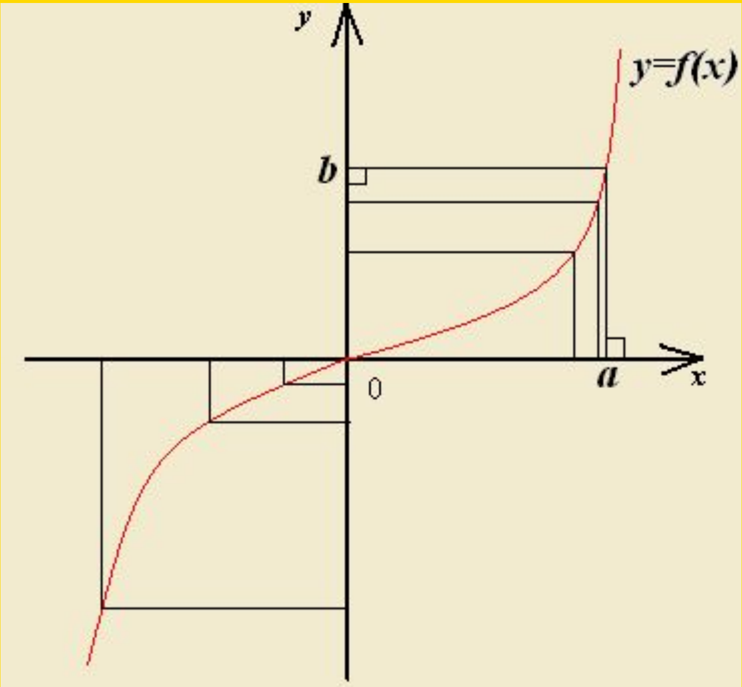
Пределы

Составитель:
Станкевич Виктория,
Руководитель: Коренюгина Людмила Михайловна

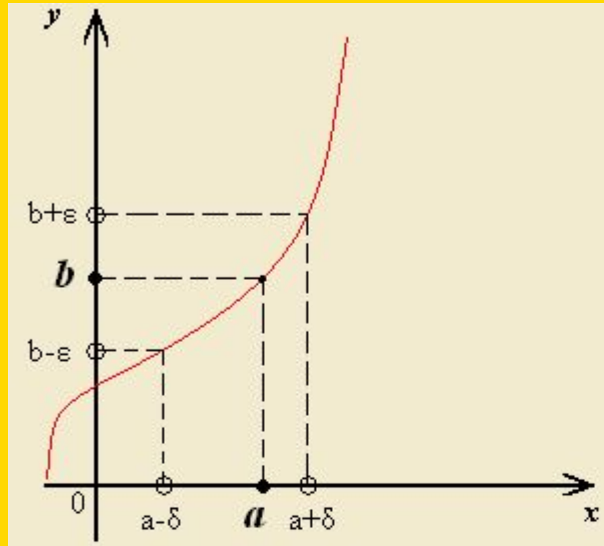
Понятие предела функции

- *Определение:* ***Пределом функции*** $y = f(x)$ ***называется некоторое число b при x→a.***
- ***И записывается это так :*** $\lim_{x \to a} f(x) = b$



Геометрический смысл предела

Определение: *Для любого* $\varepsilon>0$ *можно указать δ-окрестность точки а на оси* Ox *,такую что для всех* x *из этой окрестности кроме* $x=a$*, соответствующее значение* y *лежат в ε-окрестности точки* b



Математическая запись:

При $|x-a|<\delta$ *выполняется* $|f(x)-b|<\varepsilon$

$-\delta<x-a<\delta \leftrightarrow -\varepsilon<f(x)<\varepsilon$

$a-\delta<x<a+\delta \leftrightarrow b-\varepsilon<f(x)<b+\varepsilon$

$x\in(a-\delta;a+\delta) \leftrightarrow f(x)\in(b-\varepsilon;\ b+\varepsilon)$

Геометрический смысл предела (продолжение)

- Если число b_1 есть предел функции $y= f(x)$ при $x\to a$, так что $x<0$, то число b_1 называется левым односторонним пределом точки a:

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=b_1$$

- Если число b_2 есть предел функции $y= f(x)$ при $x\to a$, так что $x>0$ то число b_2 называется правым односторонним пределом точки a:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=b_2$$

- Если $b_1=b_2=b$, то число b есть предел этой функции при $x\to a$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$

Бесконечно малые и большие функции и их свойства

- ***Определение:*** Ф у н к ц и я ***f(x)*** называется бесконечно малой при $x \to a$ $(x \to \infty)$ если предел этой функции $\lim\limits_{x \to a (x \to \infty)} f(x) = 0$

- ***Определение:*** Функция ***f(x)*** называется бесконечно большой при $x \to a$ $(x \to 0)$ если предел этой функции $\lim\limits_{x \to a (x \to 0)} f(x) = \infty$

Свойства бесконечно малых и больших функции

- **Функция обратная по величине бесконечно большой, есть бесконечно малая**

$$\lim_{x\to 0} x = 0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

- **Функция обратная по величине бесконечно малой, но отличная от 0, есть бесконечно малая**

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Основные теоремы о пределах

Теорема 1: Для того, чтобы число А было пределом функции ***f(x)*** при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была представлена в виде $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая.

Следствие 1: Функция не может в одной точке иметь 2 различных предела.

Теорема 2: Предел постоянной величины равен самой постоянной

Теорема 3: Если функция $f(x) \geq 0 \, (f(x) \leq 0)$ для всех ***x*** в некоторой окрестности точки ***a***, кроме, быть может, самой точки ***a***, и в точке ***a*** имеет предел , то

$$\lim_{x \to a} f(x) \geq 0 \quad \lim_{x \to a} f(x) \leq 0$$

Основные теоремы о пределах (продолжение)

Теорема 4: Если функция $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют приделы при $x \to a$,
то при $x \to a$, имеет пределы также их сумма $f_1(x)+f_2(x)$, произведение $f_1(x)*f_2(x)$, и при условии $\lim f_2(x) \neq 0$ частное $f_1(x)/f_2(x)$, причем

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)+f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) + \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim_{x\to a} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\to a} f_1(x) / \lim_{x\to a} f_2(x).$$

Следствие 2: Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то $\lim_{x\to a}(f(x))^n = (\lim_{x\to a} f(x))^n$, где n – натуральное число.

Следствие 3: Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x), \text{ C - const}$$

Неопределенности и методы их решений

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$

- *Методы:*

1. ***Разложение числителя и знаменателя на множители с последующим сокращением***
2. ***Устранение иррациональных разностей. Домножение на сопряженное.***
3. ***Первый замечательный предел.***

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

Неопределенности и методы их решений

Неопределенность вида

- ***Методы:* Деление на наибольшую степень**

- ***Предел отношения двух многочленов (при условии, что аргумент стремится к ∞) равен пределу отношения их старших членов.***

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m + a_1x^{m+1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n+1} + \ldots + b_n} = \lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n} = \begin{cases} 0 \ \ (\mathrm{m} < \mathrm{n}) \\ \dfrac{a_0}{b_0} \ \ (\mathrm{m} = \mathrm{n}) \\ \infty \ \ (\mathrm{m} > \mathrm{n}) \end{cases}$$

Здесь $\mathrm{a}_0 \neq 0$ и $\mathrm{b}_0 \neq 0$

Примеры:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 14x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x}-1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n-1}{n^4+2n}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Пусть *f(x)* и *φ(x)* – функции, для которых существуют пределы при

$$x \to x_0 \quad \textbf{или} \quad x \to \infty$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} f(x) = A \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \varphi(x) = B$$

Тогда справедливы следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1.

Функция не может иметь более одного предела.

Доказательство:

Предположим обратное: что функция *f(x)* имеет два предела: *A* и *D*, $A \neq D$

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} f(x) = A \qquad \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} f(x) = D$$

Тогда функцию *f(x)* можно представить как сумму:

$$f(x) = \alpha(x) + A \quad \text{или} \quad f(x) = \beta(x) + D$$

Где $\alpha(x), \beta(x)$ **- бесконечно малые величины при**

$$x \to x_0 \quad \text{или} \quad x \to \infty$$

Вычитаем почленно эти равенства:

$$0 = A - D + \alpha(x) - \beta(x)$$

$$D - A = \alpha(x) - \beta(x)$$

Но по условию теоремы $A \neq D$, а разность

$$\alpha(x) - \beta(x)$$

является бесконечно малой величиной. Следовательно, предположение о существовании второго предела неверно, и функция имеет единственный предел.

