



*ГБОУ лицей-интернат
Центр одаренных детей*

Программа элективного курса по алгебре «Геометрические места точек» для 9 класса в рамках предпрофильной подготовки



математики

Каткова Галина Геннадьевна- учитель

**Образование – высшее, педагогический стаж-29лет,
Квалификационная категория -высшая**



Пояснительная записка



Ведущее место математического образования определяется:

- практической значимостью математики,
- ее возможностями в развитии и формировании мышления человека,
- развитием творческих способностей.

Актуальным остается вопрос дифференциации обучения математике

- позволяющий обеспечить базовую подготовку,
- удовлетворить потребности каждого, кто проявляет интерес и способности к предмету,
- ориентировать на выбор профессии, связанной с математикой.

Данный курс направлен:

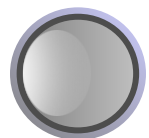
- на расширение знаний,
- повышение уровня математической подготовки через решение большого класса задач.

Модуль и его свойства

тает в себе большую содержательность, глубину, умелое обыгрывание которых позволяет рационально и остроумно решать спектр задач, побуждает учащихся к самостоятельности и творчеству .

Курс предназначен для учащихся 9 класса общеобразовательных учреждений, реализующих предпрофильную подготовку.

Цели курса



Помочь повысить уровень понимания и практической подготовки в таких вопросах, как :



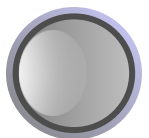
построение графиков функций, удовлетворяющих заданному условию



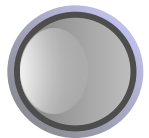
преобразование выражений, содержащих модуль



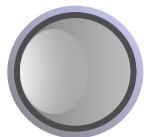
решение уравнений, неравенств и систем графическим методом



Развивать математические способности учащихся

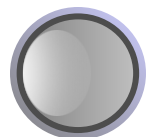


Продолжить формирование умений логически мыслить и отыскивать математические закономерности

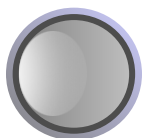


Помочь осознать степень своего интереса к предмету и оценить возможности овладения им с точки зрения дальнейшей перспективы

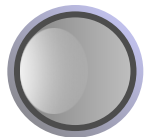
Задачи курса



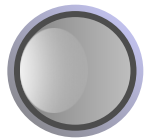
Научить учащихся навыкам построения графиков с модулем и проведению преобразований с помощью изученных методов



Научить строить геометрические места точек, координаты которых удовлетворяют условию $F(x)=0$, $F(x)\leq 0$, $F(x)\geq 0$



Вовлечь учащихся в проектировочную деятельность



Помочь ученику оценить свой потенциал с точки зрения образовательной перспективы

Тематическое планирование

| № | Наименование тем курса | Всего часов | Лекция | Практика | Семинар |
|---|--|-------------|--------|----------|---------|
| 1 | ГМТ. Определение, общие понятия | 1 | 0,5 | 0,5 | |
| 2 | Геометрические преобразования графиков функций, содержащих модуль. | 2 | 1 | 1 | |
| 3 | Построение ГМТ, заданных уравнениями | 2 | 1 | 1 | |
| 4 | Построение ГМТ, заданных системами неравенств. | 2 | | 1 | 1 |
| 5 | Задачи на нахождение площадей фигур. | 1 | | 1 | |
| 6 | Модуль в заданиях единого государственного экзамена | 1 | | | 1 |
| 7 | Заключительное занятие: представление своих работ учащимися. | 2 | | | 2 |

В результате изучения курса учащиеся

Должны знать:

- -правило раскрытия модуля,
- -план построения графиков основных видов функций.

Должны уметь:

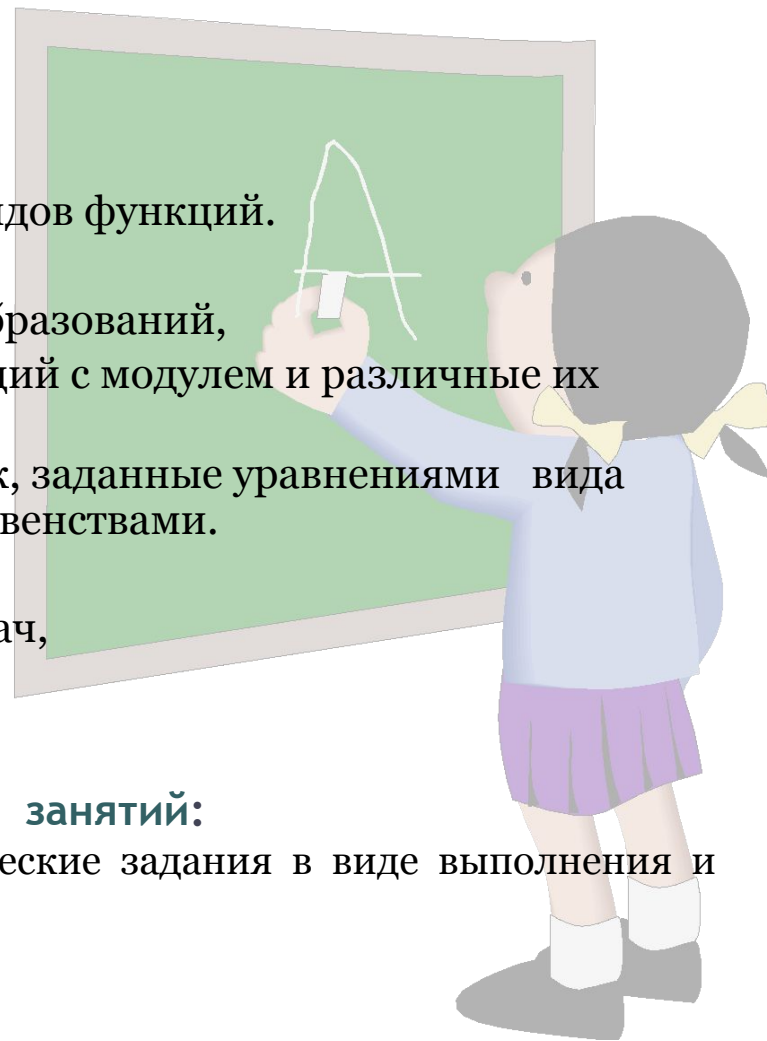
- -применять метод геометрических преобразований,
- -строить графики основных видов функций с модулем и различные их комбинации,
- -изображать геометрические места точек, заданные уравнениями вида $|x| + |y| = n$, $|x+a| = c$, $|y-b| = c$ и неравенствами.
- ***Оценивать свои результаты:***
- проверка самостоятельно решенных задач,
- защита проектов.

Основные формы организации учебных занятий:

лекция, практическая работа, семинар, творческие задания в виде выполнения и защиты проектов.

Методы обучения:

проблемный, метод проектов.



Содержание курса .

Тема 1. Геометрические места точек. Определение. Общие понятия. ГМТ, заданные неравенствами(1 ч)

Цели: Постановка задач курса, проверка владения базовыми умениями. Научить изображать ГМТ, заданные неравенствами.

Методы обучения: лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений

Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество, в которое входят все те и только те точки, которые обладают этим свойством.

Все графики функций $y = f(x)$, которые изучались до сих пор можно рассматривать как ГМТ, координаты которых удовлетворяют заданному уравнению. Таким образом построение геометрических мест точек, координаты которых удовлетворяют какому – либо соотношению, является задачей более общей, чем построение графиков функций.

Графический способ – один из самых удобных и наглядных способов представления и анализа информации.

Упражнение 1. Построить ГМТ, координаты которых удовлетворяют неравенствам :

а) $x < 3$; б) $y \geq -4$; в) $x < -5$; г) $0 < x < 1$; д) $-2 < y < 3$.

Упражнение 2. Построить ГМТ, координаты которых удовлетворяют соотношениям :

а) $x + y > 0$; б) $y - x > 1$; в) $y \geq x^2$; г) $y < x^2$; д) $x^2 + y^2 < 1$; е) $x^2 + y^2 \geq 1$.

Тема 2. Обобщение методов построения графиков функций, содержащих знак модуля.

Цели :- напомнить методы построения графиков функций, содержащих знак модуля;
-способствовать развитию навыков построения графиков функций с опорой на преобразования симметрии;
-закрепить полученные знания.

Методы обучения : лекция, объяснение, выполнение тренировочных заданий.

Когда в стандартные функции, которые задают прямые, гиперболы, параболы, включают знак модуля, их графики становятся необычными. Чтобы научиться строить такие графики, надо владеть приемами построения графиков элементарными функциями, а также твердо знать и понимать определение модуля.

Построение графиков функций вида : $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $|y| = f(x)$,
 $y = |x + a| + |x + b| + |x + c| + \dots$,
частично содержащих знак модуля.



Открытый урок

Тема 3. Построение ГМТ , заданных уравнениями.

Цель: продолжить решение задач по изучаемой теме, рассмотреть построение ГМТ, заданных уравнениями с двумя неизвестными.

Задание. Решить графически:

1. $|x-y| = 3$

2. $|x| - |y| = 3$

3. $|x| = |y|$

4. $y = |x| / x$

5. $x = |y-1| + 3$

6. $|x+1| = 2$

7. $|y-2| = 1$

8. $|x-y+1| + |x-y| = 1$

9. $|y-1| + y-1 = |x-2| + x-2$

10. $|x-y| + |x+y|$

11. $(x + |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 0$

12. $(x + |x|)^2 + (y + |y|)^2 = 9$

13. $x^2 + y^2 = 2|x+y| + 2$

14. $x^2 + y^2 = 1 - 2|xy|$

15. $x = |x^3 + xy^2|$

16. $(x-1)^2 = (x-2) / |x-2|$

17. $(x+y-1) / (x^2-y^2-1) = 1$

18. $x^2 + y^2 = 2|x| + |y|$



Тема 4. Построение ГМТ, заданных неравенствами и системами неравенств.

Цель: научить изображать на плоскости фигуры, задаваемые неравенствами с модулем; использовать рассматриваемый материал для развития интереса к предмету, для более глубокого освоения базовых умений.

Задание. Изобразить ГМТ, заданные неравенствами и системами неравенств.

1) $|x+y| \leq 1$
2) $|x+2| > 1$
3) $|x+3| < 1$
4) $|x-2| \geq 2$
5) $|x| + |y| \leq 3$
6) $|x| - |y| > 3$
7) $|x| + |y| > 3$
8) $y \leq |x|$
9) $x > |y|$
10) $x^2+y^2-2x-2y < 7$
11) $\begin{cases} y > |x| \\ x^2+y^2 \leq 9/4 \end{cases}$

12) $x+y < 3$

13) $x^2+y^2-2x-2y \geq 7$

14) $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y+g > 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$

15) $|x| + 2|y| \leq 4$

$x^2+y^2 \geq 1$

16) $x \geq |x^3+xy^2|$

17) $x^2+y^2 \leq 2x+2y \leq 4y$

18) $x-y-1/x^2+y^2-1 < 1$

19) $x^2+y^2 \leq 2|x| - 2|y|$

Тема 5. Задачи на нахождение площадей.

Цель: расширить представление учащихся о взаимосвязи между алгебраическими соотношениями и их геометрическими образами на координатной плоскости.

Задание: Найти площадь фигуры, заданной следующим условием:

1. $|x^2+y^2-2| \leq 2x+2y$

2. $4 \leq x^2+y^2 \leq 2|x|+2|y|$

3. $|x|+|y|+|x-y| \leq 2$

4. $x^2 + y^2 \leq 2x+2y \leq 4y$

5. $(x-y-1)/(x^2 -y^2-1) < 1$

6. $x^2+y^2 \leq 2|x|-2|y|$

7. $\begin{cases} x^2+y^2-8x-6y-11 \leq 0 \\ x^2+y^2-2x+2y+1 \geq 0 \end{cases}$

11. $(y-1)^2 < (x+2)/(|x+2|)$

8. $x^2+y^2 \leq 4$

$|x|+|y| > 2$

9. $x^2+y^2 \geq 144$

$3|x|+4|y| \geq 60$

10. $x^2 + y^2 \leq 3$

$3y \leq 3|x|$

12. $|y-1|-x > 8$

$(x+y-1)/(x^2 +y^2-1) > 1$

$(-y) < x < 1$

ОТВЕТЫ

1. $2\pi+4$

5. $(\pi/2)+1$

9. $600-144\pi$

2. 8

6. $2\pi-4$

10. $5\pi/2$

3. 3

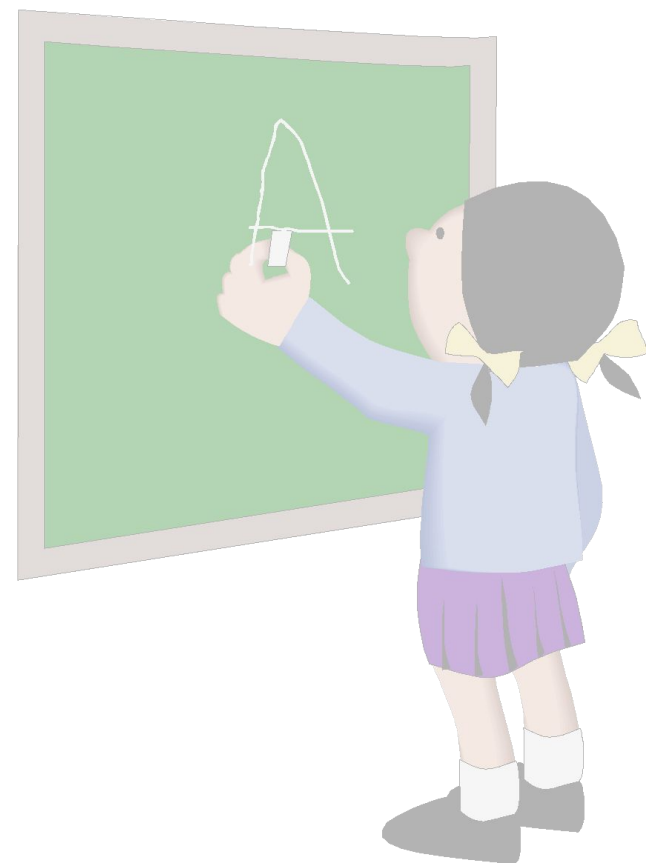
7. $3,5\pi$

11. 5

4. π

8. $2\pi-4$

12. $1-\pi/8$



Тема 6. Модуль в заданиях ЕГЭ.

