = \arcsin \frac{d \sin \delta}{s}; \quad \psi' = \arcsin \frac{d \sin \delta'}{s'} \quad (5)$$



Затем вычисляют вспомогательные углы  $\varphi$  и

$\varphi'$

$$\varphi = 180^0 - (\delta + \psi), \quad \varphi' = 180^0 - (\delta' + \psi'). \quad (6)$$



По этим углам определяют два значения дирекционного угла **(AP)**

$$(AP)_1 = (AB) + \varphi, \quad (AP)_2 = (AC) - \varphi'. \quad (7)$$

Расхождение между значениями **(AP)<sub>1</sub>** и **(AP)<sub>2</sub>** должно удовлетворять неравенству

$$\omega = |(AP)_1 - (AP)_2| < 6m, \quad (8)$$

где **m** – средняя квадратическая погрешность измерения угла.

## 4. Вычисление координат точки P

По расстоянию  $AP = d$  и дирекционному углу  $(AP)$  находят, приращения координат

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_1 &= d \cos(AP)_1; & \Delta Y_1 &= d \sin(AP)_1 \\ \Delta X_2 &= d \cos(AP)_2; & \Delta Y_2 &= d \sin(AP)_2 \end{aligned} \right\} (9)$$

Затем вычисляют координаты точки P

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= X_A + \Delta X_1; & Y_1 &= Y_A + \Delta Y_1 \\ X_2 &= X_A + \Delta X_2; & Y_2 &= Y_A + \Delta Y_2. \end{aligned} \right\} (10)$$

За окончательные значения координат принимают средние арифметические значения

$$X = \frac{X_1 + X_2}{2}; \quad Y = \frac{Y_1 + Y_2}{2}. \quad (11)$$

## 5. Оценка точности положения точки ***P***.

Средней квадратической ошибкой положения точки называется средняя величина смещения относительно ее точного положения и определяемая в общем случае соотношением

$$M = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}. \quad (12)$$

Для данного случая можно использовать формулу

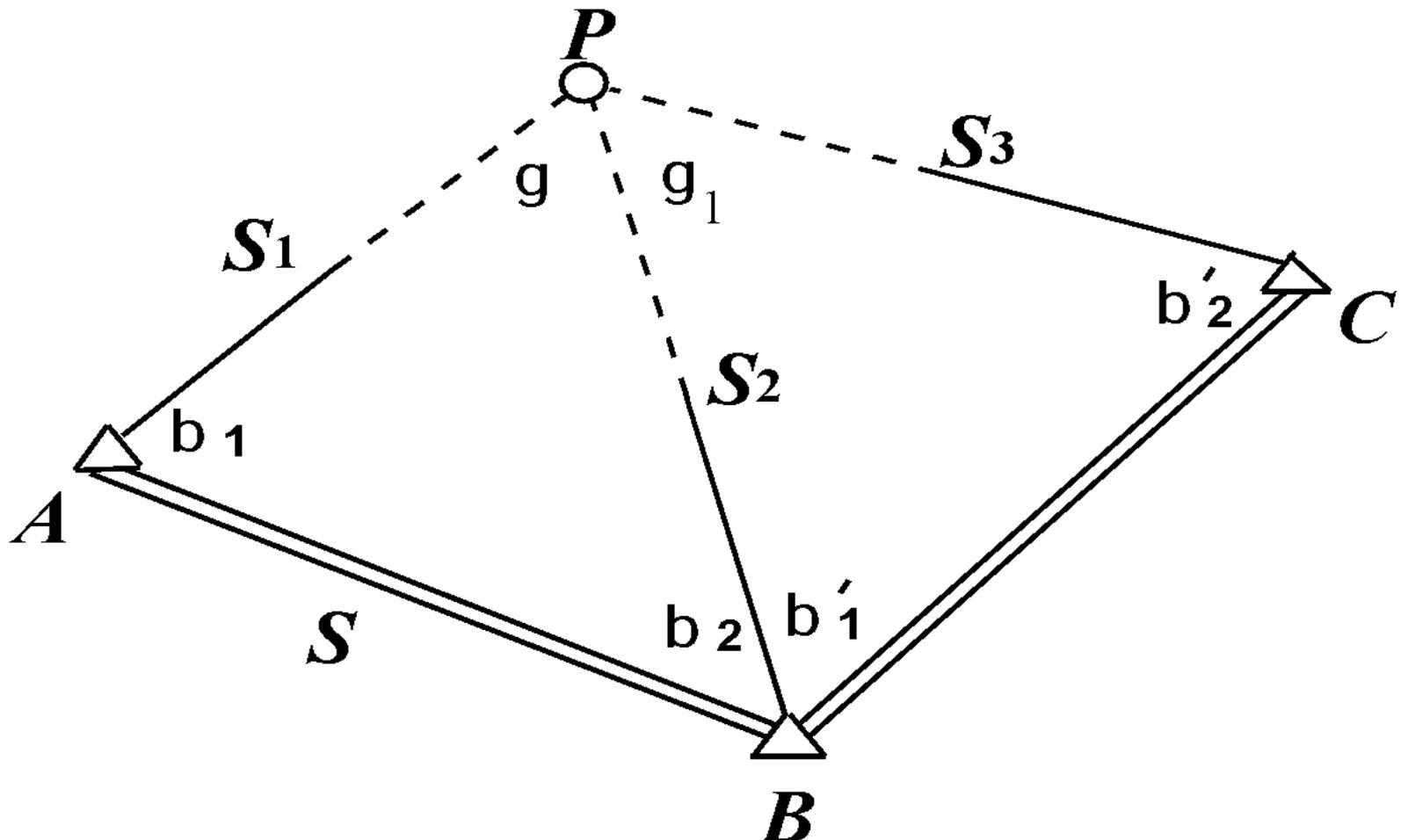
$$M = d \sqrt{\left(\frac{m_b}{b}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_\beta}{\rho}\right)^2}. \quad (13)$$

