

Вычисление

площади плоской фигуры

Вычисление

с помощью

с помощью

определенного интеграла.

Площади фигур, расположенных над осью Ox

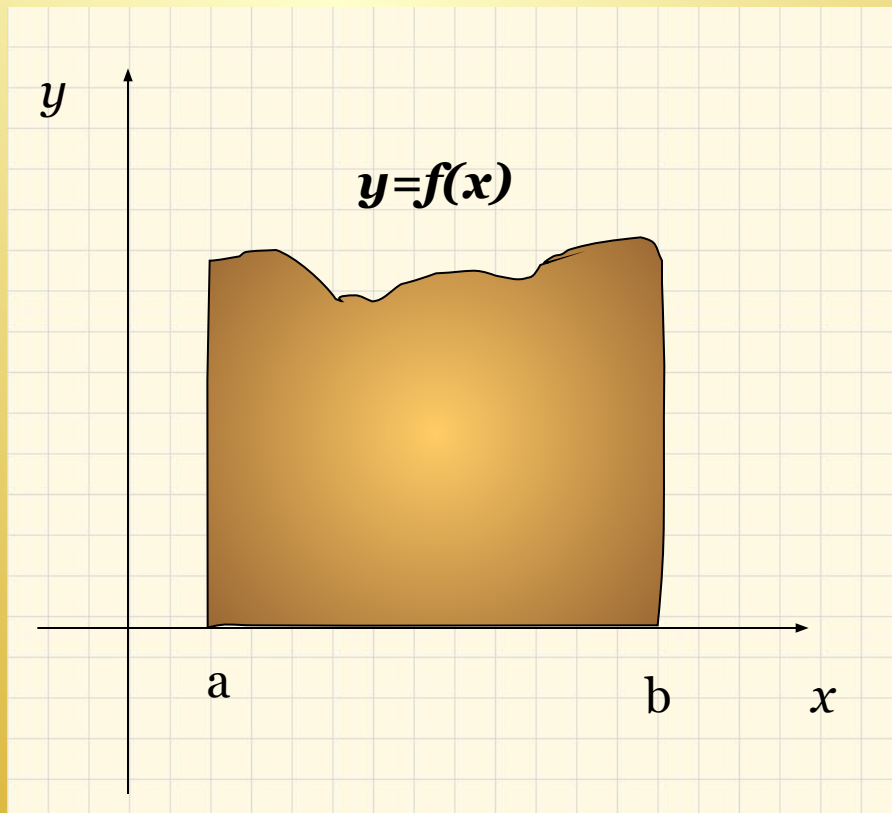
Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, т.е. $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a, b]$. Тогда график функции $y=f(x)$ расположен над осью Ox .

Если фигура, расположенная над осью Ox , является криволинейной трапецией(рис 1), то ее площадь вычисляется по известной формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ или } S = \int_a^b ydx$$

где y находится из уравнения корней.

Площадь криволинейной трапеции.

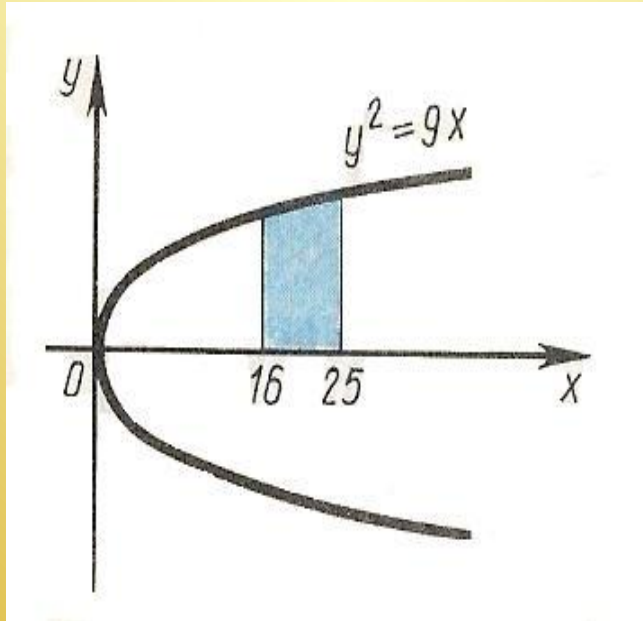


(рис.1)

$$S_{\text{крив.трап.}} = \int_a^b f(x) dx$$

Криволинейной трапецией называется фигура, ограниченная осью Ox , прямыми $x=a$ и $x=b$ и кривой $y=f(x)$.