Цели: познакомить учащихся с решением некоторых типов заданий, содержащих модуль; предоставить учащимся шанс оценить свои возможности.

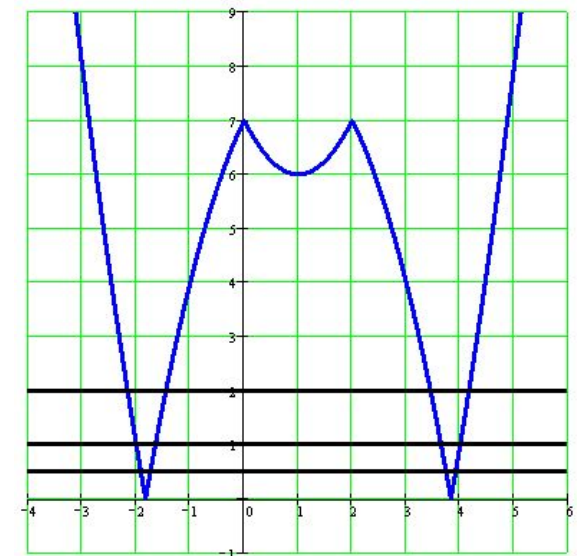
Задание 1. При каких значениях параметра a число корней уравнения $||x^2-2x|-7|=a$ в четыре раза больше a ?

Решение. Построим график функции $y = ||x^2-2x|-7|$. Проводим горизонтали $y = a$ при различных a , получаем информацию о числе пересечений этой горизонтали с графиком.

| Значение a | $a < 0$ | 0 | $0 < a < 6$ | 6 | $6 < a < 7$ | 7 | $a > 7$ |
|--------------|---------|-----|-------------|-----|-------------|-----|---------|
| Число корней | 0 | 2 | 4 | 5 | 6 | 4 | 2 |

$0 < a < 6$ и при этом $4a=4$.

Ответ: $a=1$.



Задание 2.

При каких значениях x функция $y = |2x + 3| + 3|x - 1| - |x + 2|$ имеет наименьшее значение?

Задание 3.

При каких значениях x функция $y = |x + 1| + |x - 1| - 2|x - 2|$ достигает максимума?

Задание 4.

При каком значении a уравнение $|x^2 - |x| - 6| = a$ имеет более двух корней?

Задание 5.

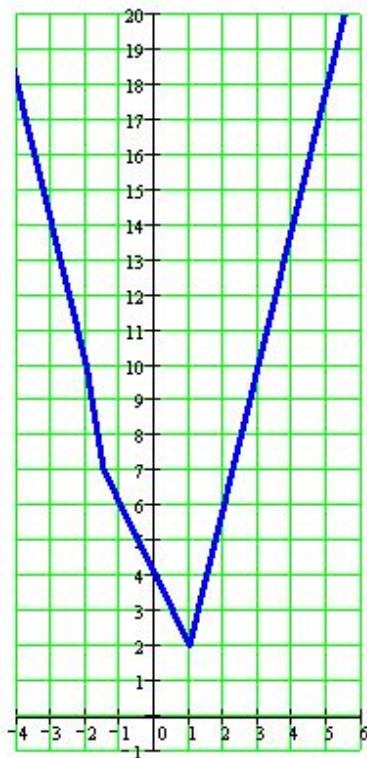
При каком значении x функция

$$y = x^2 + 2x - \sqrt{4x^2 + 16x + 16}$$

достигает минимума?

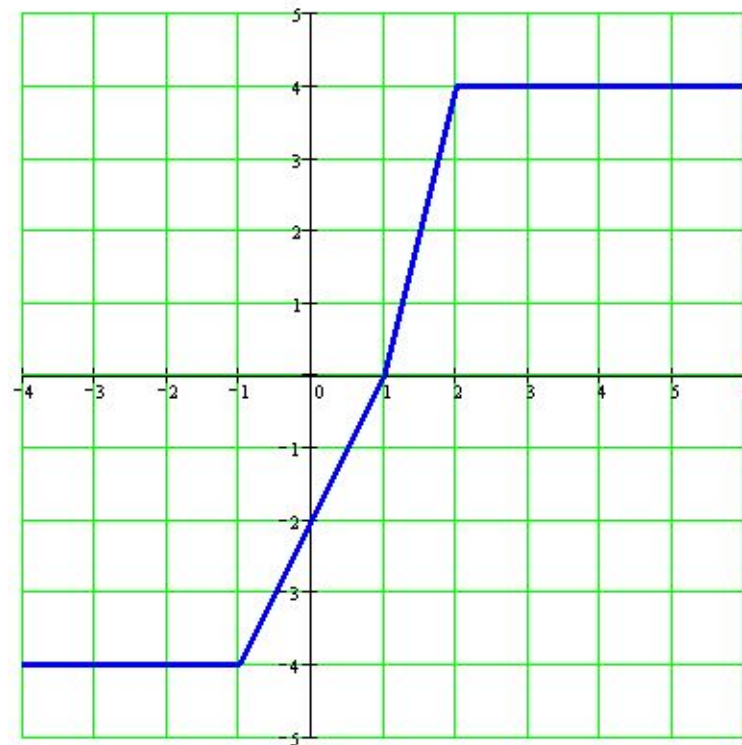
Решение

$$y = |2x + 3| + 3|x - 1| - |x + 2|$$



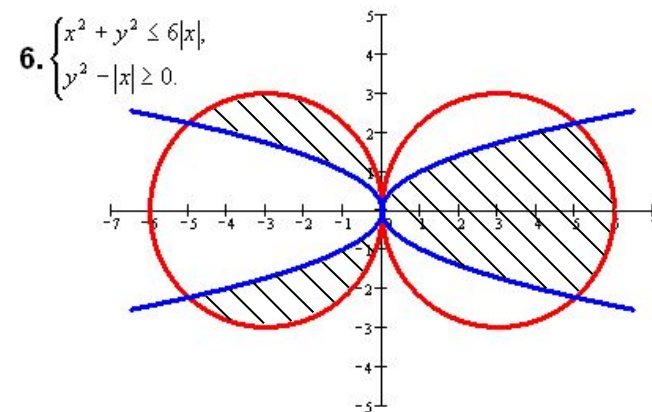
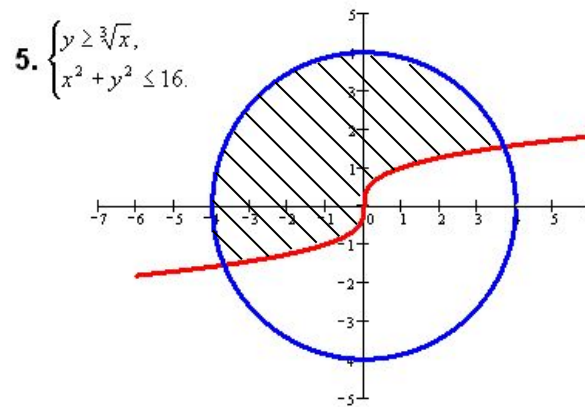
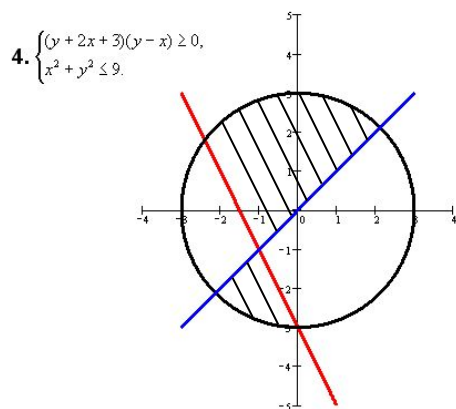
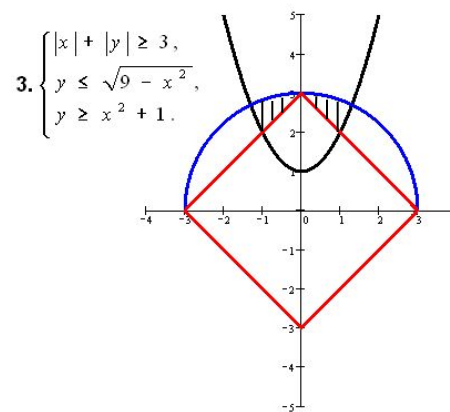
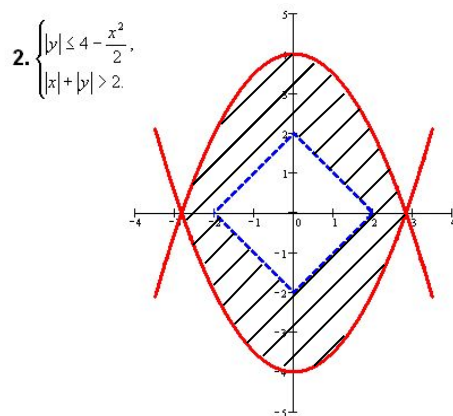
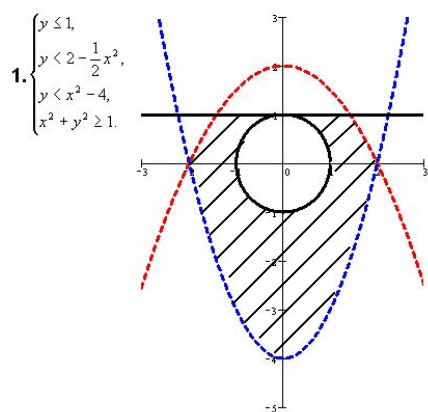
Ответ: при $x=1$.

$$y = |x + 1| + |x - 1| - 2|x - 2|$$



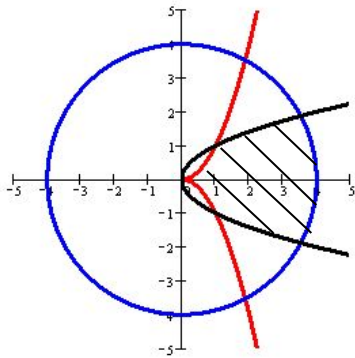
Ответ: при $x \geq 2$

Представление своих работ учащимися.

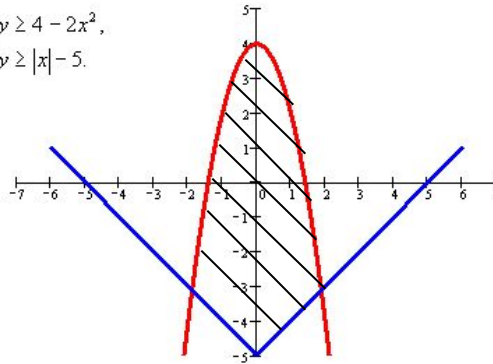


Задачи, составленные учащимися .

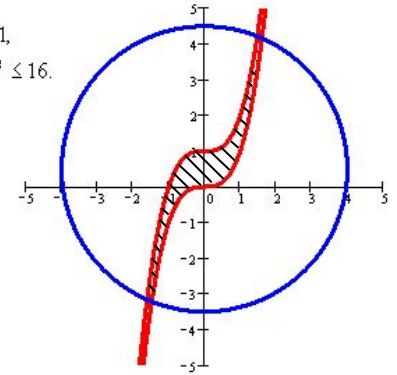
$$7. \begin{cases} |y| \leq x|x|, \\ x^2 + y^2 \leq 16, \\ y^2 \leq x. \end{cases}$$



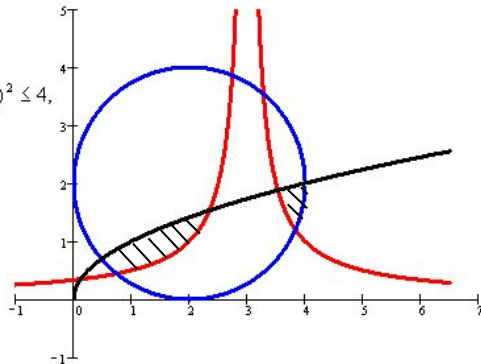
$$8. \begin{cases} y \geq 4 - 2x^2, \\ y \geq |x| - 5. \end{cases}$$



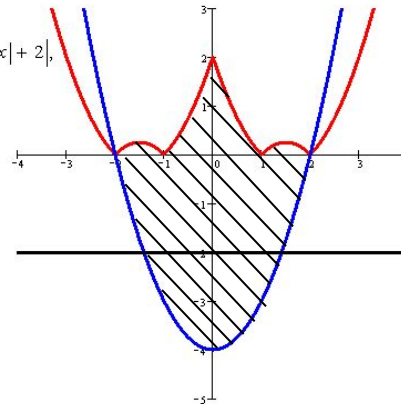
$$9. \begin{cases} x^3 \leq y \leq x^3 + 1, \\ x^2 + (y - 0,5)^2 \leq 16. \end{cases}$$