## 2. Прямая засечка.

Для решения прямой засечки, заключающейся в определении координат третьего пункта по координатам двух исходных пунктов и измеренным при них углам, предложено много различных формул.

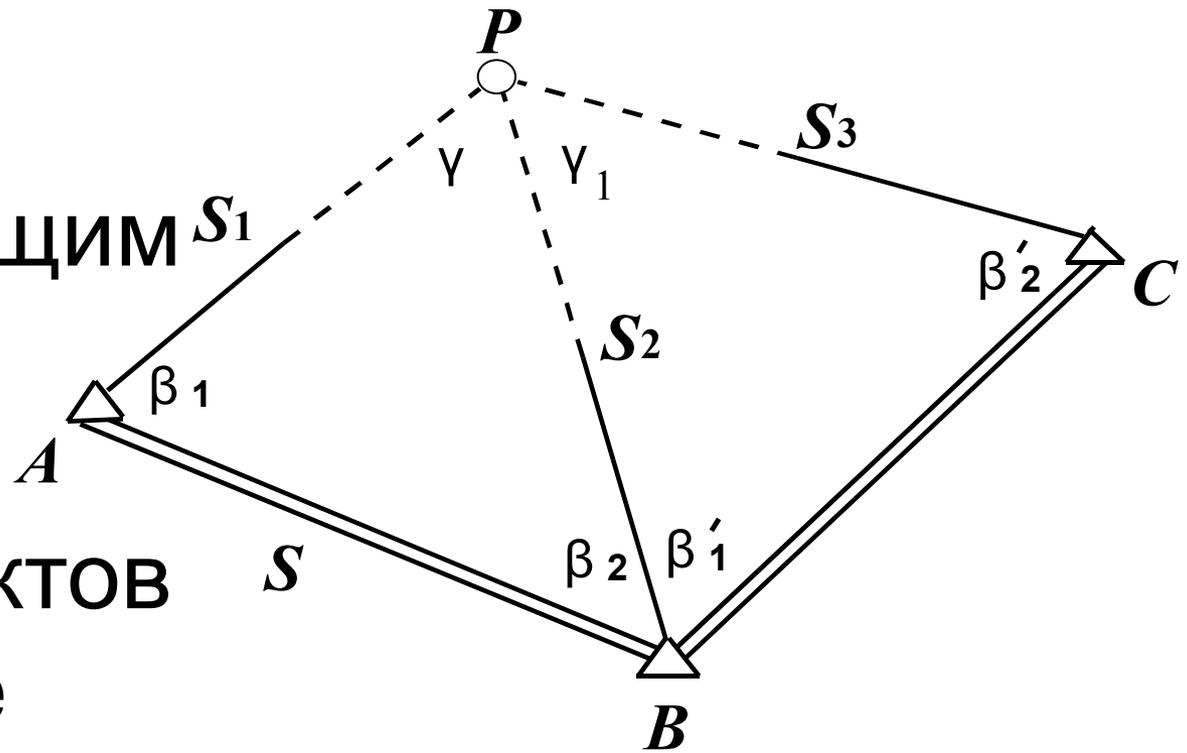
## a) Формулы Юнга

Даны координаты точек  $A, B, C$ . Измерены углы  $\beta_1, \beta_2, \beta_1', \beta_2'$ . Требуется определить координаты точки  $P(x, y)$ .