Вычислим площади фигур, ограниченных заданными линиями:



• **Дано:** $y^2=9x$, $x=16$, $x=25$ и $y=0$

• **Решение:**

Для любого $x \in [16, 25]$ функция $y = \sqrt{9x}$ принимает положительные значения; поэтому для вычисления площади данной криволинейной трапеции следует воспользоваться формулой:

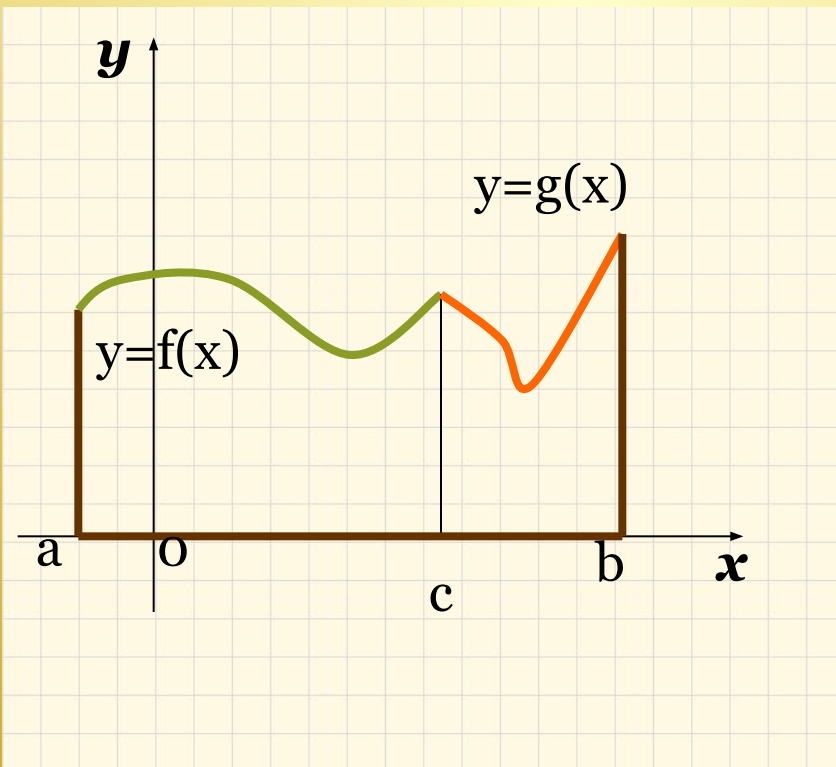
$$S = \int_{16}^{25} \sqrt{9x} dx = \int_{16}^{25} 3x^{1/2} dx =$$

$$= 3 \frac{x^{3/2}}{3/2} \Big|_{16}^{25} = 2x\sqrt{x} \Big|_{16}^{25} = 2(125 - 64) = 2 \cdot 61 = 122 \quad (\text{кв.ед})$$

Фигура, ограниченная различными

кривыми.

- Если рассматриваемая фигура не является криволинейной трапецией, то искомую площадь нужно представить как сумму нескольких криволинейных трапеций.