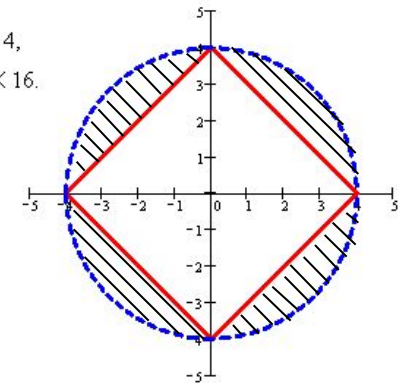
$$10. \begin{cases} y \geq \frac{1}{x-3}, \\ (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 4, \\ y \leq \sqrt{x}. \end{cases}$$



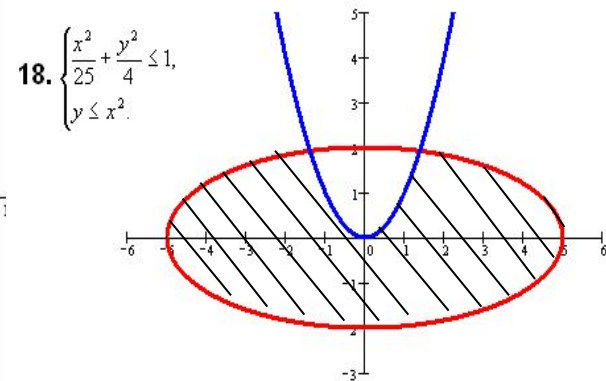
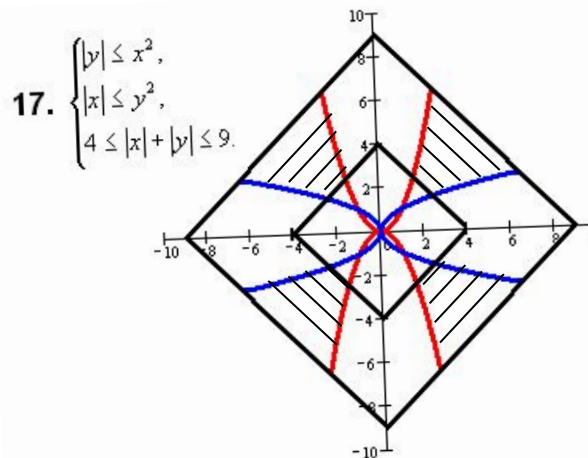
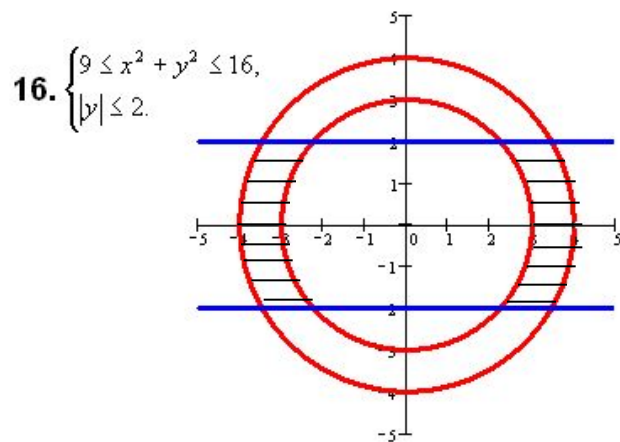
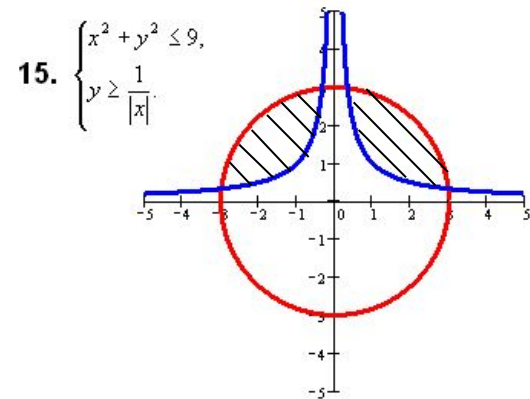
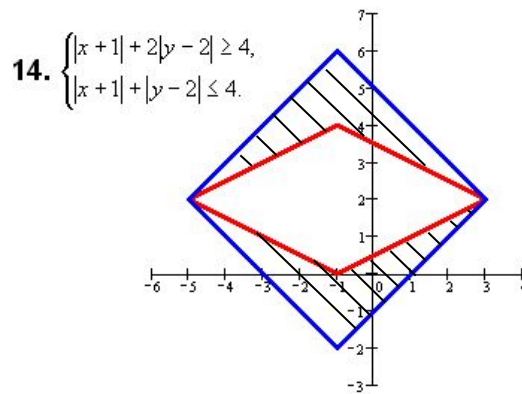
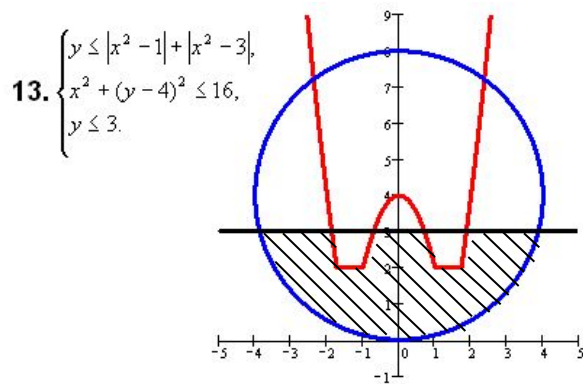
$$11. \begin{cases} y \leq |x^2 - 3|x| + 2|, \\ y \geq x^2 - 4, \\ y \geq -2. \end{cases}$$



$$12. \begin{cases} |x| + |y| \geq 4, \\ x^2 + y^2 < 16. \end{cases}$$



Задачи, составленные учащимися.

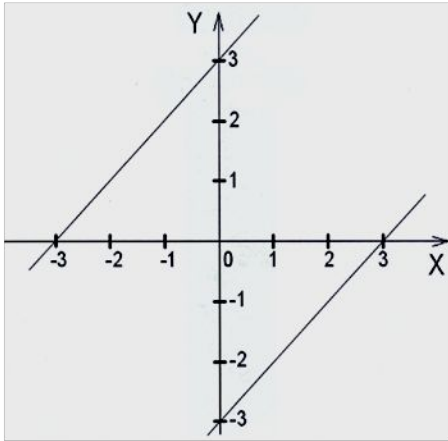


Используемая литература

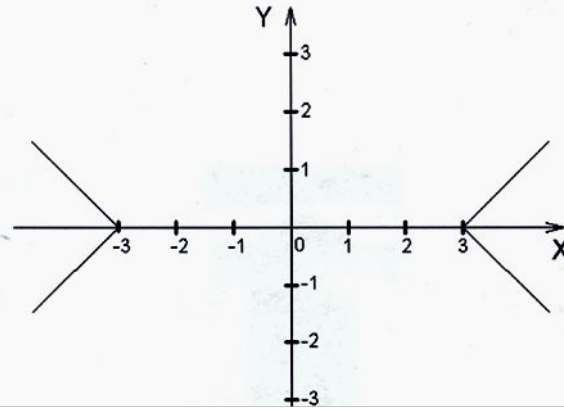
- 1) Дороднов А. М., Острецов И. Н. и др. «Графики функций. Учебное пособие для поступающих в ВУЗы», 1972 г.
- 2) Журнал «Математика в школе» №5, 1999 г.
- 3) Студенецкая В. Н., Сагателова Л. С. «Математика 8-9 класс», Учитель ,2007 . Выпуск 1.
- 4) Горохова Л. И. и др. «Уроки математики с применением интегрированных технологий», 2009 г., «Глобус»
- 5) Математика. Еженедельное учебно-методическое приложение к газете «Первое сентября», №5, 1999 г.
- 6) А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский «Алгебраический тренажер», 1998 г., «Гимназия».
- 7) М. И. Козина « Математика 8-9 класс», «Учитель» , 2007 г. Выпуск 2.
- 8) Интернет-ресурсы