Если встать между исходными пунктами и смотреть на определяемый пункт  $P$ , то пункт  $A$  будет левым, а  $B$  – правым.

Условимся обозначать соответствующим  $S_1$  и индексами координаты исходных пунктов и измеренные углы.



Тогда **формулам Юнга** можно придать следующий вид:

$$X_P = \frac{X_\Lambda \operatorname{ctg}\Pi + X_\Pi \operatorname{ctg}\Lambda - Y_\Lambda + Y_\Pi}{\operatorname{ctg}\Lambda + \operatorname{ctg}\Pi}, \quad (14)$$

$$Y_P = \frac{Y_\Lambda \operatorname{ctg}\Pi + Y_\Pi \operatorname{ctg}\Lambda + X_\Lambda - X_\Pi}{\operatorname{ctg}\Lambda + \operatorname{ctg}\Pi}, \quad (15)$$

где  $\Lambda$  и  $\Pi$  – значения углов при левом и правом пунктах ( $\Lambda = \beta_1$ ,  $\Pi = \beta_2$ ).

В целях контроля находят угол

$$\gamma = 180^{\circ} - \beta_1 - \beta_2,$$

а затем по координатам пункта ***V*** (левый) и координатам пункта ***P*** (правый) по формулам (14) и (15) вычисляют координаты пункта ***A***, которые должны совпадать с заданными.

Для полного контроля полевых измерений и выписки исходных данных нужно решить, задачу, используя координаты точек ***B*** и ***C***.

Расхождение между абсциссами и ординатами при первом и втором решении должны удовлетворять условию

$$r = \sqrt{(X' - X'')^2 + (Y' - Y'')^2} \leq 3M_r; \quad (16)$$

где  $M_r$  – среднее квадратическое расхождение в положении пункта  $P$  из двух решений.

$$\text{В свою очередь, } M_r = \sqrt{M_1^2 + M_2^2},$$

где  $M_1$  и  $M_2$  – СКО положения пункта  $P$  из первого и второго решения.

**СКО** положения пункта ***P***, определяемого прямой засечкой, вычисляется по формуле

$$M = \frac{m \sqrt{s_1^2 + s_2^2}}{\rho \sin \gamma}, \quad (18)$$

где ***m*** – СКО измерения углов;

***s*<sub>1</sub>** и ***s*<sub>2</sub>** – расстояние от исходных пунктов до определяемого (можно вычислить по координатам точек);

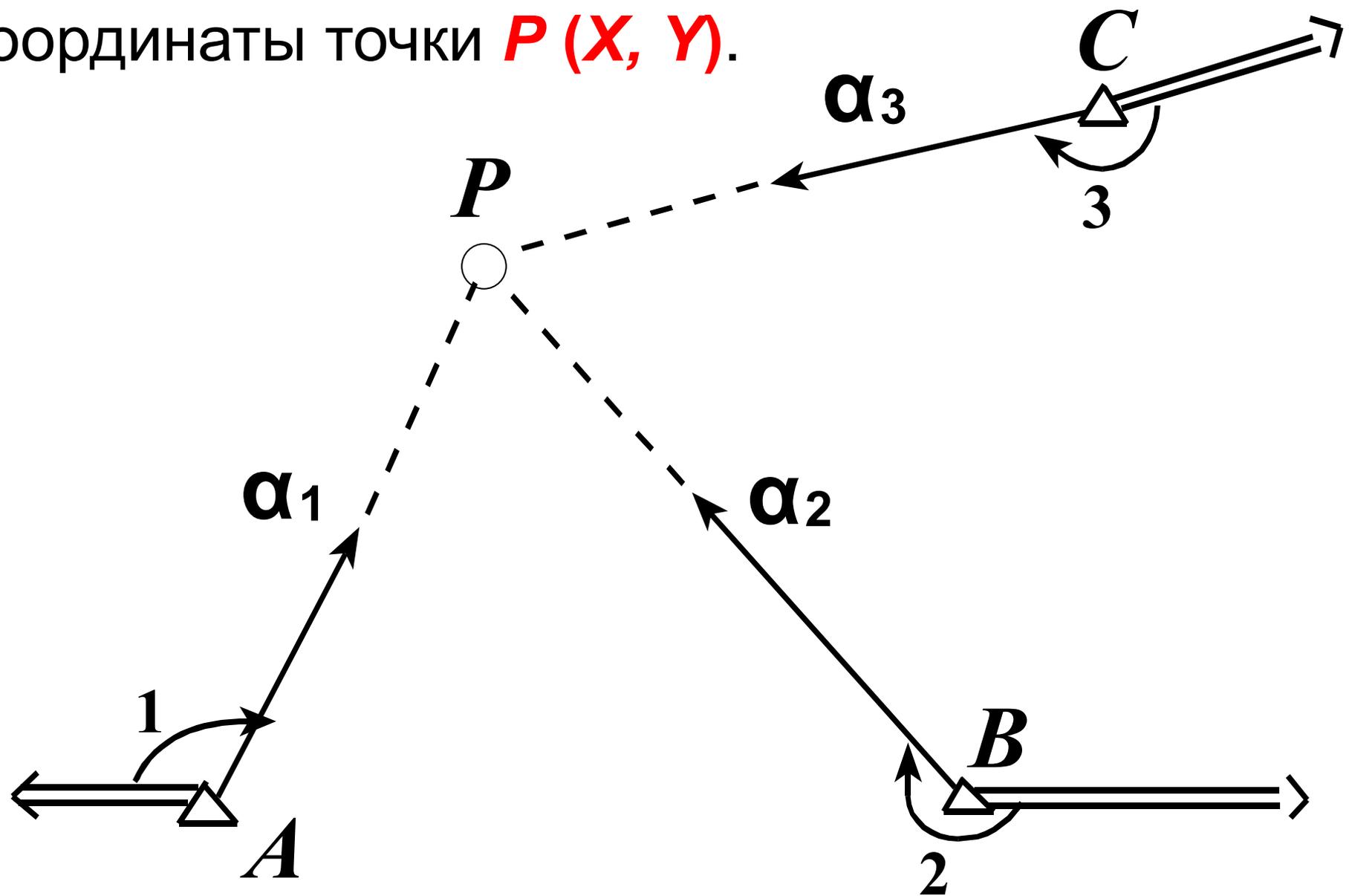
***γ*** – угол засечки.