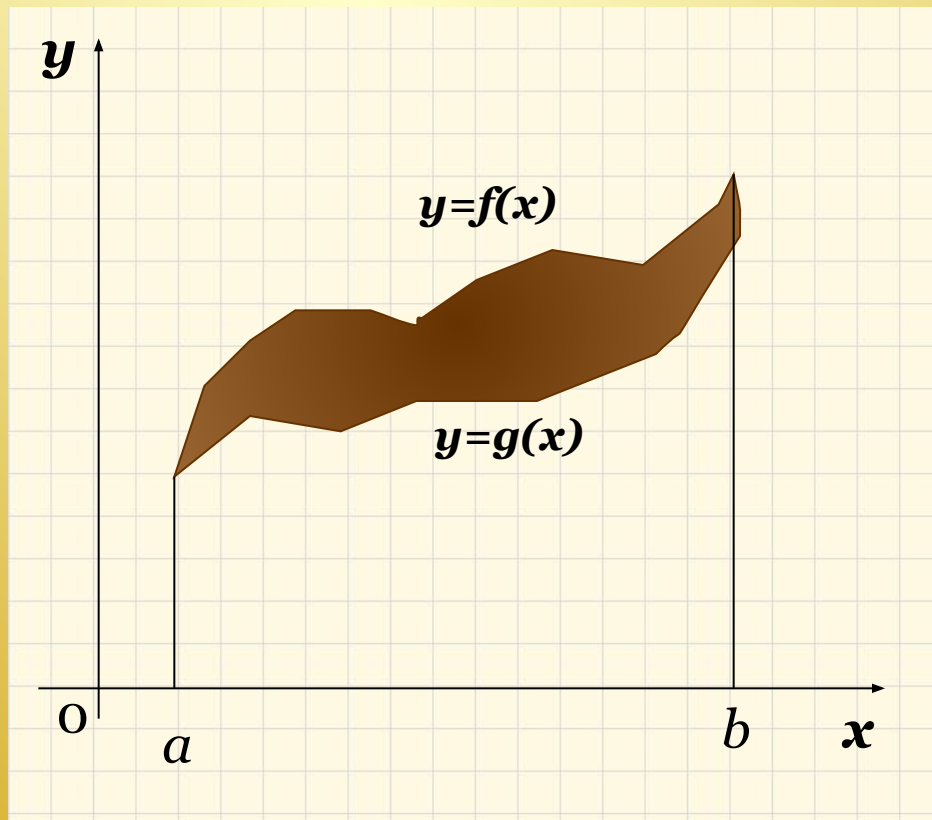


Найдем точку пересечения кривых $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Пусть $x=c$, тогда

$$S_{\text{крив.трап.}} = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx$$



Найдем точку пересечения кривых $y=f(x)$ и $y=g(x)$. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$

Полученные значения переменной x являются пределами интегрирования.

Площадь этой фигуры находим как разность площадей криволинейных трапеций, ограниченных кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

- Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x-2y+4=0$, $y+x-5=0$ и $y=0$

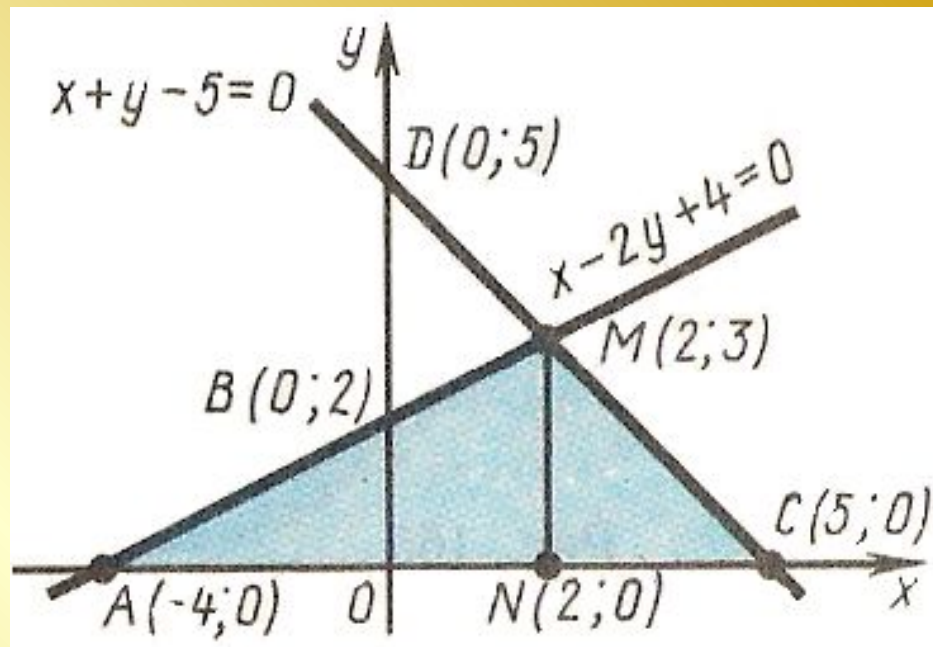
• Решение: 1. Выполним построение фигуры. Построим прямую $x-2y+4=0$; $y=0$, $x=-4$, $A(-4, 0)$; $x=0$, $y=2$, $B(0, 2)$. Построим прямую $x+y-5=0$; $y=0$, $x=5$, $C(5,0)$; $x=0$, $y=5$, $D(0,5)$.

2. Найдем точку пересечения прямых, для чего решим систему

$$\begin{cases} x-2y+4=0, \\ x+y-5=0. \end{cases}$$

Отсюда $x=2$, $y=3$,

т.е. $M(2;3)$. Для вычисления искомой площади разобьем треугольник AMC на два треугольника AMN и NMC , так как при изменении x от N до C – прямой $x+y-5=0$.



3. Для треугольника AMN имеем $x-2y+4=0$; $y = \frac{1}{2}x + 2$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$;

$a=-4$; $b=2$. Для треугольника NMC получим $x+y-5=0$; $y=-x+5$; $f(x)=-x+5$;
 $a=2$; $b=5$.

