Решение заданий ЕГЭ с применением графиков функций, уравнений, неравенств

B11

11 класс, подготовка к ЕГЭ

Подготовила:
Ефимова Людмила Иосифовна,
учитель математики МБОУ «СОШ №9»
высшая квалификационная категория

Задачи, решаемые при помощи графика линейной функции *(прямой):*

- тепловое расширение рельса;
- месячная прибыль предприятия.

Задачи, решаемые при помощи графика квадратичной функции ***(параболы):***

- мальчик, камешки, колодец;
- выручка предприятия при наибольшей цене;
- мяч, подброшенный вверх;
- скорость вращения ведёрка;
- частичное вытекание воды из бака;
- полное вытекание воды из бака;

Задачи, решаемые при помощи графика квадратичной функции ***(параболы):***

- камнеметательная машина;
- нагревание прибора;
- время проверки работы лебёдки;
- мотоциклист в зоне сотовой связи;
- торможение автомобиля;
- момент инерции вращающейся катушки.

Задание В11

Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трёх однородных соосных цилиндров: центрального массой $m = 8$ *кг* и радиуса $R = 5$ *см*, и двух боковых с массами $M = 2$ *кг* и с радиусами $R + h$. При этом момент инерции катушки относительно оси вращения, выражаемый в $кг \cdot см^2$, даётся формулой

$$I = \frac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2).$$

При каком максимальном значении h момент инерции катушки не превышает предельного значения $1900\ кг \cdot см^2$? Ответ выразите в сантиметрах.

Задание В11

Решение. Функция: $h_{\max} > 0 \ \ при \ \ I \le 1900.$

Данные:

$$I = \frac{(m+2M)R^2}{2} + M(2Rh + h^2).$$

$m = 8,$

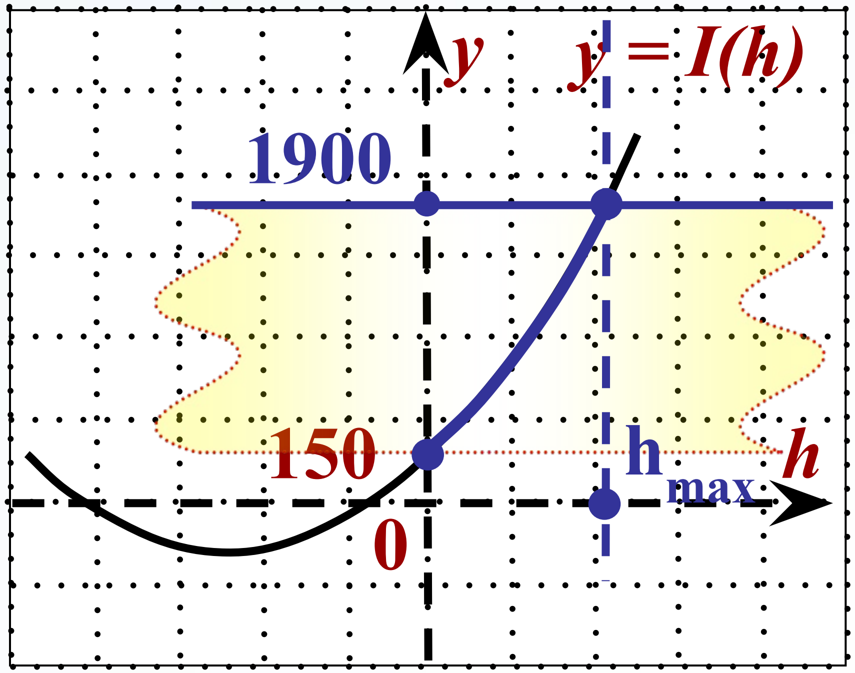
$M = 2,$

$R = 5.$

$$I = 2h^2 + 20h + 150, h > 0.$$

Найти: $h_{\max}$

Схематичный график:



Задание B11

Решение.