## **б) Формулы Гаусса.**

При определении точки прямой засечкой может не быть видимости между смежными точками **A, B** и **C**.

В таком случае целесообразно пользоваться **формулами Гаусса**, в которые входят дирекционные углы направлений с данных пунктов на определяемый.

Известны координаты точек **A, B, C**.  
Измерены углы **1, 2, 3**. Требуется определить  
координаты точки **P (X, Y)**.



По измеренным углам и дирекционным углам направлений на другие исходные пункты, находим дирекционные углы направлений на определяемую точку  $\alpha_1, \alpha_2$  и  $\alpha_3$ .

Запишем соответствие  $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{Y - Y_A}{X - X_A}$ ,

откуда  $Y - Y_A = (X - X_A) \operatorname{tg} \alpha_1$ . **(19)**

Аналогично получим

$$Y - Y_B = (X - X_B) \operatorname{tg} \alpha_2. \quad \mathbf{(20)}$$

Найдем разность

$$Y_B - Y_A = X(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2) - X_A \operatorname{tg}\alpha_1 + X_B \operatorname{tg}\alpha_2.$$

Отсюда

$$X = \frac{X_A \operatorname{tg}\alpha_1 - X_B \operatorname{tg}\alpha_2 + Y_B - Y_A}{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}. \quad (21)$$

Вместо (19) и (20) можно записать

$$Y = Y_A + (X - X_A) \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (22)$$

$$Y = Y_B + (X - X_B) \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (23)$$

Нахождение ординат по двум формулам (22) и (23) позволяет проконтролировать вычисления.

Таким образом, формулы (21), (22) и (23) – формулы Гаусса для определения координат.

Для контроля правильности полевых измерений вычисляют координаты точки  $P$  вторично, используя другую пару исходных пунктов  $B$  и  $C$  и соответствующие дирекционные углы.

### 3. Обратная засечка (задача Потенота)

Сущность обратной засечки заключается в определении положения четвертого пункта (точки стояния) по трем исходным.