4. Вычислим площадь каждого из этих треугольников:

$$S_{AMN} = \int_{-4}^2 \left(\frac{1}{2}x + 2 \right) dx = \left(\frac{x^2}{4} + 2x \right) \Big|_{-4}^2 = 9 \text{ (кв.ед.)}.$$

$$S_{NMC} = \int_2^5 (-x + 5) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 5x \right) \Big|_2^5 = 4,5 \text{ (кв.ед.)}.$$

Следовательно, $S = S_{AMN} + S_{NMC} = 9 + 4,5 = 13,5 \text{ (кв.ед.)}$.

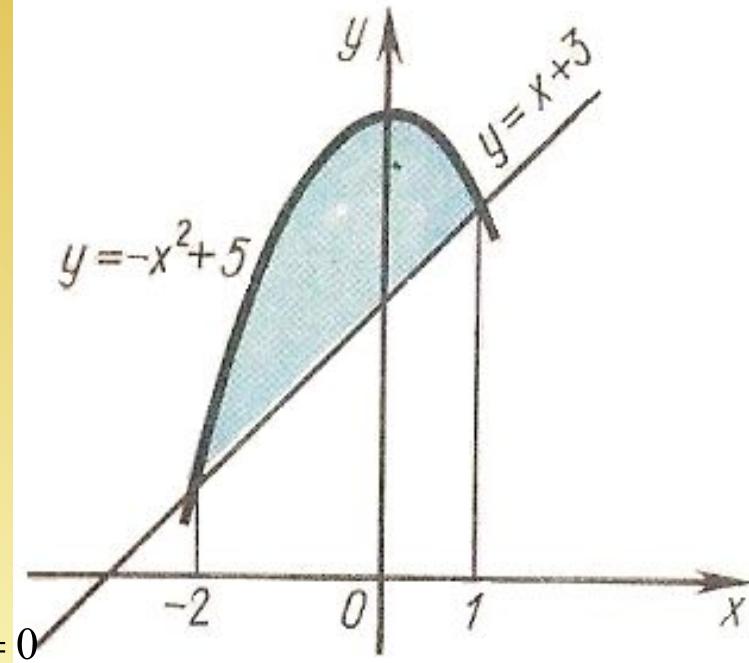
Проверка: $S_{\square AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot NM = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = 13,5 \text{ (кв.ед.)}$.

- $y = -x^2 + 5, y = x + 3$

- Решение: Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y = -x^2 + 5$ и прямой $y = x + 3$. Для этого решим

систему $\begin{cases} y = -x^2 + 5 \\ y = x + 3 \end{cases}$, откуда $x_1 = -2, x_2 = 1$

Найдем площадь S_1 фигуры, ограниченной параболой $y = -x^2 + 5$, прямыми $x = -2, x = 1$ и $y = 0$



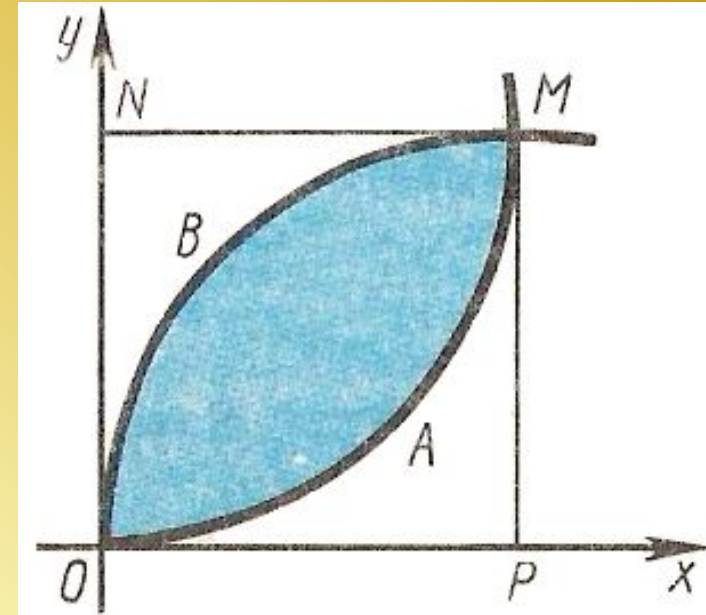
Получим: $S_1 = \int_{-2}^1 (-x^2 + 5) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 5x \right) \Big|_{-2}^1 = 12$ (кв.ед.)