Конец

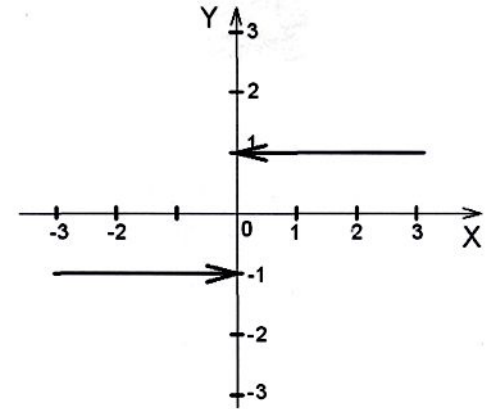
$$|x-y|=3$$



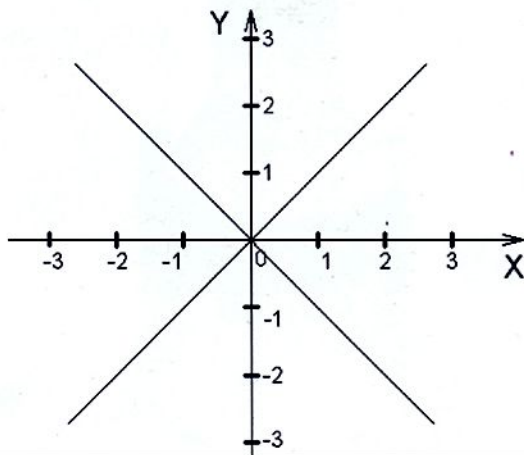
$$|x|-|y|=3$$



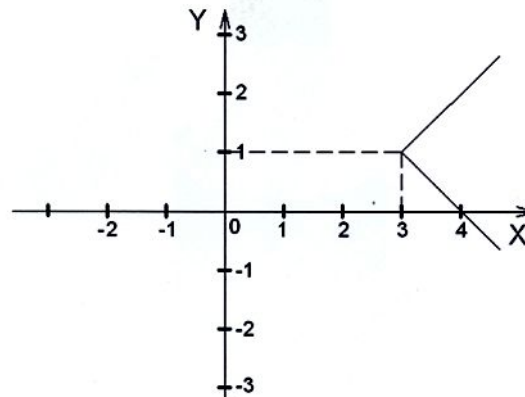
$$y = |x|/x$$



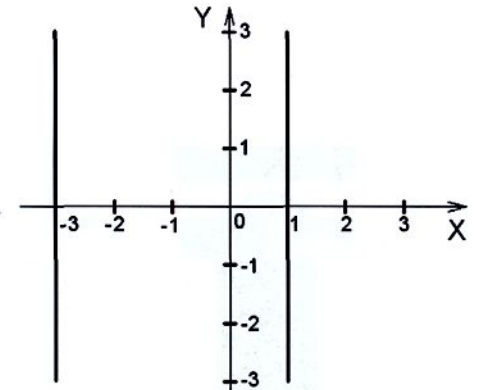
$$|x|=|y|$$



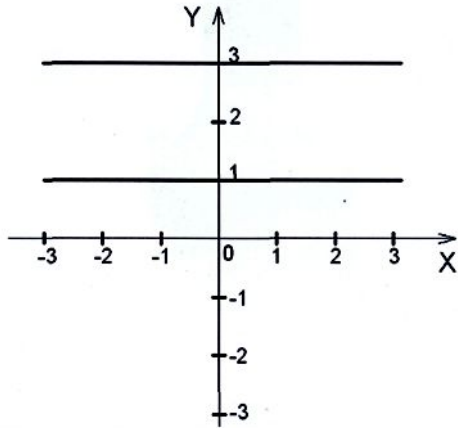
$$x = |y-1| + 3$$



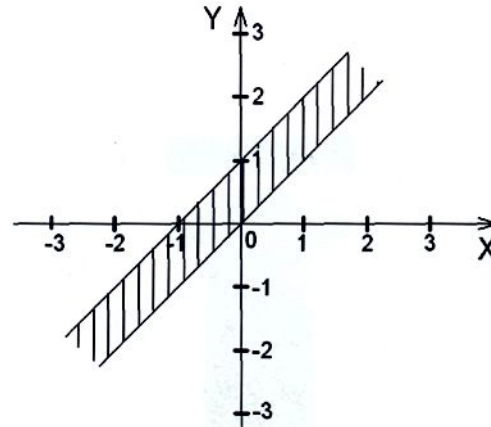
$$|x+1|=2$$



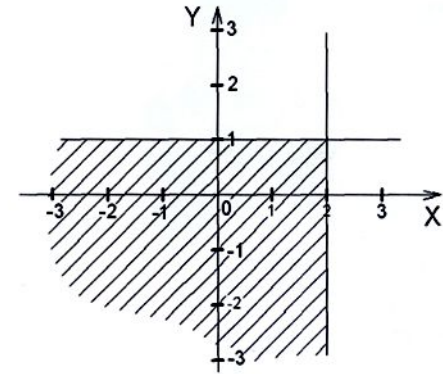
$$|y-2|=2$$



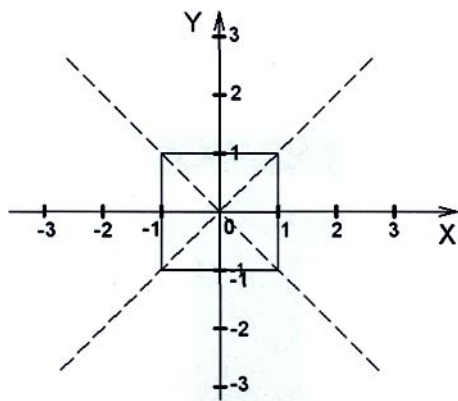
$$|x-y+1|+|x-y|=1$$



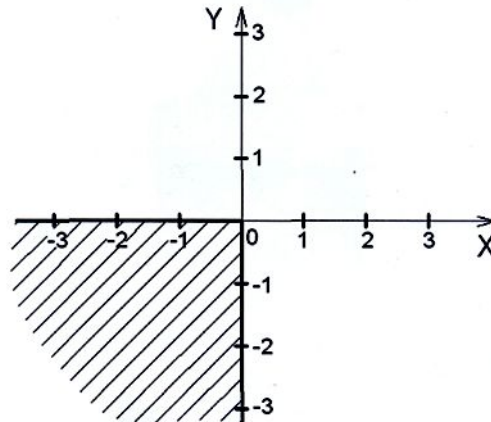
$$|y-1|+y-1 = |x-2|+x-2$$



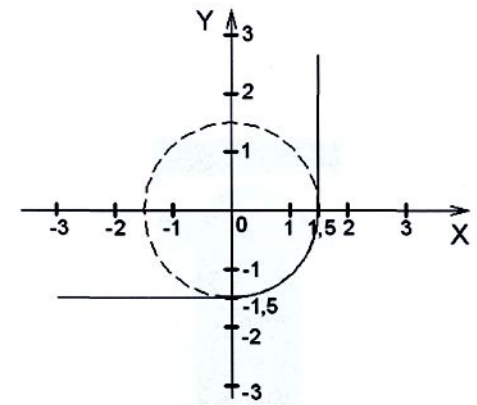
$$|x-y| + |x+y| = 2$$



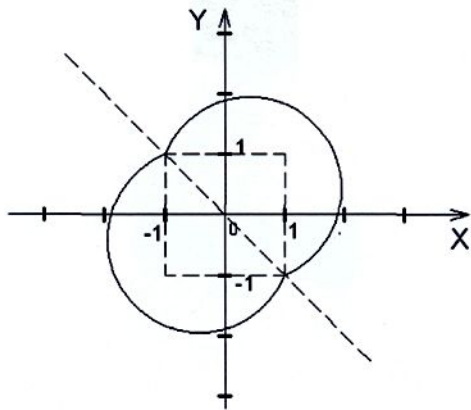
$$(x+|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 0$$



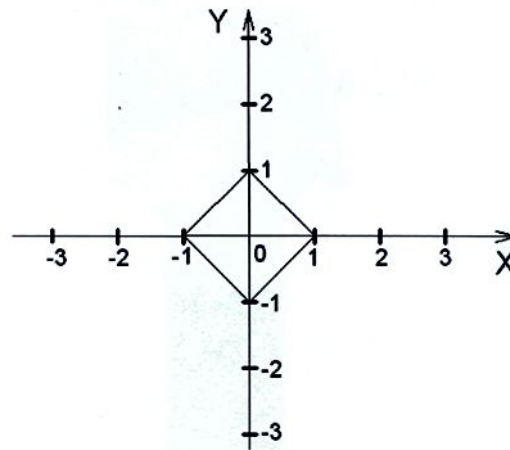
$$(x+|x|)^2 + (y-|y|)^2 = 9$$



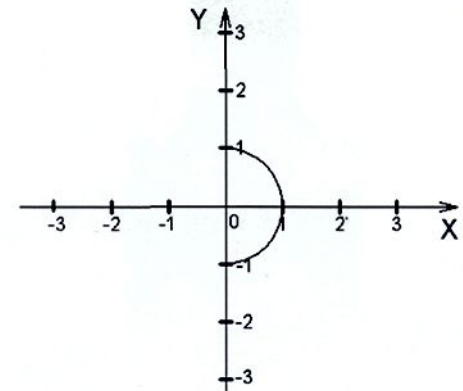
$$x^2 + y^2 = 2|x+y| + 2$$



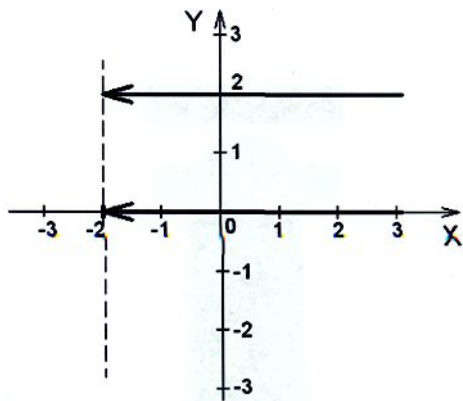
$$x^2 + y^2 = 1 - 2|xy|$$



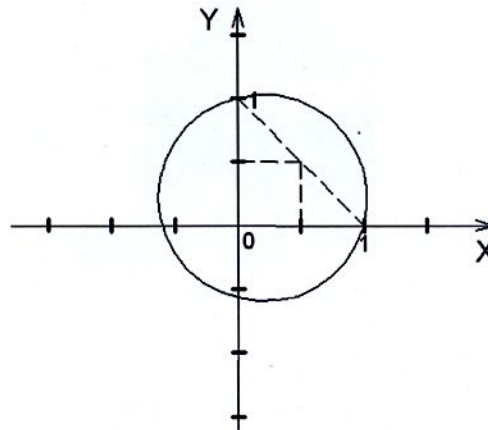
$$x = |x^3 + xy^2|$$



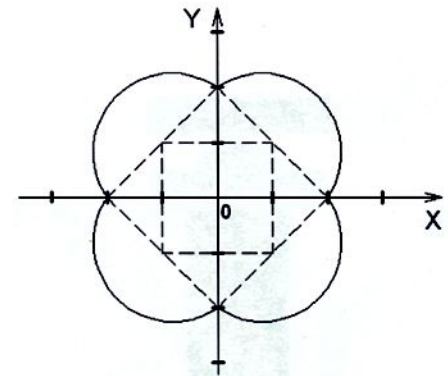
$$(y-1)^2 = (x+2) / |x+2|$$



$$(x+y-1) / (x^2+y^2-1) = 1$$



$$x^2 + y^2 = 2|x| + 2|y|$$



Тема 2

Обобщение методов построения графиков функций, содержащих знак модуля (урок повторения и обобщения)
Оборудование: интерактивная доска.



Цель занятия:

- напомнить методы построения графиков функций, содержащих знак модуля;
- способствовать развитию навыков построения графиков функций с опорой на преобразования симметрии;
- закрепить полученные знания.

Определение

Не зная определения модуля, невозможно построить даже самого простого графика, содержащего абсолютную величину.

Итак, напомним определение функции

$$y = |x| = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0; \\ -x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Построение графиков функций с модулем – частный случай построения графиков сложных функций.

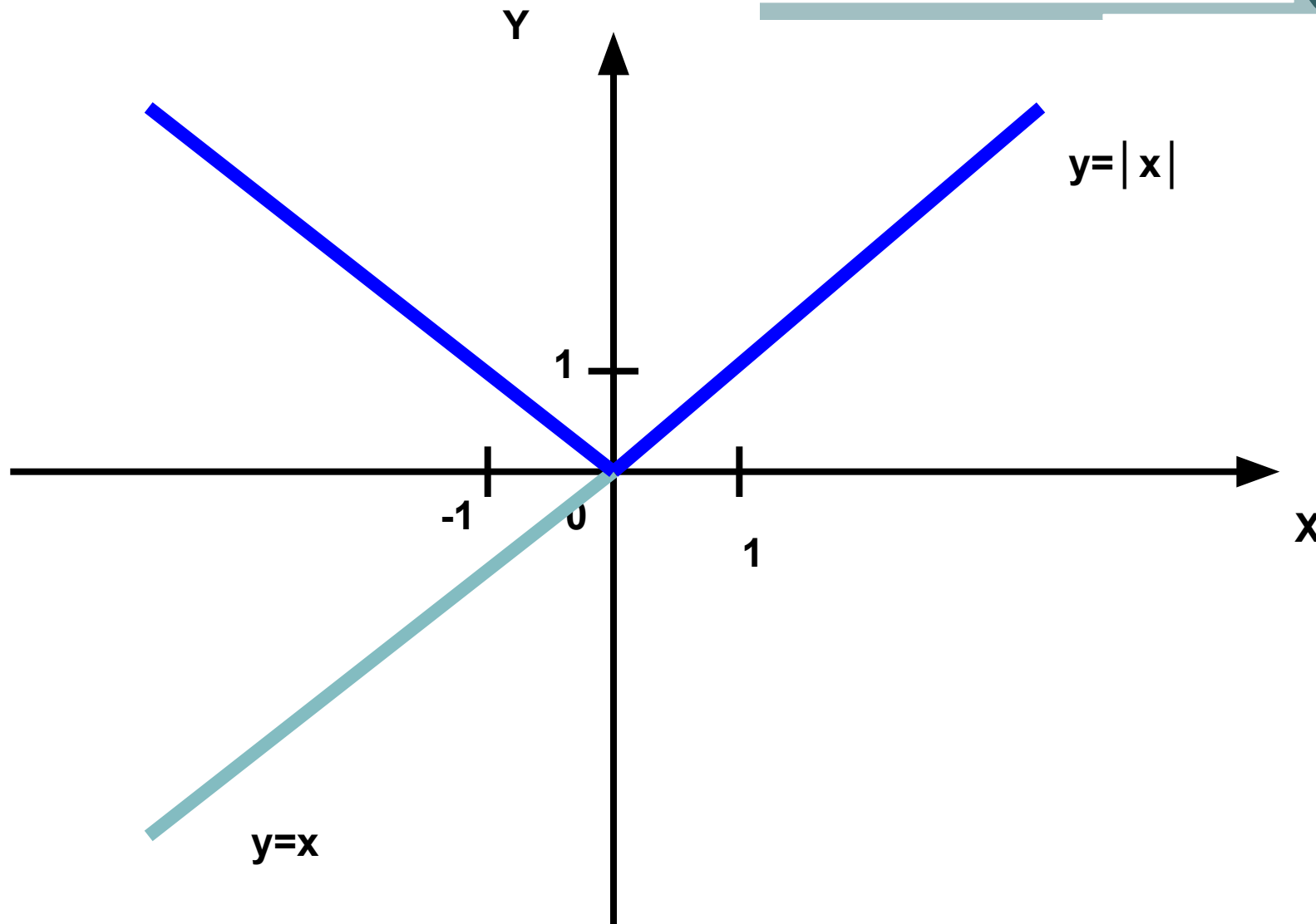


Иллюстрация графика функции $y = |x|$

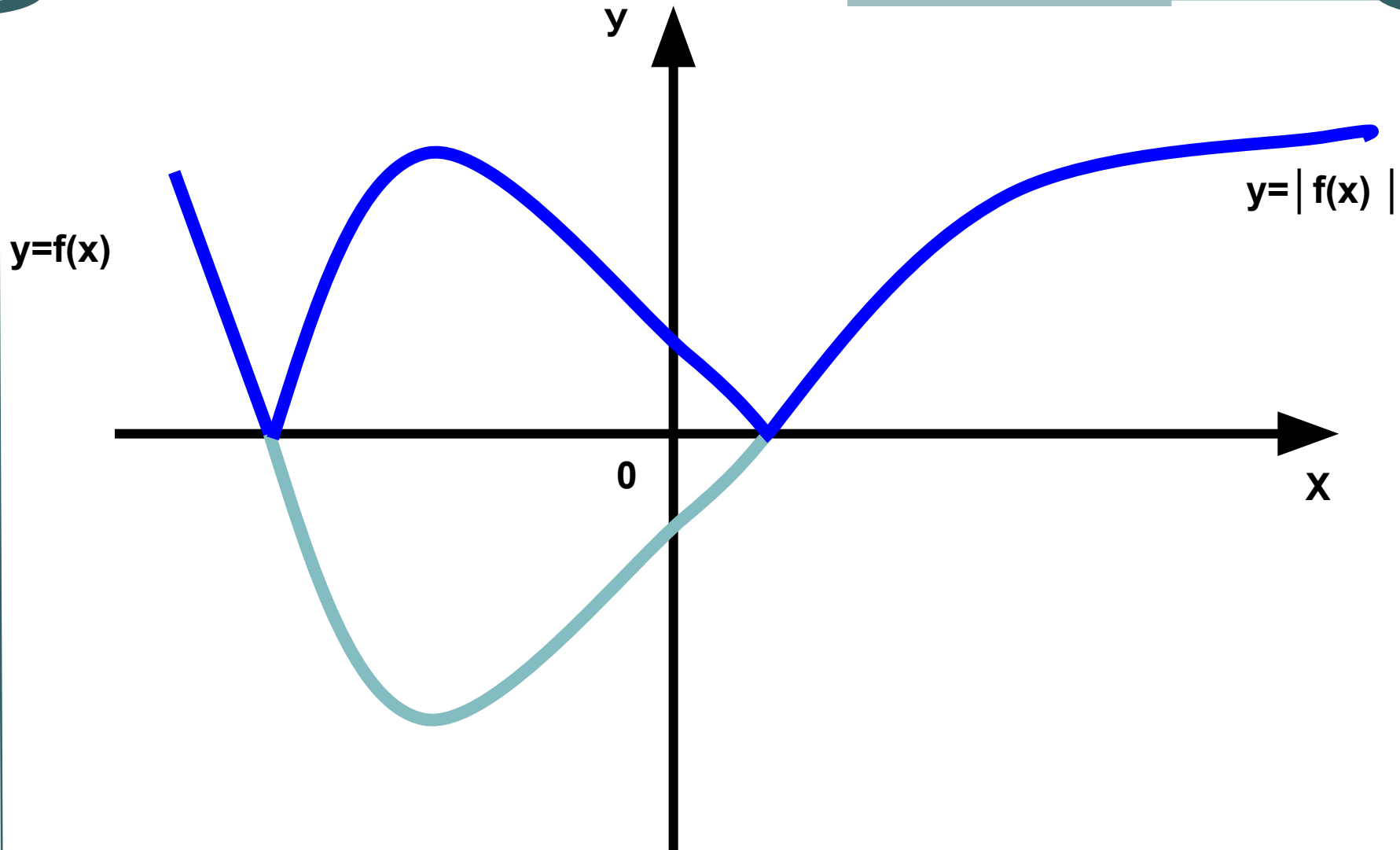


**Чтобы из графика функции $y = f(x)$
получить график функции $y = |f(x)|$,**

нужно:

- 1) построить график функции $y = f(x)$;
- 2) части графика функции $y = f(x)$, лежащие ниже оси абсцисс, зеркально отразить от неё.