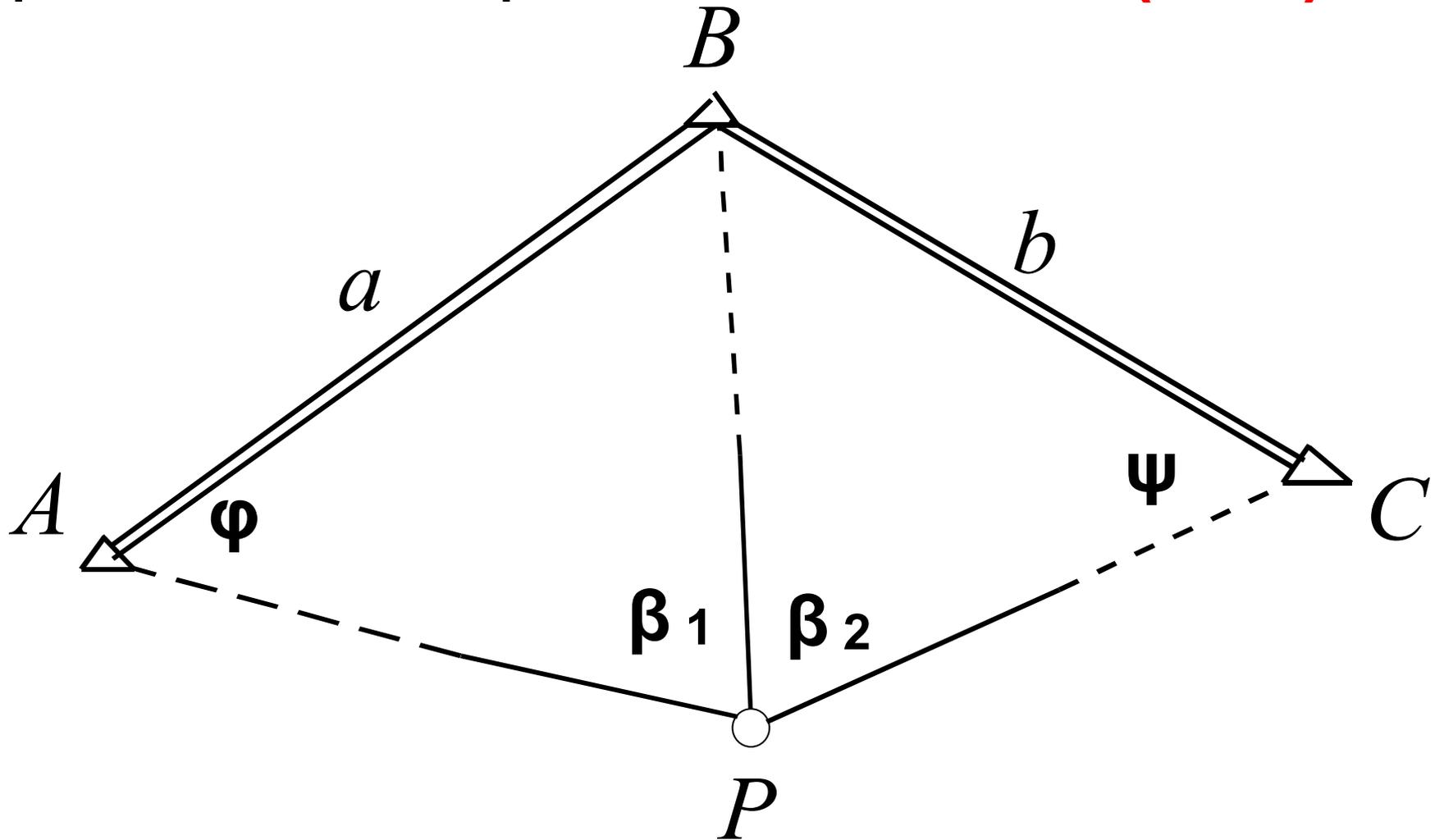
Эта задача встречается при создании съёмочных сетей, привязке аэрофотоснимков, выносе проектов в натуру и других случаях.

На основе трех исходных пунктов задача решается без контроля правильности измерения углов и выборки исходных данных. Поэтому на практике используют четыре исходных пункта.

Точность определения положения пункта обратной засечкой зависит от ошибок измерения углов, ошибок исходных данных и взаимного расположения пунктов.

Обратную засечку рекомендуется делать с предвычислением точности.

Даны координаты пунктов  $A, B, C$ .  
Измерены углы  $\beta_1, \beta_2$ . Требуется  
определить координаты точки  $P(X, Y)$ .



В начале решением обратных геодезических задач определим дирекционные углы и длины исходных линий:

$$(AB) = \operatorname{arctg} \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}; \quad (CB) = \operatorname{arctg} \frac{Y_B - Y_C}{X_B - X_C}$$

$$a = \frac{Y_B - Y_A}{\sin(AB)} = \frac{X_B - X_A}{\cos(AB)} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2},$$

$$b = \frac{Y_B - Y_C}{\sin(CB)} = \frac{X_B - X_C}{\cos(CB)} = \sqrt{(X_B - X_C)^2 + (Y_B - Y_C)^2}.$$

Далее задача сводится к определению углов  $\varphi$  и  $\psi$ .