Найдем площадь S_2 фигуры, ограниченной прямыми $y = x + 3, x = -2, x = 1, y = 0$:

$$S_2 = \int_{-2}^1 (x + 3) dx = \left(\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{-2}^1 = 7,5 \text{ (кв.ед.)}$$

Площадь искомой фигуры есть $S = S_1 - S_2 = 12 - 7,5 = 4,5$ (кв.ед.)

- Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$
- Решение: Как видно из рисунка, площадь фигуры $OBAMO$ можно представить как разность площадей фигур $OBMPO$ и $OAMPO$, где MP – перпендикуляр, опущенный из точки M на ось Ox .



Найдем координаты точки M . Решив систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = x^2/4 \end{cases}$$

получим $x=4$, $y=4$, т.е. $M(4,4)$.
Следовательно,

$$S = \int_0^4 \sqrt{4x} dx - \int_0^4 \frac{x^2}{4} dx = \frac{4}{3} x^{3/2} \Big|_0^4 - \frac{x^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

- Данную задачу можно решить и другим способом.

Представим искомую площадь в виде разностей

площадей фигур $OAMNO$ и $OVMNO$ (MN –

- перпендикуляр, опущенный из точки M на ось Oy),

т.е. $S = S_{OAMNO} - S_{OVMNO}$

Тогда:

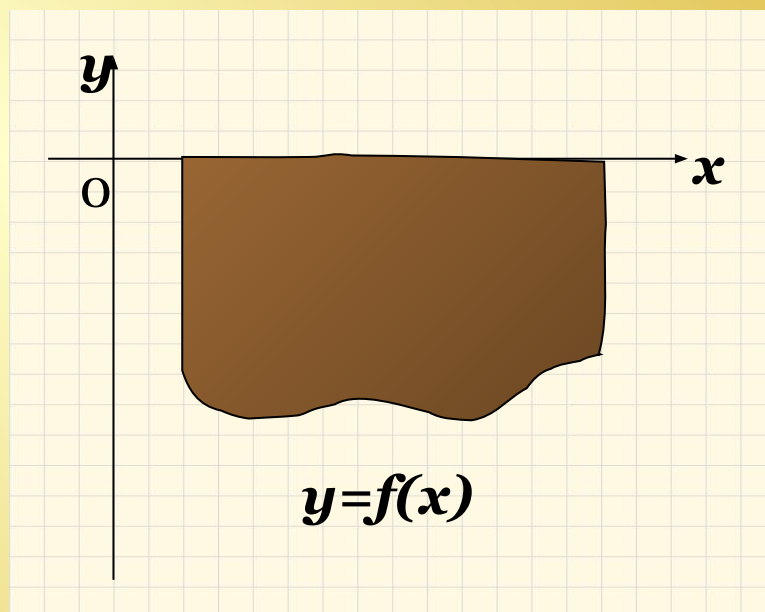
$$S = \int_0^4 \sqrt{4y} dy - \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \frac{4}{3} y^{3/2} \Big|_0^4 - \frac{y^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

Площади фигур, расположенных полностью или частично под осью Ox

- Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неположительная непрерывная функция $y=f(x)$, т.е. $f(x) \leq 0$ для любого $x \in [a, b]$. Тогда график функции $y=f(x)$ расположен под осью Ox .
- Если фигура, расположенная под осью Ox , является криволинейной трапецией, например, то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad \text{или} \quad S = \left| \int_a^b y dx \right|$$

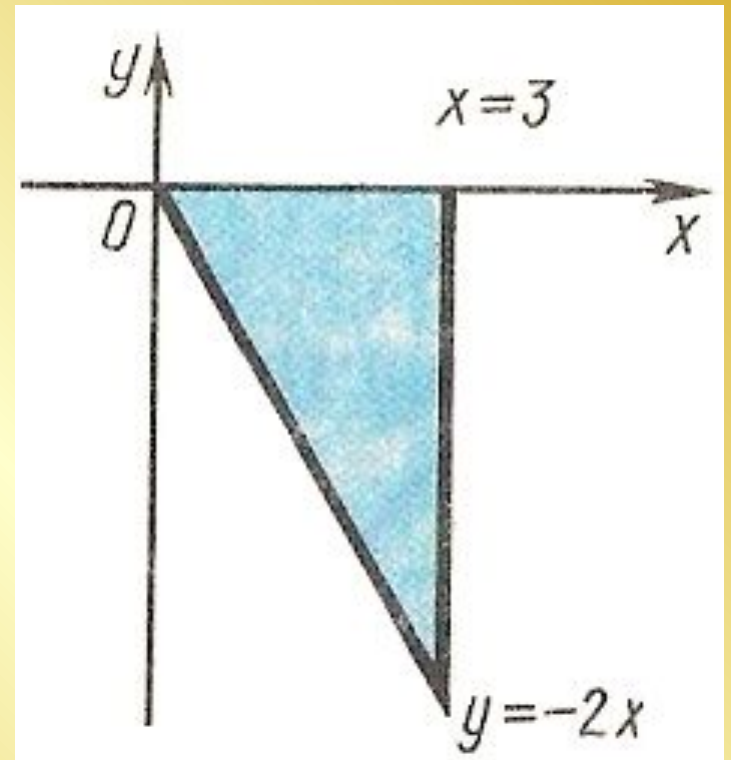
где y находится из уравнения кривой.