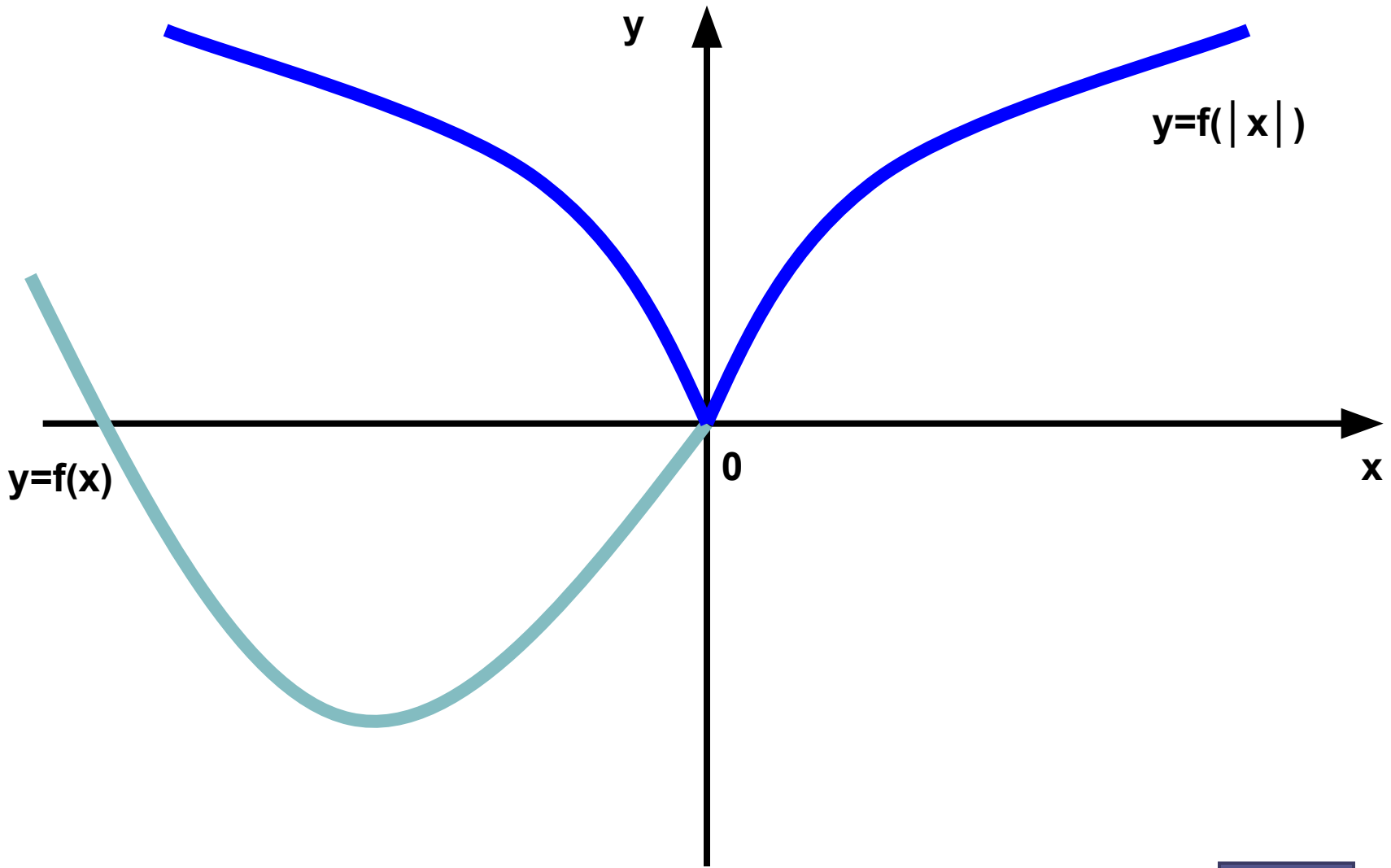




Для того, чтобы построить график функции $y = f(|x|)$, нужно:

- 1) построить график функции $y = f(x)$;
- 2) часть графика функции $y = f(x)$, соответствующую положительной полуоси абсцисс, отразить от оси ординат.



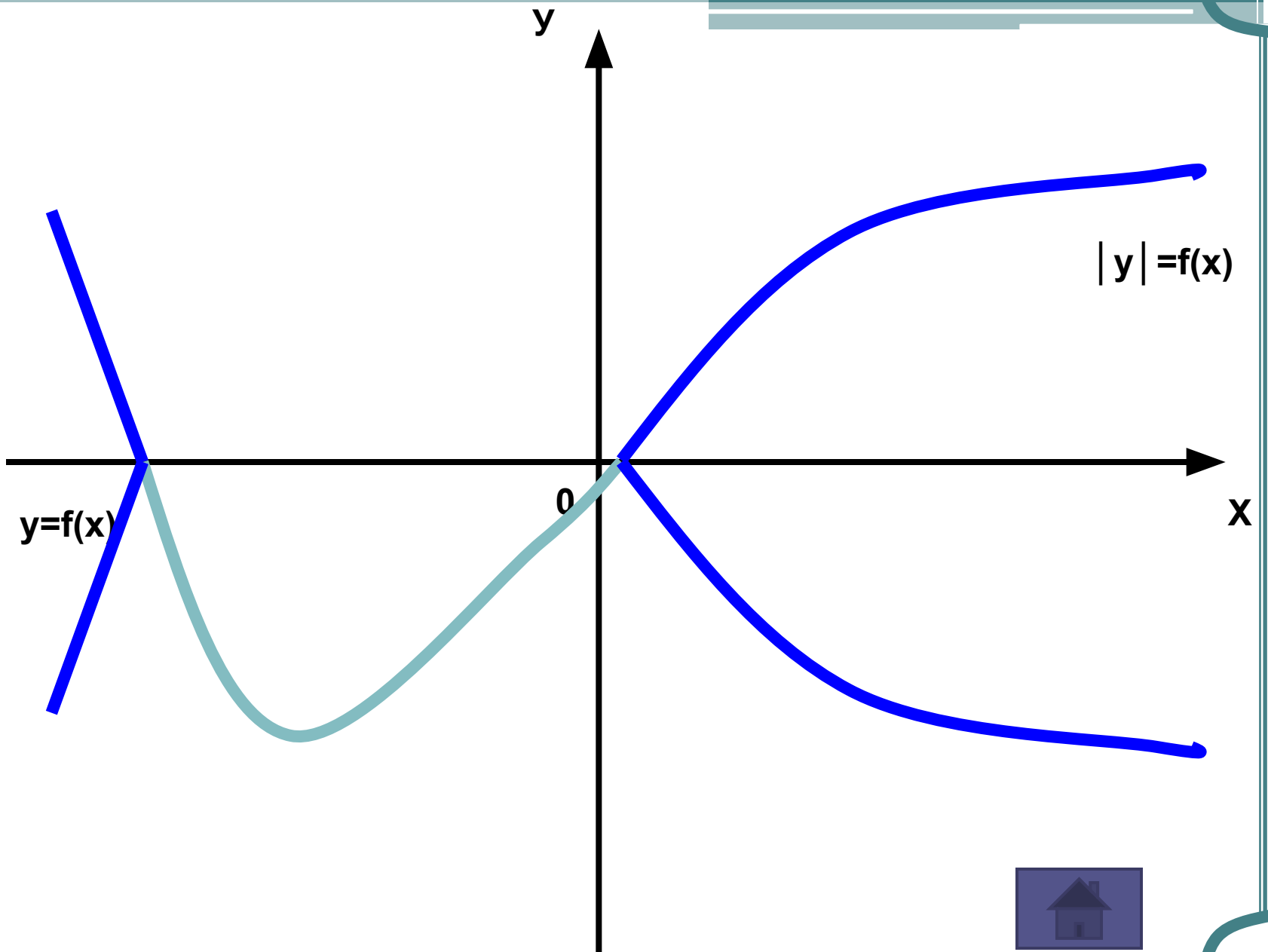


Функция $|y| = f(x)$ является **двузначной**, т.к. по определению абсолютной величины $y = \pm f(x)$, где $f(x) \geq 0$, поэтому график симметричен относительно оси ОХ.

Чтобы построить график этой функции, нужно:

- 1) найти $D(y)$ из условия $f(x) \geq 0$;
- 2) на $D(y)$ построить график функции $y = f(x)$;
- 3) отобразить его зеркально от оси абсцисс.





Графики функций

$$y = |x+a| + |x+b| + \dots + |x+n|$$

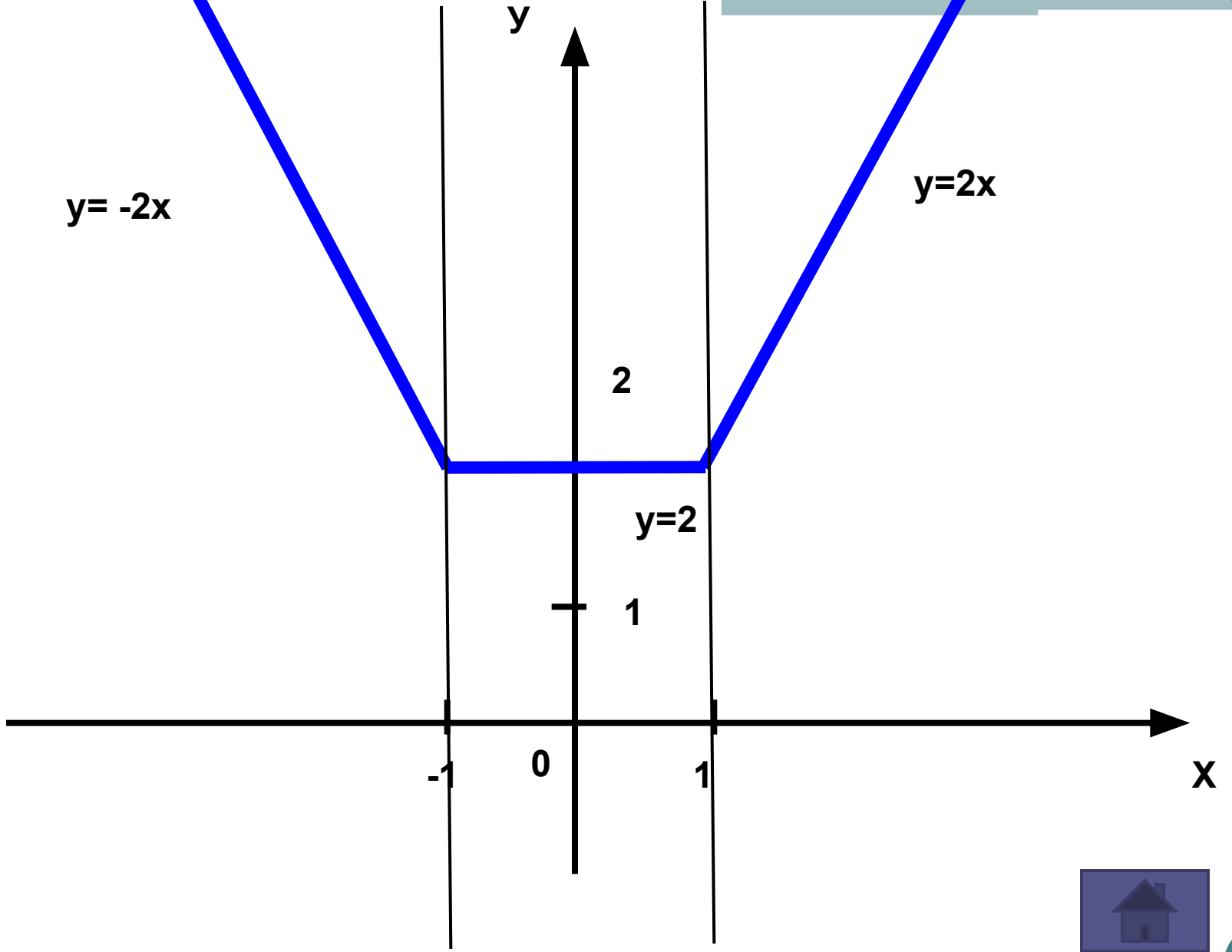
Характерной особенностью графиков функций, содержащих выражения со знаком модуля, является наличие изломов в тех точках, в которых выражение, стоящее под знаком модуля, изменяет знак.



Пример функции $y = |x+1| + |x-1|$.

$$y = \begin{cases} -2x, & \text{при } x \leq -1; \\ 2, & \text{при } -1 < x < 1; \\ 2x, & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$





Итак, графики с модулями кажутся очень сложными и непонятными. Разобравшись с графиками основных видов функций, аналитическая запись которых содержит знак абсолютной величины, можно узнать много нового и полезного. Работа с ними увлекательна и интересна.