Определим полусумму углов  $\varphi$  и  $\psi$ , которую обозначим как  $A$

$$\frac{1}{2}(\varphi + \psi) = \frac{1}{2}[360^\circ - \beta_1 - \beta_2 + (CB) - (AB)] = A$$

Определим полуразность этих углов, которую обозначим через  $B$

$$\frac{1}{2}(\varphi - \psi) = B.$$

Определим диаметры описанных окружностей около треугольников  $ABP$  и  $BCP$ :

$$D_1 = \frac{a}{\sin \beta_1}, \quad D_2 = \frac{b}{\sin \beta_2}.$$

Выразим сторону  $BP$  через  $D_1, D_2$  и углы  $\varphi$  и  $\psi$ .

$$BP = D_1 \sin \varphi, \quad BP = D_2 \sin \psi.$$

Откуда

$$D_1 \sin \varphi = D_2 \sin \psi.$$

Разделив две части этого равенства на  $D_1 \sin \psi$ , получим

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{\sin \varphi}{\sin \psi}$$

Образую пропорцию и введем обозначение  $N$ :

$$\frac{D_2 - D_1}{D_2 + D_1} = \frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = N.$$

С учетом формул для определения  $D_1$  и  $D_2$

$$N = \left( \frac{b}{\sin \beta_2} - \frac{a}{\sin \beta_1} \right) : \left( \frac{b}{\sin \beta_2} + \frac{a}{\sin \beta_1} \right).$$

С учетом тригонометрических формул

$$\frac{\sin \varphi - \sin \psi}{\sin \varphi + \sin \psi} = \frac{2 \cos \frac{\varphi + \psi}{2} \sin \frac{\varphi - \psi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2}} = \operatorname{ctg} A \operatorname{tg} B = N.$$

Отсюда

$$B = \operatorname{arctg}(N \operatorname{tg} A)$$

Вычислив значения **A** и **B**, определим углы  **$\varphi$**  и  **$\psi$**

$$\begin{aligned}\varphi &= A + B, \\ \psi &= A - B.\end{aligned}$$

Далее определим длину линии **AP**

$$AP = \frac{a}{\sin \beta_1} \sin(\varphi + \beta_1)$$

Координаты точки **P**:

$$X_P = X_A + AP \cos[(AB) + \varphi],$$

$$Y_P = Y_A + AP \sin[(AB) + \varphi].$$

Для контроля координат точки **P** можно вычислить второй раз, используя формулы

$$CP = \frac{b}{\sin \beta_2} \sin(\psi + \beta_2)$$

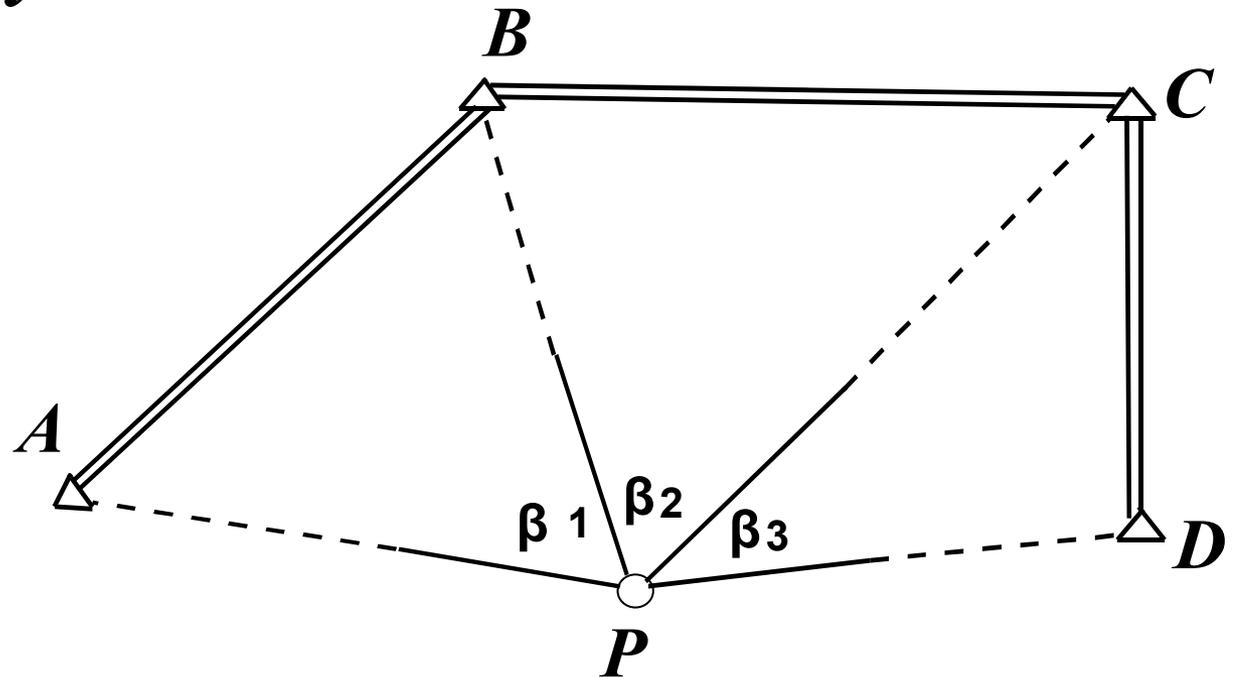
$$X_P = X_C + CP \cos[(CB) - \psi],$$

$$Y_P = Y_C + CP \sin[(CB) - \psi].$$

Рассмотренная обратная засечка *по трем исходным пунктам* называется *однократной*.

В таком виде она, как правило, не допускается, т.к. не контролируется правильность измерения углов и выписка исходных данных.

Для полного контроля наблюдается не 3, а минимум *4 пункта*.



Задача решается дважды при  
различном сочетании исходных пунктов.  
Например, первый раз используются  
пункты **A, B, C** и второй раз пункты **B, C,**  
**D**.

Для каждого варианта решения  
определяется СКО положения пункта **M**

Ожидаемое среднее квадратическое  
значение **M<sub>r</sub>** расхождения в положении  
пункта **P** при двух решениях  $M_1^2$  и  $M_2^2$  составит

Отсюда допустимое расхождение в значениях вычисленных координат можно установить по формуле

$$\sqrt{(X' - X'')^2 + (Y' - Y'')^2} < 3M_r,$$

где  $X', Y'$  – координаты точки из 1-го решения;  
 $X'', Y''$  – координаты точки из 2-го решения.

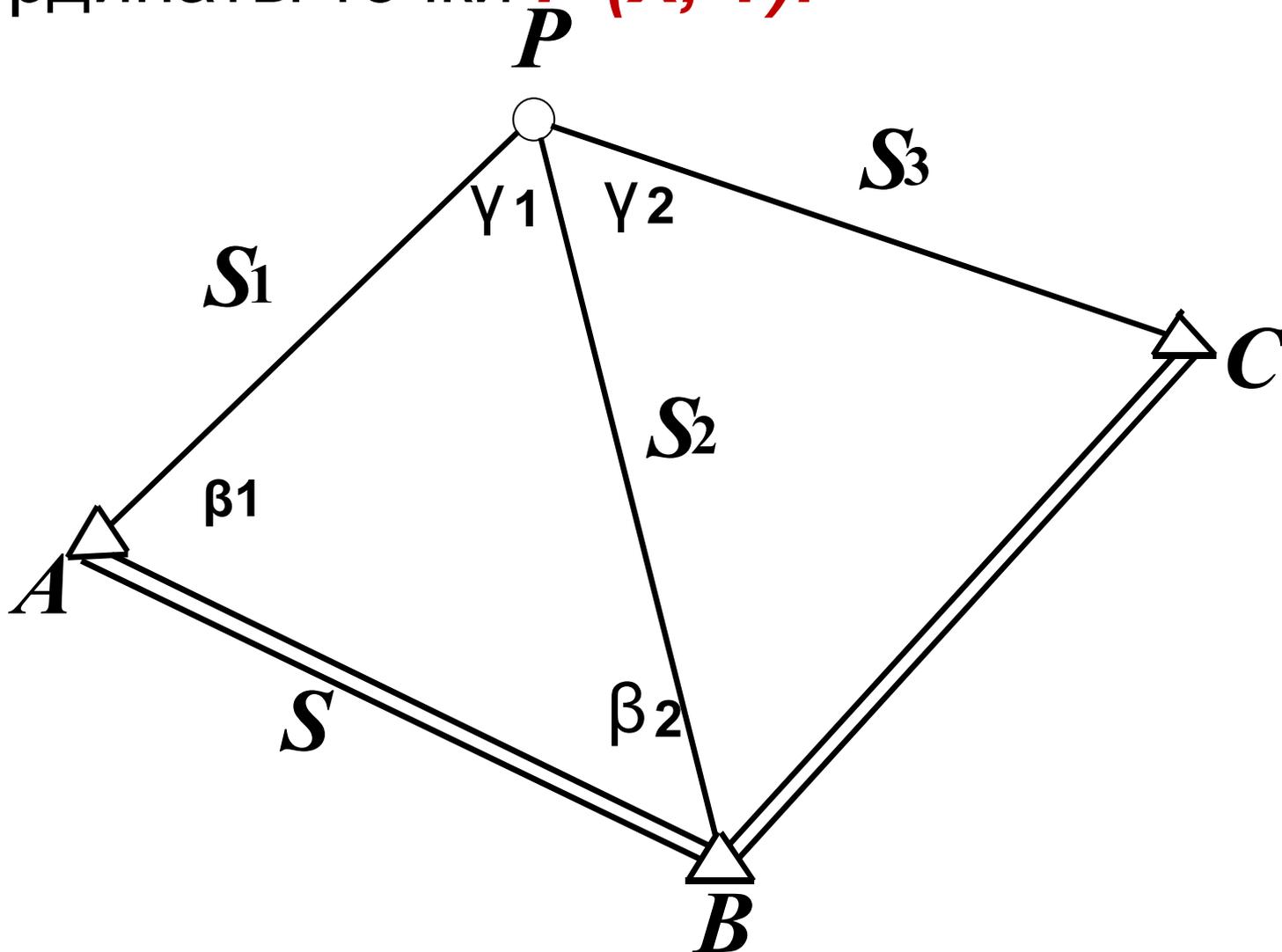
За окончательное значение координат пункта  $P$  берут среднее арифметическое, которое будет иметь ошибку