- $y=-2x$, $y=0$ и $x=3$
- Решение: На отрезке $[0,3]$ функция $f(x)=-2x$ отрицательна; поэтому для вычисления площади искомой фигуры воспользуемся приведенной выше

формулой:

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_0^3 (-2x) dx \right| =$$
$$= \left| -x^2 \right|_0^3 = 9 \quad (\text{кв.ед})$$



- $y = 4x - x^2, y = 0, x = 5.$

- Решение: Парабола

пересекает ось абсцисс в точках $x=0$ и $x=4$. Фигура, площадь которой требуется найти, отмечена голубым цветом. Пусть

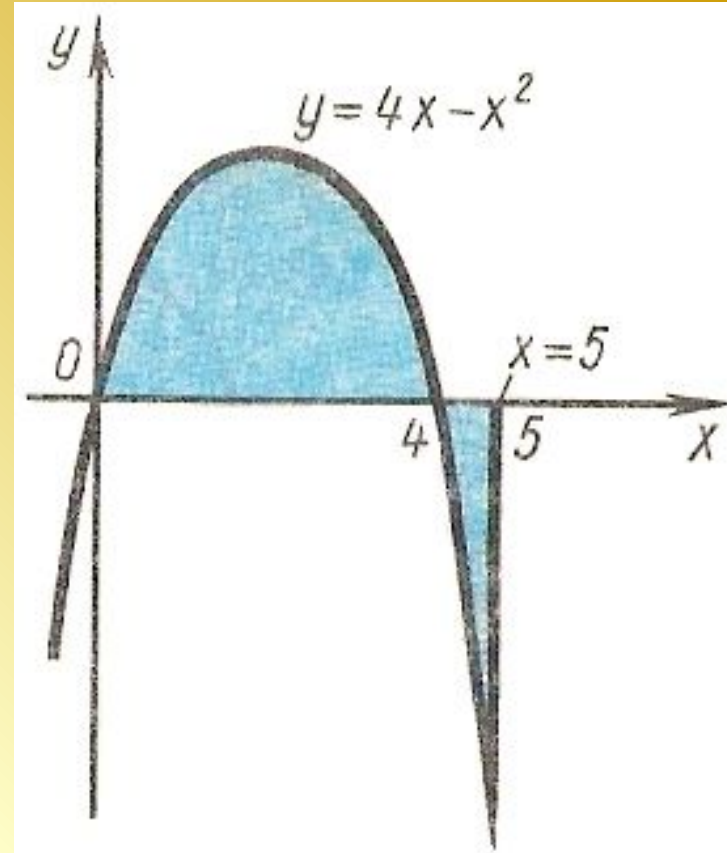
S_1 и S_2 - площади частей этой фигуры, соответствующих отрезкам $[0,4]$ и $[4,5]$ а S – искомая площадь; тогда

Используя первую из рассмотренных формул, получим:

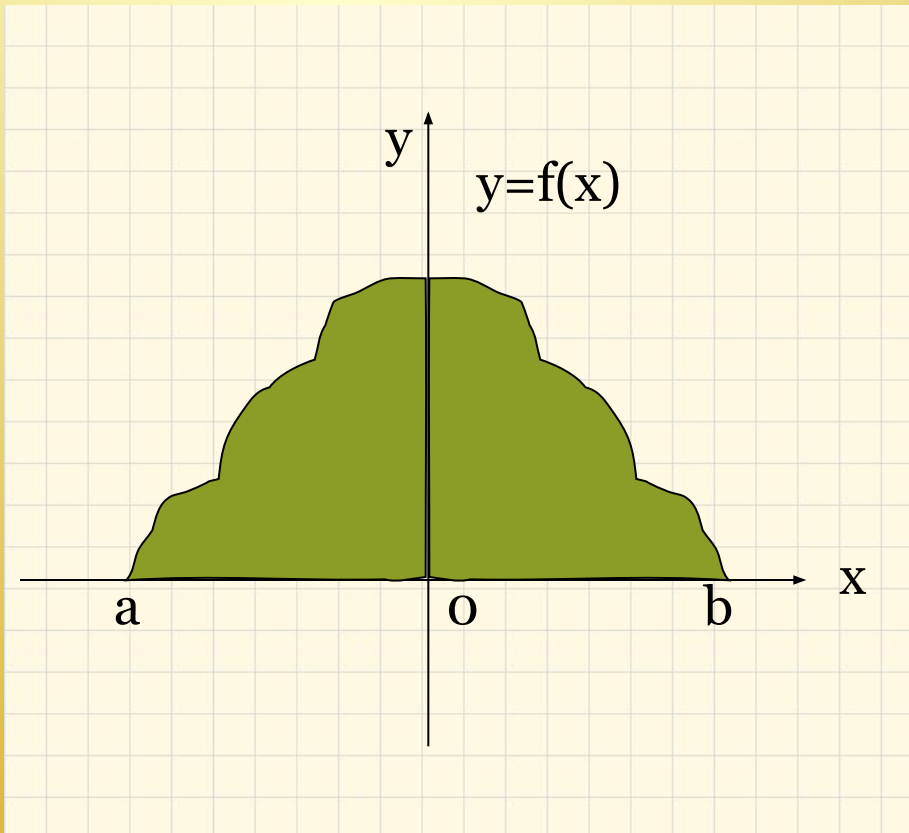
$$S_1 = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \text{ (кв.ед.)},$$

а по второй формуле находим

$$S_2 = \left| \int_4^5 (4x - x^2) dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 \right) \Big|_4^5 \right| = \left(\frac{125}{3} - 50 \right) - \left(\frac{64}{3} - 32 \right) = \frac{7}{3} \text{ (кв.ед.)}$$



Симметрично расположенные плоские фигуры

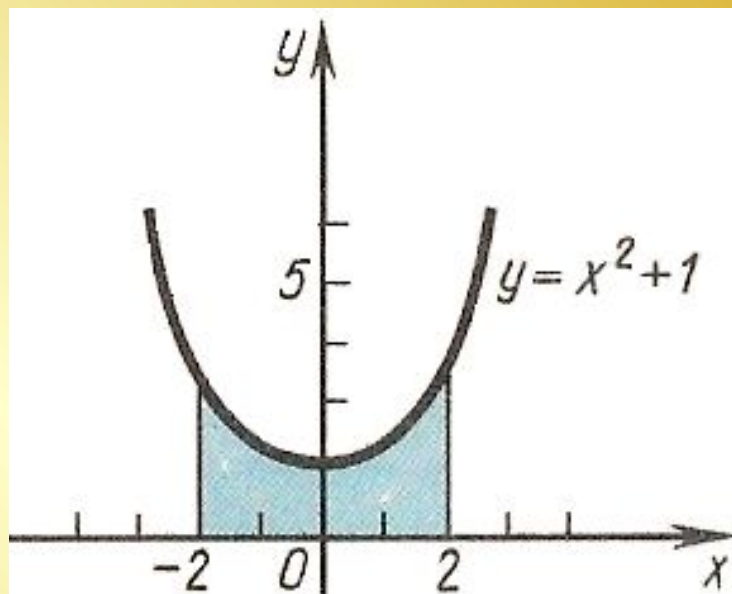


Если кривая расположена симметрично относительно оси координат или начала координат, то можно упростить вычисления, определив половину площади и затем удвоив результат.

$$S_{\text{крив.тран.}} = 2 \int_0^b f(x) dx$$

Симметрично расположенные плоские фигуры

$$y = x^2 + 1, x = -2, x = 2, y = 0$$



Решение:

$$S = \int_{-2}^2 (x^2 + 1) dx = 2 \int_0^2 (x^2 + 1) dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^2 = 9 \frac{1}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