Примеры на построение

1. $|y| = 2$

Строим $y=2$ и отражаем его относительно оси абсцисс-геометрическим местом точек являются две параллельные прямые

3. $y = |x^2 - 3x + 2|$

Строим параболу и нижнюю ее часть отображаем относительно оси абсцисс.

2. $|y| = x^2 - 3x + 2$

На интервале $(1; 2)$ функция отрицательна, следовательно уравнение не имеет смысла. Искомое ГМТ состоит из кусков параболы на полуинтервалах $x \leq 1$ и $x \geq 2$ и их зеркальное отображение относительно оси ОХ.

4. $y = x^2 - 3|x| + 2$

Строим $y = x^2 - 3x + 2$ при $x \geq 0$ и симметрично отображаем его относительно оси ординат

5. $y = |x| + x$

Раскрыв знак модуля, функцию можно записать в виде:

$$y = \begin{cases} 2x, & \text{при } x \geq 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

6. $y = |x|(x-2)$

После раскрытия модуля функция примет вид:

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x, & \text{при } x \geq 0, \\ -x^2 + 2x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Самостоятельная работа

Постройте графики функций:

$$y = |x^2 - 3x + 2|$$

$$y = |x^2 - 3|x| + 2|$$

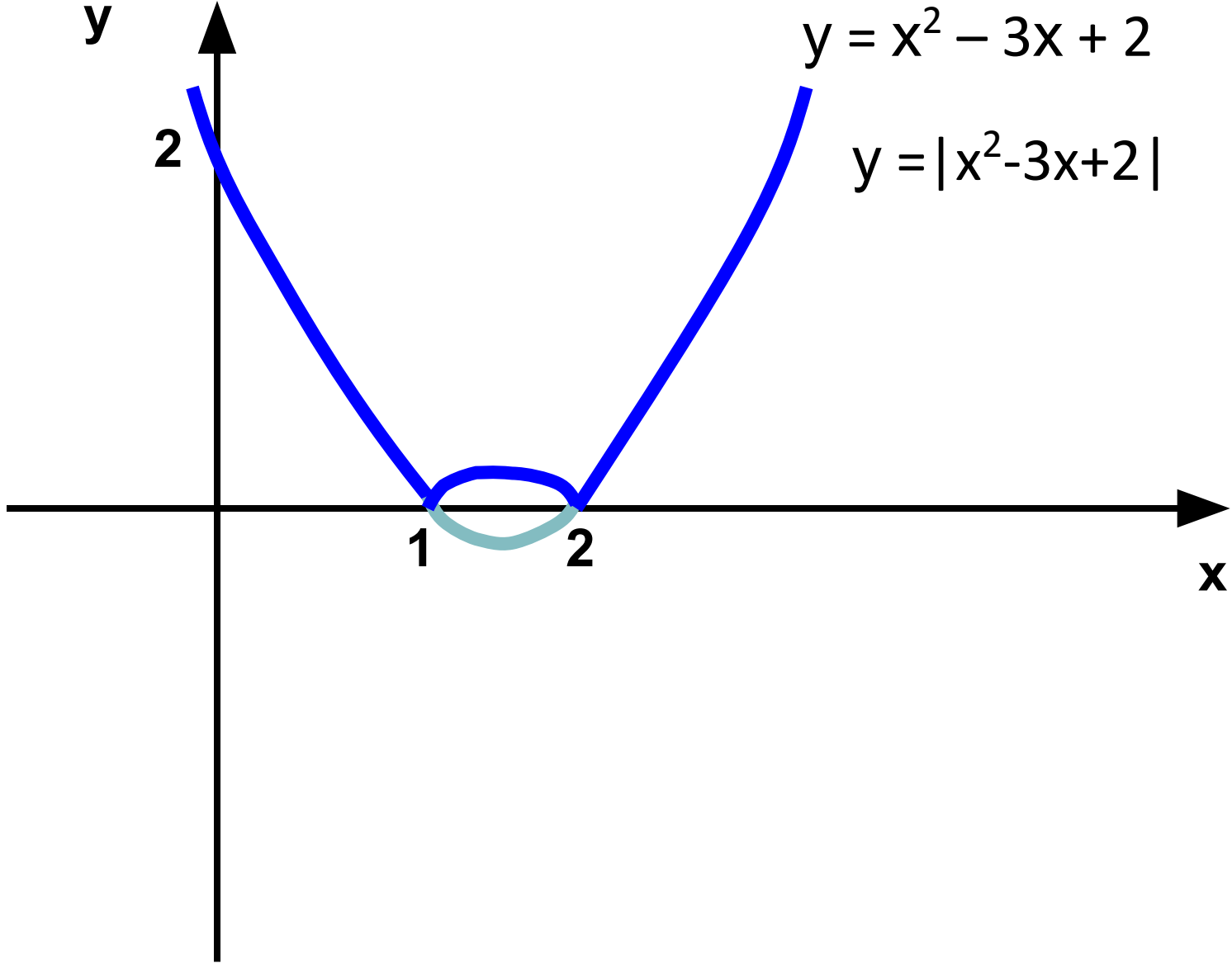
$$y = x^2 - 3|x| + 2$$

$$|y| = x^2 - 3x + 2$$

с помощью преобразования функции

$$y = x^2 - 3x + 2$$

Проверим правильность
выполнения работы.