$$M = \frac{M_r}{2}.$$

## 4. Лине́йная засечка.

Задача линейной засечки заключается в определении координат третьего пункта по координатам двух исходных пунктов и измеренным расстояниям от определяемого пункта до исходных (однократная засечка).  
Для контроля определения используются координаты третьего исходного пункта и расстояния до него от определяемого.

Даны координаты пунктов  $A, B, C$ . Измерены линии  $S_1, S_2, S_3$ . Требуется определить координаты точки  $P(X, Y)$ .



Рассмотрим однократную засечку с использованием пунктов **A** и **B**.

1. Решением обратной геодезической задачи определим дирекционный угол и длину линии **AB**:

$$(AB) = \operatorname{arctg} \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}$$

$$S = \frac{Y_B - Y_A}{\sin(AB)} = \frac{X_B - X_A}{\cos(AB)} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}.$$

2. Определим угол  $\beta_1$ , используя теорему косинусов:

$$S_2^2 = S^2 + S_1^2 - 2SS_1 \cos \beta_1,$$

$$\beta_1 = \arccos \frac{S^2 + S_1^2 - S_2^2}{2SS_1}$$

3. Определим дирекционный угол линии **AP**

$$(AP) = (AB) - \beta_1.$$

4. Определим координаты точки **P**:

$$X_P = X_A + S_1 \cos(AP),$$

$$Y_P = Y_A + S_1 \sin(AP).$$

Для контроля решения задачи вычисляется длина линии **BP** и сравнивается с измеренной

$$BP = \sqrt{(X_P - X_B)^2 + (Y_P - Y_B)^2}.$$

Расхождение не должно превышать 3-х единиц последнего знака в измеренном значении линии  $S_2$ .

Для полного контроля определения вычисляется сторона  $CP$  и сравнивается с измеренной  $S_3$

$$CP = \sqrt{(X_P - X_C)^2 + (Y_P - Y_C)^2}.$$

Допускается

$$|CP - S_3| < 6m_s$$

где  $m_s$  – СКО измерения расстояний  $S_3$ .

Однако в целях повышения точности окончательных значений искомым координат задачу лучше решать дважды.

При втором решении используют исходные пункты  $B, C$  и расстояния  $S_2, S_3$ .

Допустимое расхождение в координатах определяют по формуле

$$r = \sqrt{(X' - X'')^2 + (Y' - Y'')^2} < 3M_r.$$

В свою очередь

$$M_r = \sqrt{M_1^2 + M_2^2}.$$

$$M_1 = \frac{\sqrt{m_{S_1}^2 + m_{S_2}^2}}{\sin \gamma_1}, \quad M_2 = \frac{\sqrt{m_{S_2}^2 + m_{S_3}^2}}{\sin \gamma_2},$$

где  $M_1$  и  $M_2$  – СКО положения пункта  $P$ ,  
определенного линейной засечкой в  
первом и втором вариантах;

$\gamma$  – угол засечки.

Величину угла засечки (для первого решения) можно найти из выражения

$$\gamma_1 = \arcsin \frac{S \sin \beta_1}{S_2}$$

За окончательное значение координат пункта ***P*** берут среднее арифметическое, которое будет иметь ошибку

$$M = \frac{M_r}{2}.$$