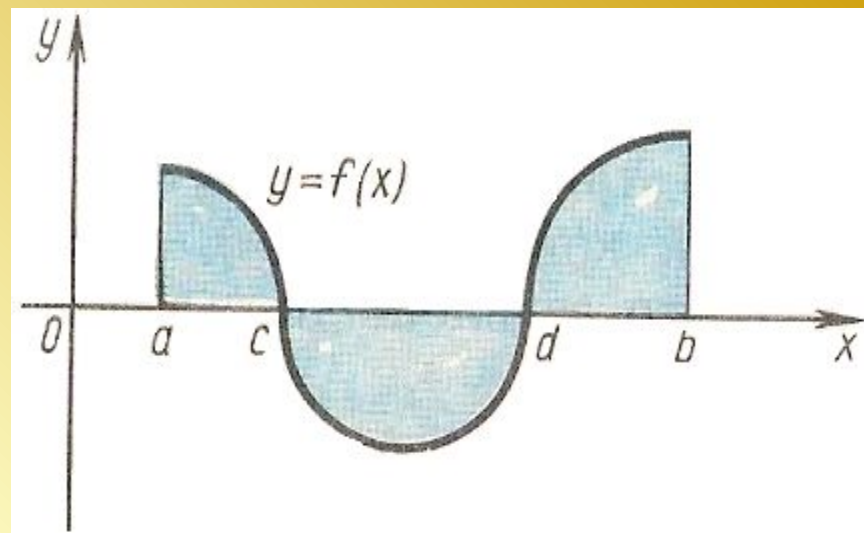
- Если $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ меняет знак конечное число раз, то этот отрезок следует разбить на части, на каждой из которых функция знакопостоянна.

Интеграл по всему отрезку $[a, b]$ разбивают на сумму интегралов по полученным частичным отрезкам.

Для вычисления суммы площадей нужно найти сумму абсолютных

величин интегралов по указанным выше отрезкам, т.е. $S = S_1 + S_2 + S_3$

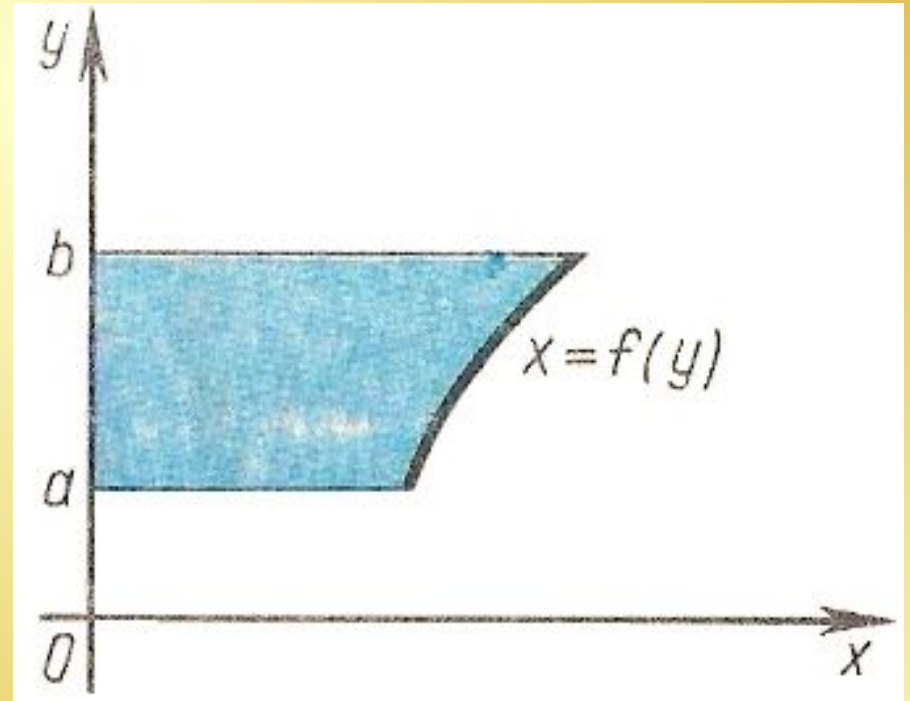
$$\text{где } S = \int_a^b f(x) dx, S_1 = \int_a^c f(x) dx, S_2 = \left| \int_c^d f(x) dx \right|, S_3 = \int_d^b f(x) dx$$



Площади фигур, прилегающих к оси Oy

- Если криволинейная трапеция прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой $x=f(y)$, прямыми $y=a$, $y=b$ и осью Oy , то ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(y) dy$$



- $y = x^2, y = 4, y = 9, x = 0$
- Решение: Данная фигура есть криволинейная трапеция, прилегающая к оси Oy . Пределами интегрирования по y являются значения $a=4, b=9$. Запишем данную функцию в виде $x=f(y)$, т.е. $x = \sqrt{y}$
Теперь искомую площадь найдем по рассмотренной чуть ранее формуле

$$S = \int_4^9 \sqrt{y} dy = \frac{2}{3} y\sqrt{y} \Big|_4^9 = 12 \frac{2}{3} \quad (\text{кв.ед.})$$