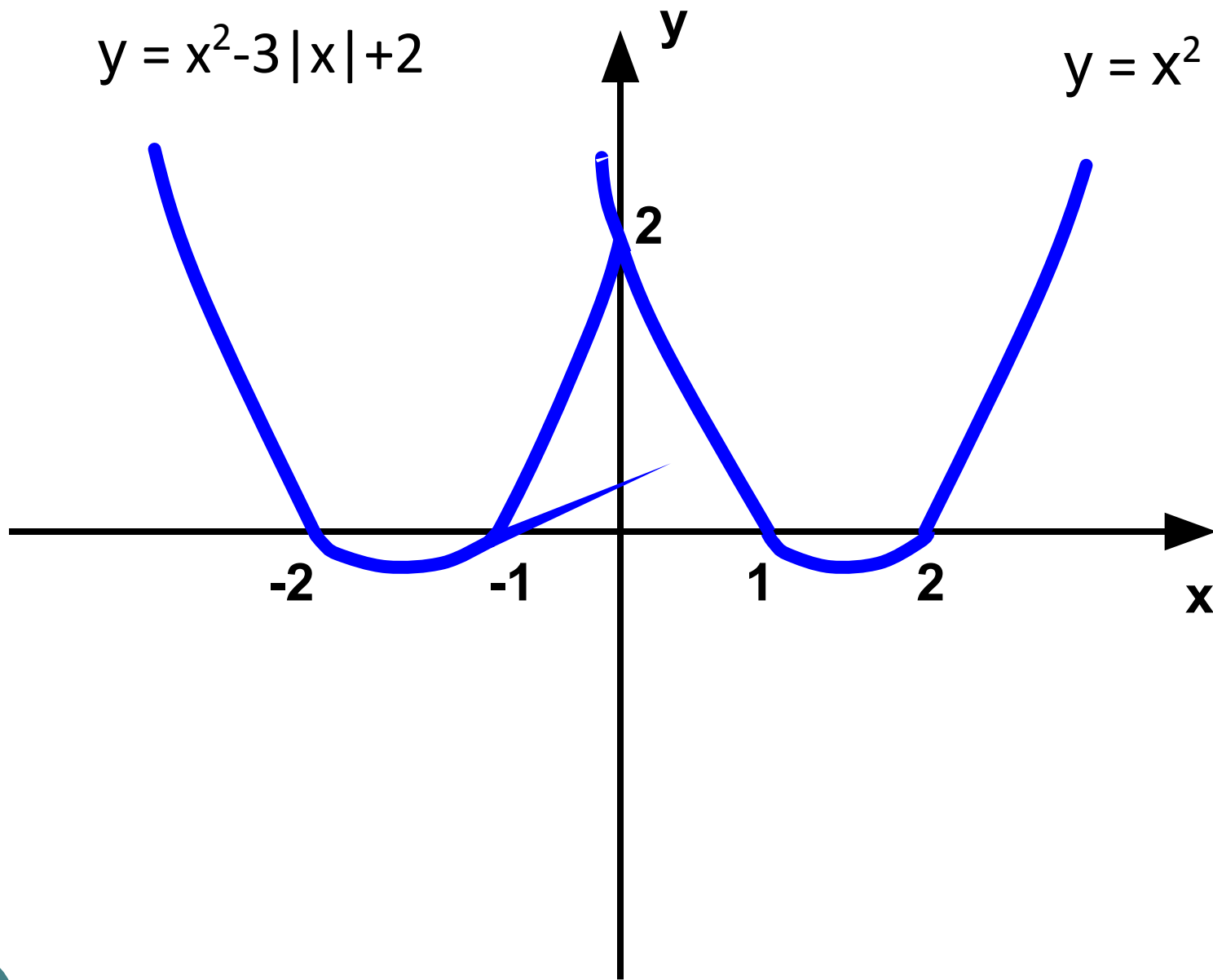


$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$y = |x^2 - 3x + 2|$$

$$y = x^2 - 3|x| + 2$$

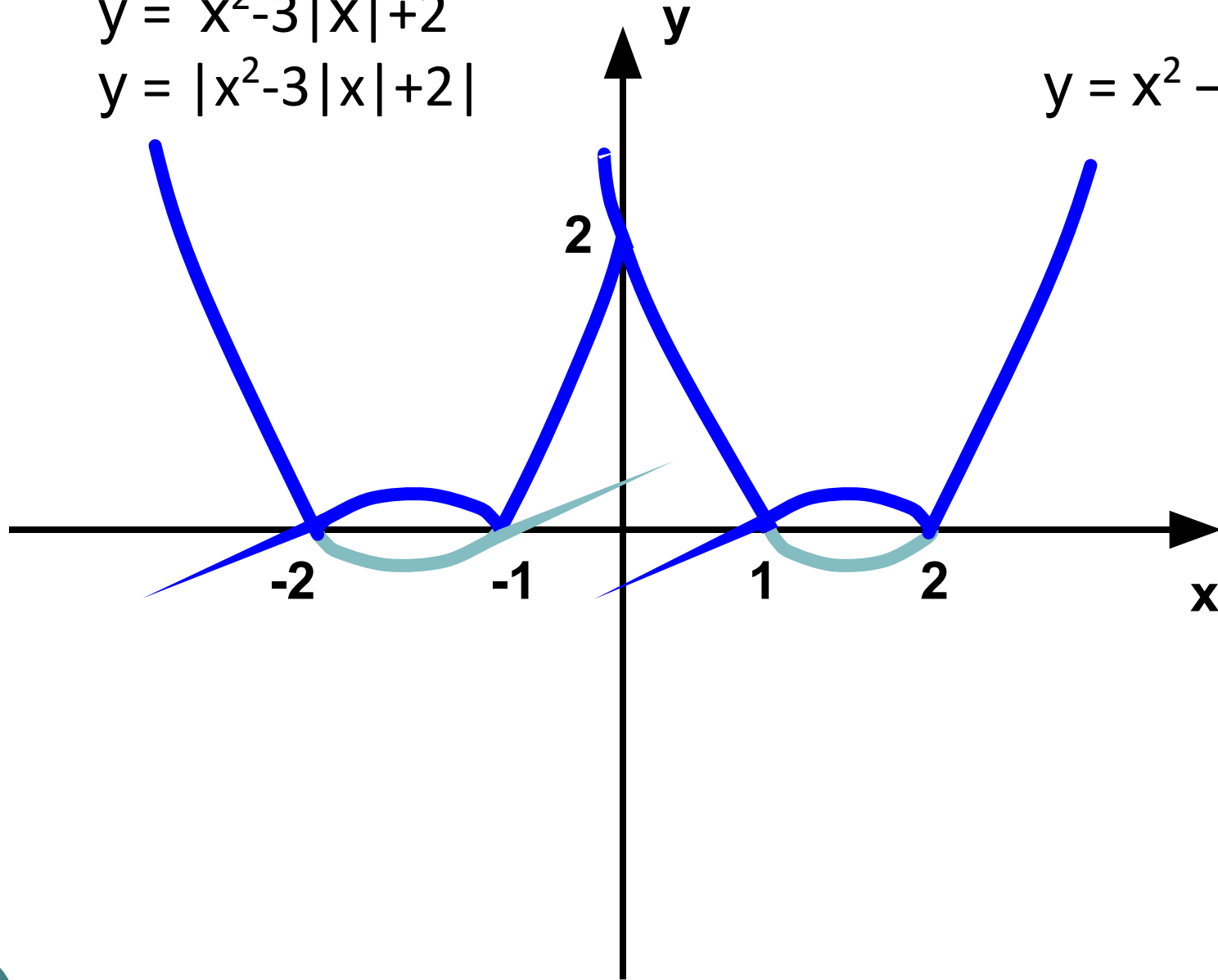
$$y = x^2 - 3x + 2$$

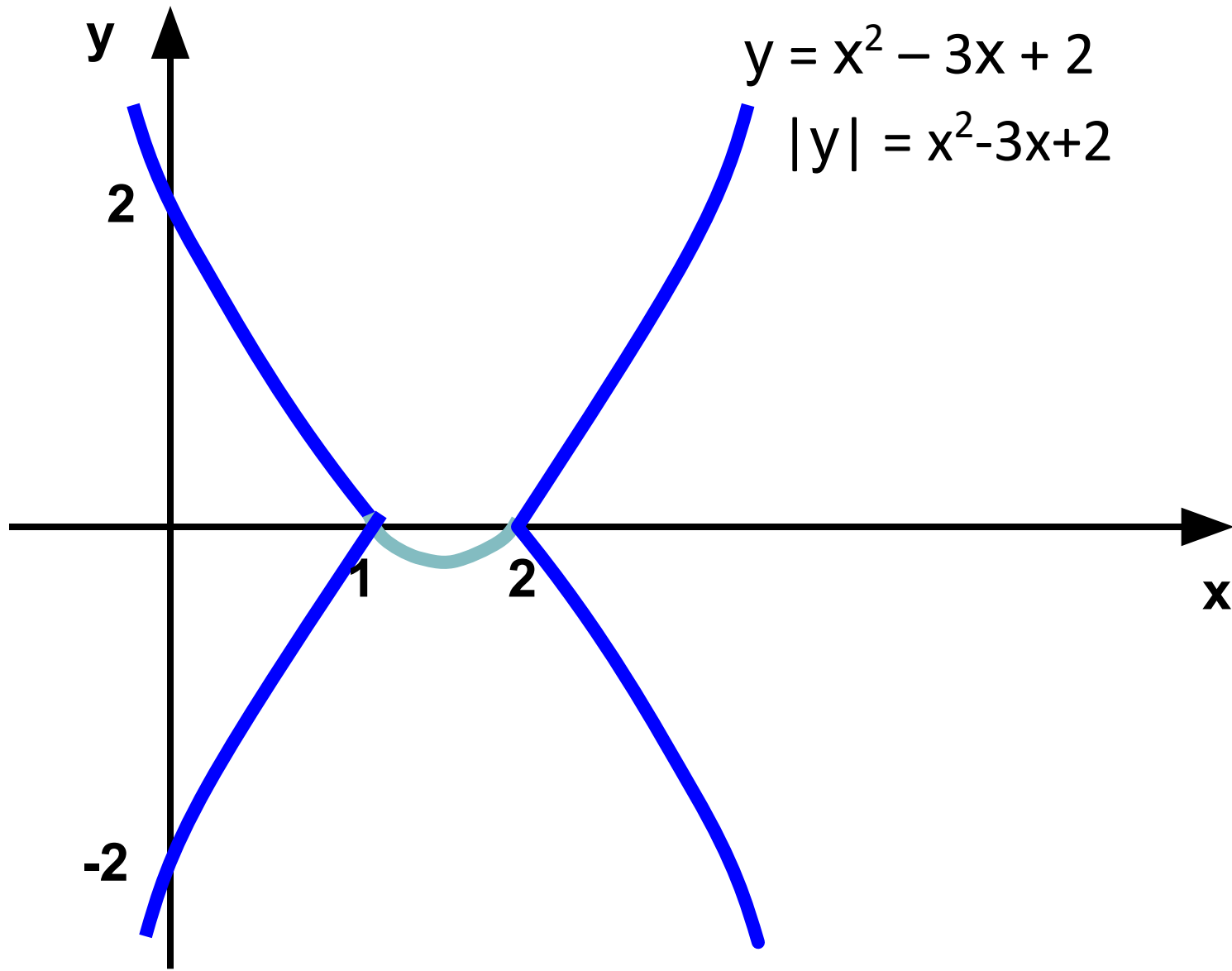


$$y = x^2 - 3|x| + 2$$

$$y = |x^2 - 3|x| + 2|$$

$$y = x^2 - 3x + 2$$





$$y = x^2 - 3x + 2$$

$$|y| = x^2 - 3x + 2$$

Дидактический материал для учащихся.

Упражнения. Построить ГМТ, заданные условием

$$1) y = x^2 - |x| - 6$$

$$2) y = |x^2 - x - 6|$$

$$3) y = |x^2 - |x| - 6|$$

$$4) y = |x-1| + |x-3|$$

$$5) y = |x| - |x-1|$$

$$6) y = 3x + 1 - |x-1| + 2|x|$$

$$7) |y| = x^2 - 5x + 6$$

$$8) |y| = |x^2 - x - 6|$$

$$9) y = |x-2| \cdot x - x^2$$

$$10) y = |x+2| + 2|x-1| - x$$

$$11) y = |x-1| + |x+1| + x$$

$$12) y = |x+1| / (x+1)$$

$$13) y = x |y| \quad 14) |y| = |x^2 - 3x + 2|$$

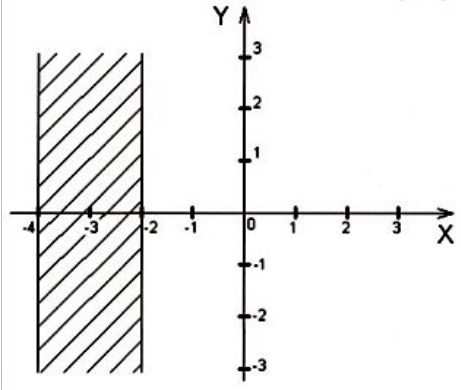
Домашнее задание

Завершите начатую работу по проекту и сделайте к нему мини-презентацию.

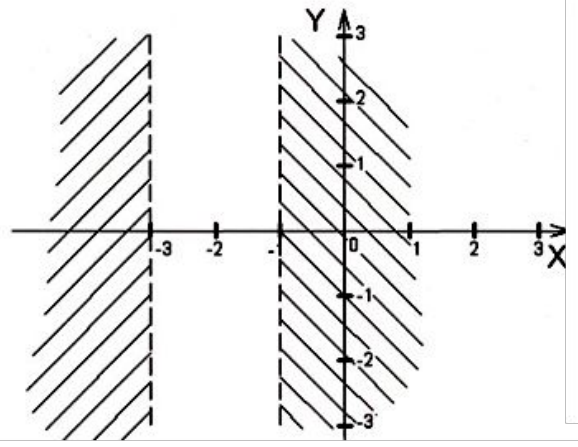
ВСЕМ СПАСИБО!



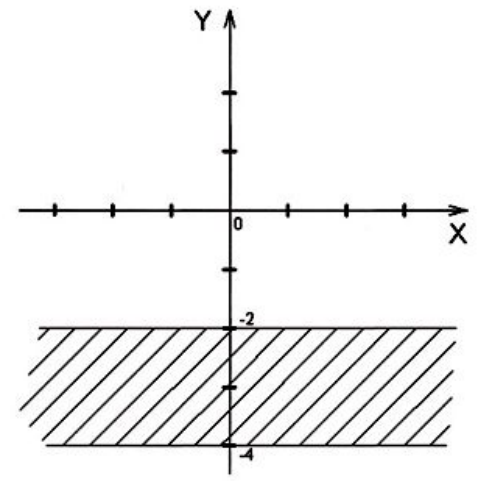
1. $|x+3| \leq 1$



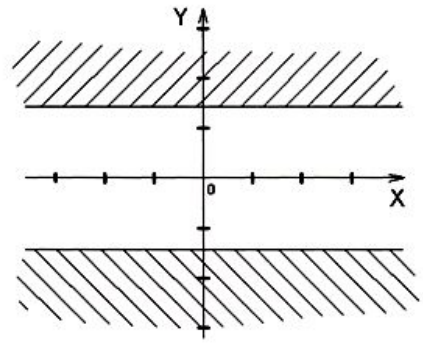
2. $|x+2| > 1$



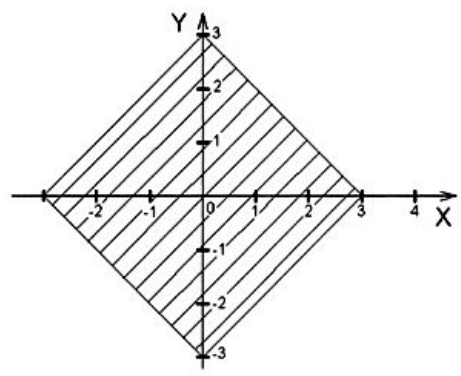
3. $|y+3| < 1$



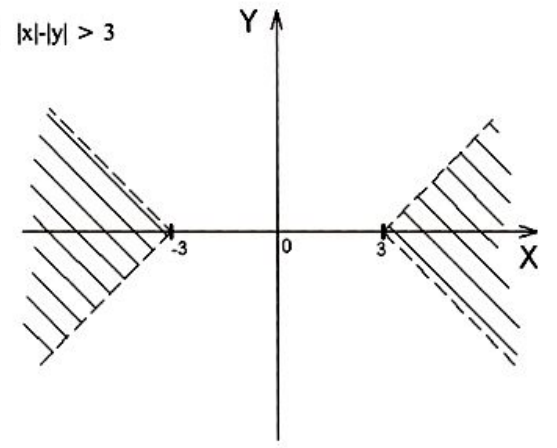
4. $|y-2| \geq 2$



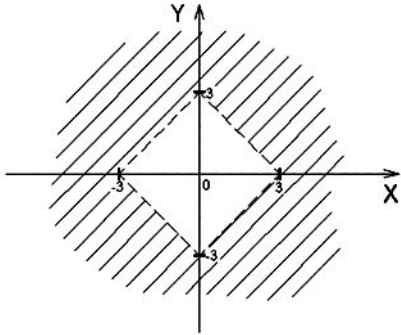
5. $|x+y| \leq 3$



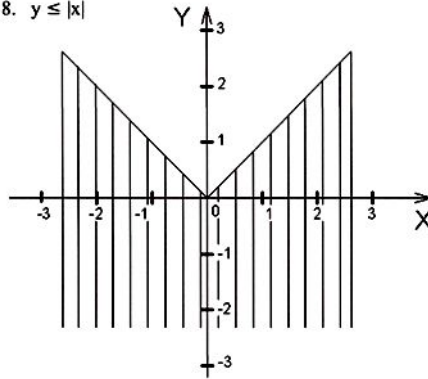
6. $|x-y| > 3$



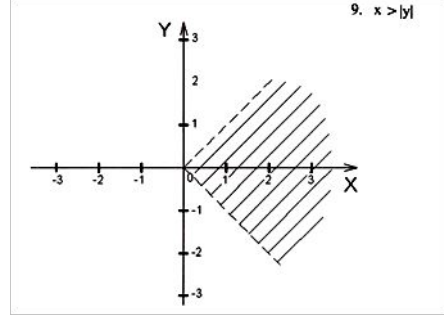
7. $|x|+|y| > 3$



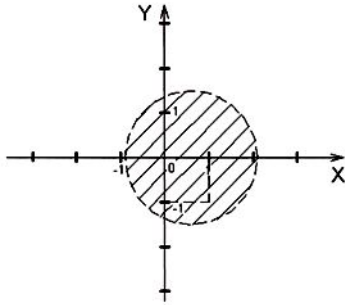
8. $y \leq |x|$



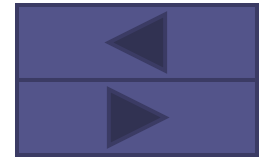
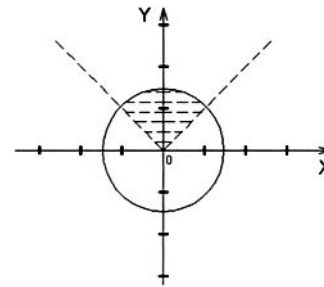
9. $x > |y|$



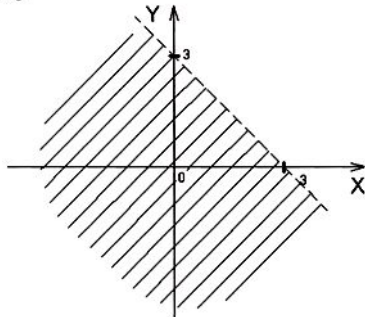
10. $x^2+y^2-2x-2y < 7$



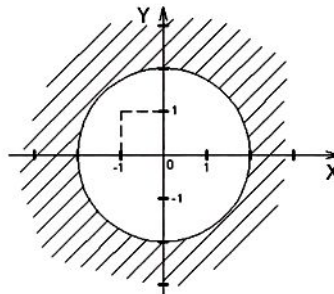
11. $\begin{cases} y > |x| \\ x^2 + y^2 \leq 0 \end{cases}$