ТЕОРЕМА 2.

Предел алгебраической суммы (разности) конечного числа функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)\pm\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\varphi(x)=A\pm B$$

Доказательство:

По условию теоремы: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} f(x) = A$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} \varphi(x) = B$

Тогда функции *f(x)* и *φ(x)* можно представить как суммы:

$$f(x) = \alpha(x) + A \quad \text{и} \quad \varphi(x) = \beta(x) + B$$

Где $\alpha(x), \beta(x)$ **- бесконечно малые величины при** $x \to x_0$ **или** $x \to \infty$

Складываем почленно эти равенства:

$$f(x) + \varphi(x) = A + B + \boxed{\alpha(x) + \beta(x)}$$

Сумма бесконечно малых величин является величиной бесконечно малой.

Таким образом, функция *f(x)* + *φ(x)* представляет собой сумму числа A+B и бесконечно малой величины, следовательно

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \left(f(x) + \varphi(x) \right) = A + B$$

ТЕОРЕМА 3.

Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\varphi(x)=A\cdot B$$

Следствие.

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}}\left(C\cdot f(x)\right)=C\cdot\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} f(x)=C\cdot A$$

ТЕОРЕМА 4.

Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} f(x)}{\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \varphi(x)} = \frac{A}{B}$$

ТЕОРЕМА 5.

Если $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$ **и** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$

то предел сложной функции существует и равен

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A$$

ТЕОРЕМА 6.

Если в некоторой окрестности точки x_0 (или при достаточно больших x) $f(x) < \varphi(x)$ то

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} f(x) \le \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \varphi(x)$$

Замечание

В этих теоремах полагается, что существуют пределы функций f(x) и φ(x), из чего следует существование пределов суммы, произведения или частного этих функций.

Однако из существования пределов суммы, произведения или частного еще не следует, что существуют пределы самих функций f(x) и φ(x).

П р и м е р.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(tgx \cdot ctgx \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 1 = 1$$

Но: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx$ **- не существует**

Таблица эквивалентности пределов

Пусть функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией в точке a, то есть

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$$

тогда имеют место следующие соотношения:

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x) \qquad e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x) \qquad a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$$

$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x) \qquad \ln(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)$$

$$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x) \qquad \log_a(1+\alpha(x)) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$$

$$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2} \qquad (1+\alpha(x))^m - 1 \sim m\alpha(x)$$

Примеры

ПРИМЕР

Задание Используя таблицу эквивалентных бесконечно малых, вычислить предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \arcsin x^2}{\sin x}$$

Решение Данный предел имеет неопределенность

$$\left[\frac{0 \cdot \arcsin 0^2}{\sin 0} = \frac{0}{0}\right]$$

Перейдем под знаком предела к эквивалентным бесконечно малым (это можно сделать, поскольку аргументы арксинуса и синуса стремятся к нулю):

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \arcsin x^2}{\sin x} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Ответ $\lim_{x\to 0} \frac{x \arcsin x^2}{\sin x} = 0$

ПРИМЕР

Задание Найти предел

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1}$$

Решение Выясним, имеет ли рассматриваемый предел неопределенность и если да, то какого типа:

$$\left[\frac{\operatorname{tg}(1-1)}{1^2-1} = \frac{\operatorname{tg} 0}{0} = \frac{0}{0}\right]$$

То есть имеем неопределенность типа $\left[\frac{0}{0}\right]$. Поскольку аргумент тангенса стремится к нулю, при стремлении x к единице, то можно тангенс заменить эквивалентной ему величиной:

$$\operatorname{tg}(x-1) \sim x-1$$

К знаменателю дроби применим формулу сокращенного умножения «разность квадратов»:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1} \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Ответ $\lim_{x \to 1} \frac{\operatorname{tg}(x-1)}{x^2-1} = \frac{1}{2}$