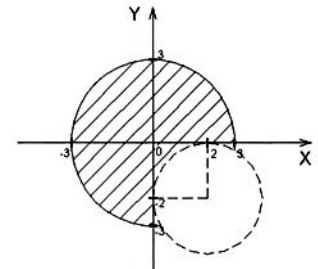
12. $x+y < 3$

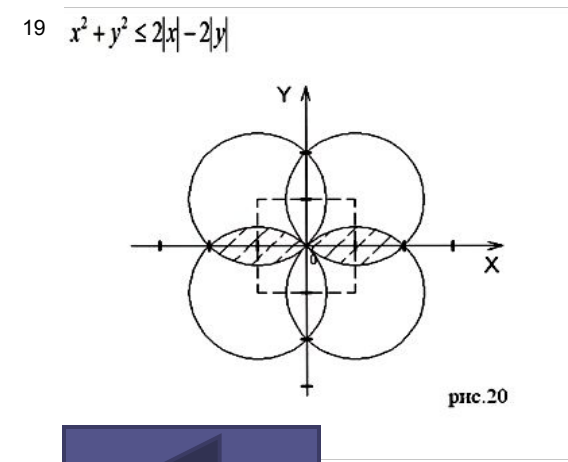
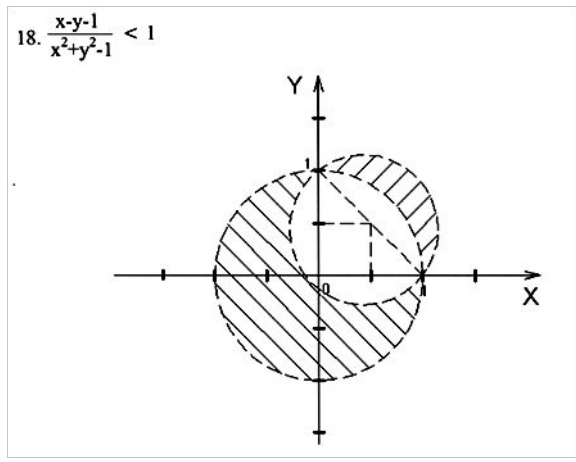
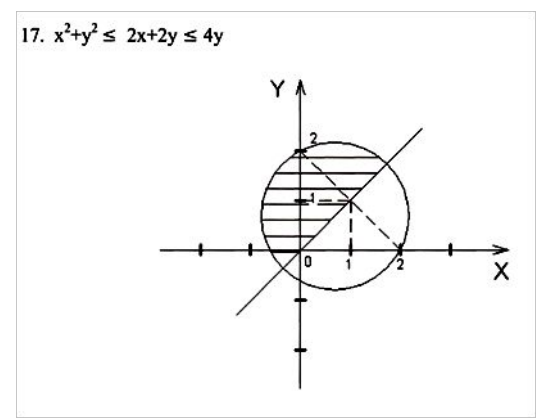
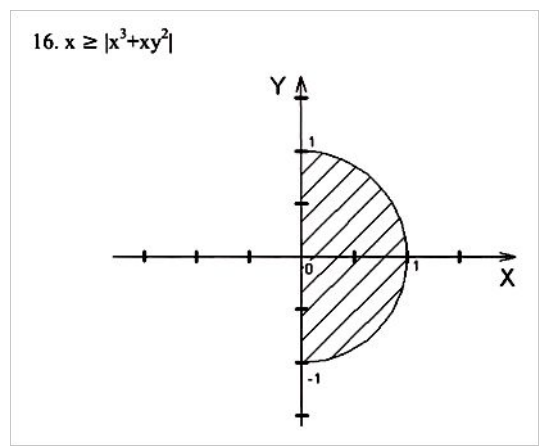
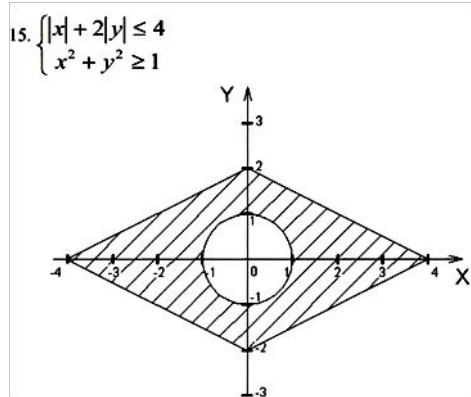


13. $x^2+y^2-2x-2y \geq 7$

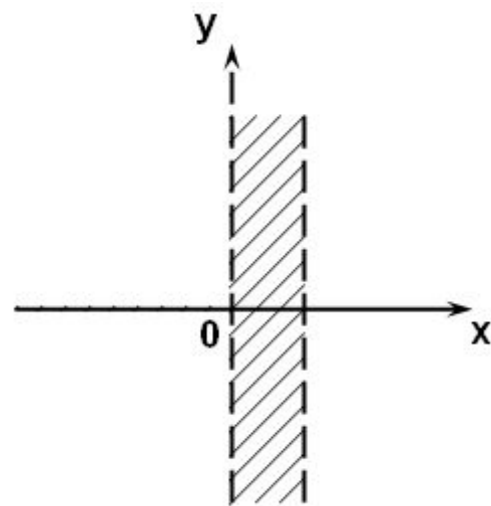
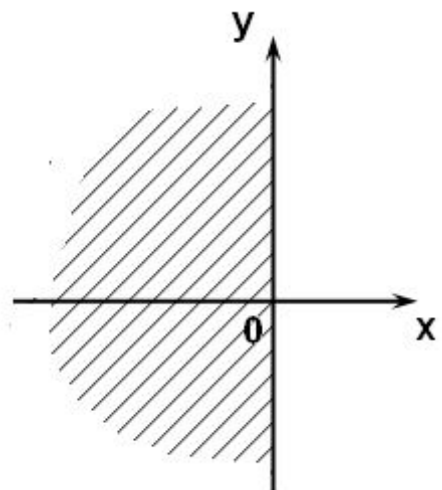
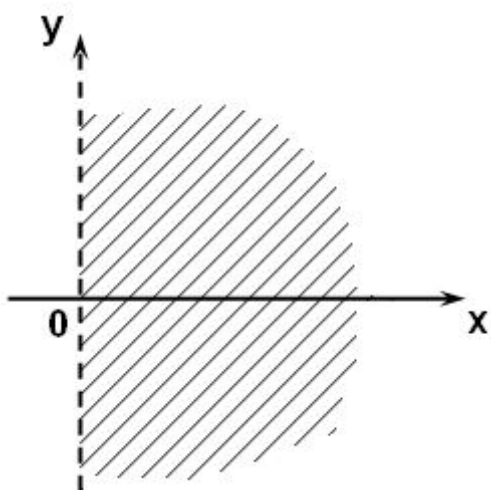


14. $\begin{cases} x^2+y^2-4x+6y+9 > 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$

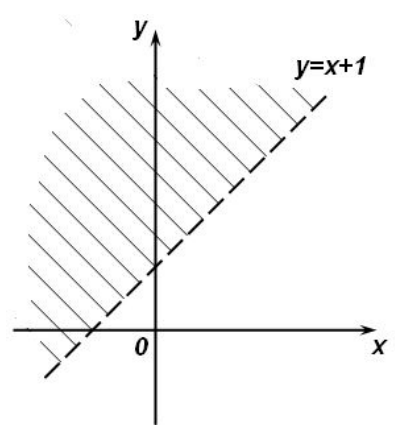
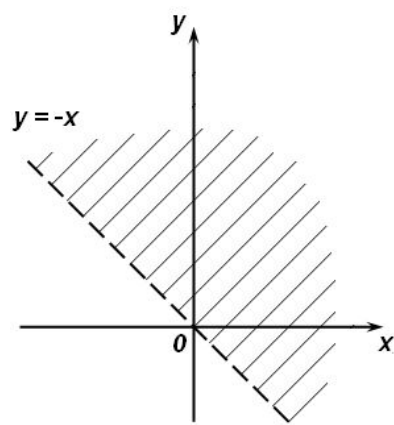
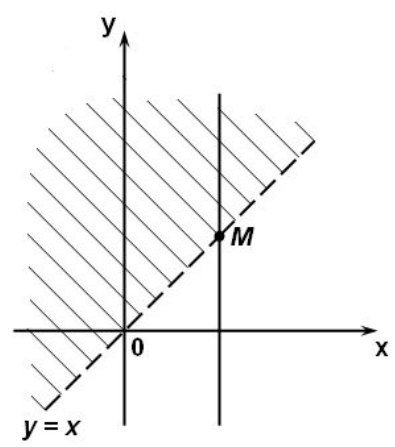




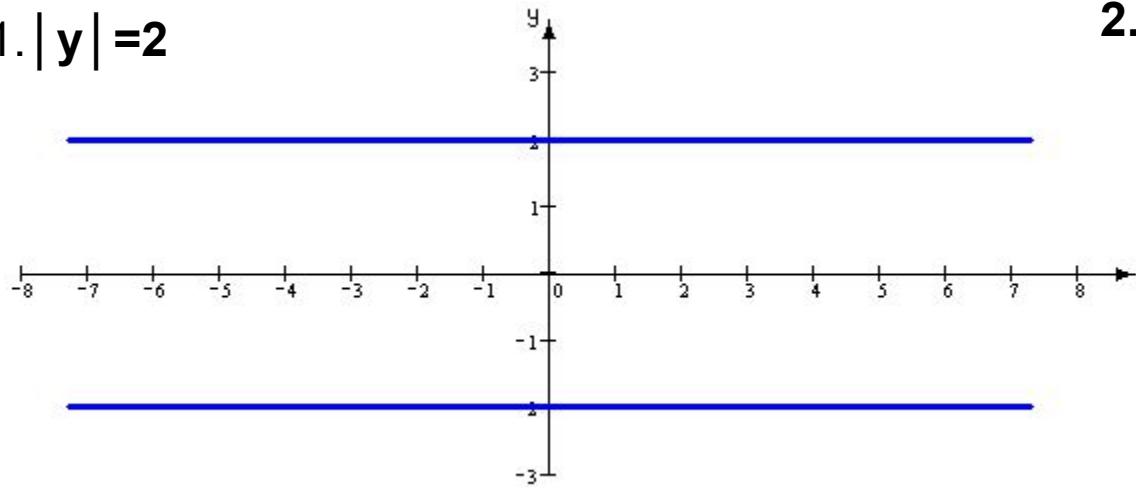
Упражнение 1



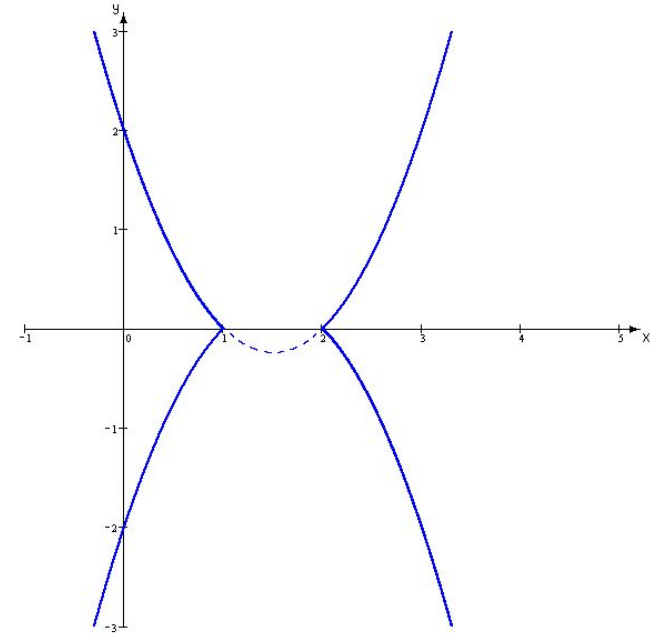
Упражнение 2



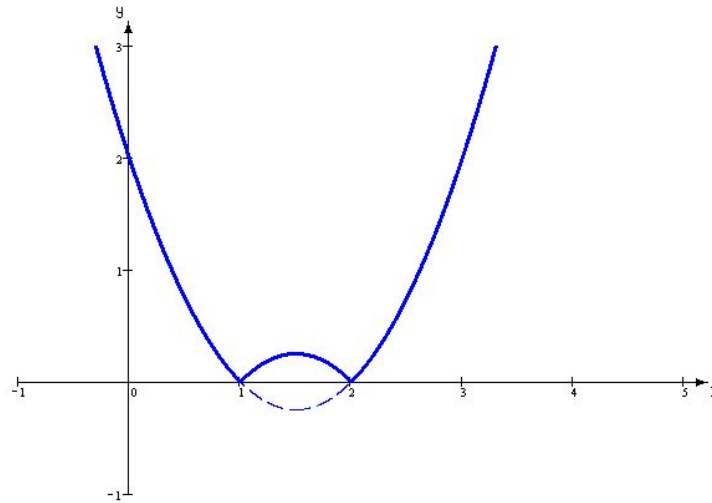
1. $|y|=2$



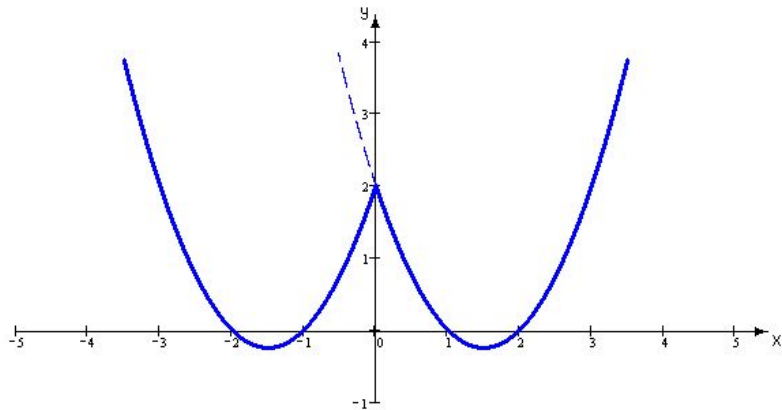
2. $|y|=x^2-3x+2$



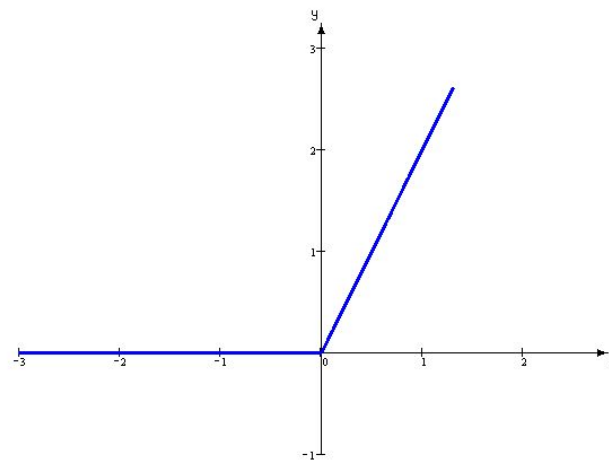
3. $y = |x^2-3x+2|$



4. $y = x^2 - 3|x| + 2$



5. $y = |x| + x$



6. $y = |x|(x-2)$