Решаем уравнение:

$$2h^2+20h+150\le 1900$$

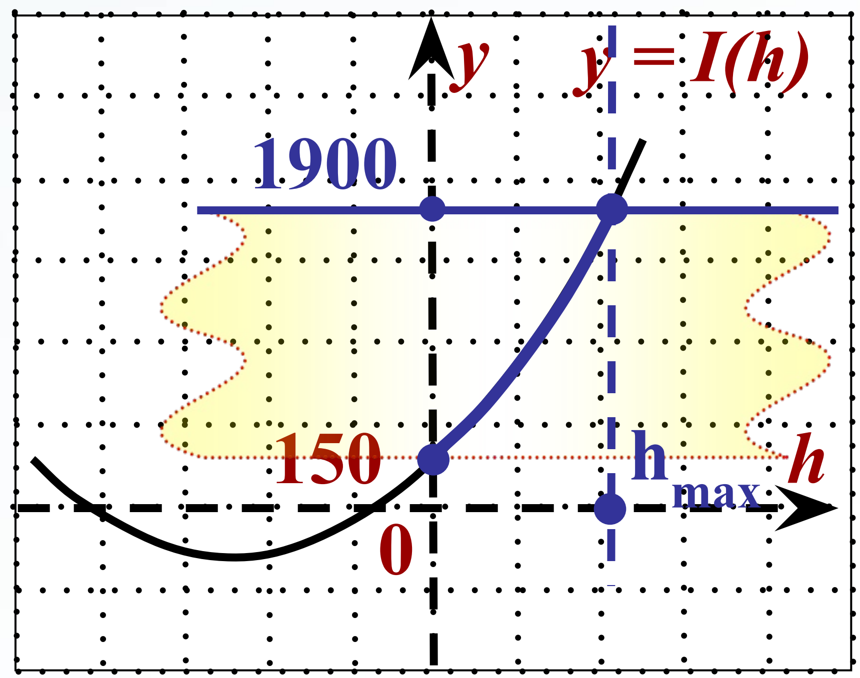
$$2h^2+20h-1750=0,|:2$$

$$h^2+10h-875=0.$$

$$D=10^2+4\cdot 875=60^2.$$

$$h_1=-35, h_2=25-h_{max.}$$

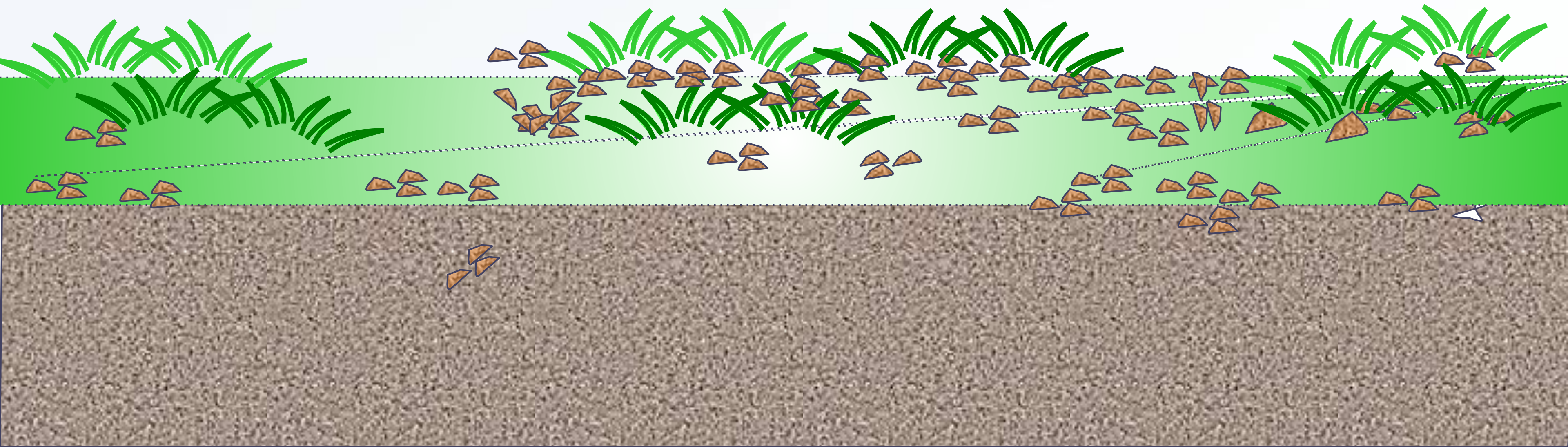
(*большший корень*)



Ответ: 25.

Задание В11

Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 24$ *м/с*, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ *м/с*^{2}. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ *(м)*. Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал ***90 метров***. Ответ выразите в секундах.



Задание B11

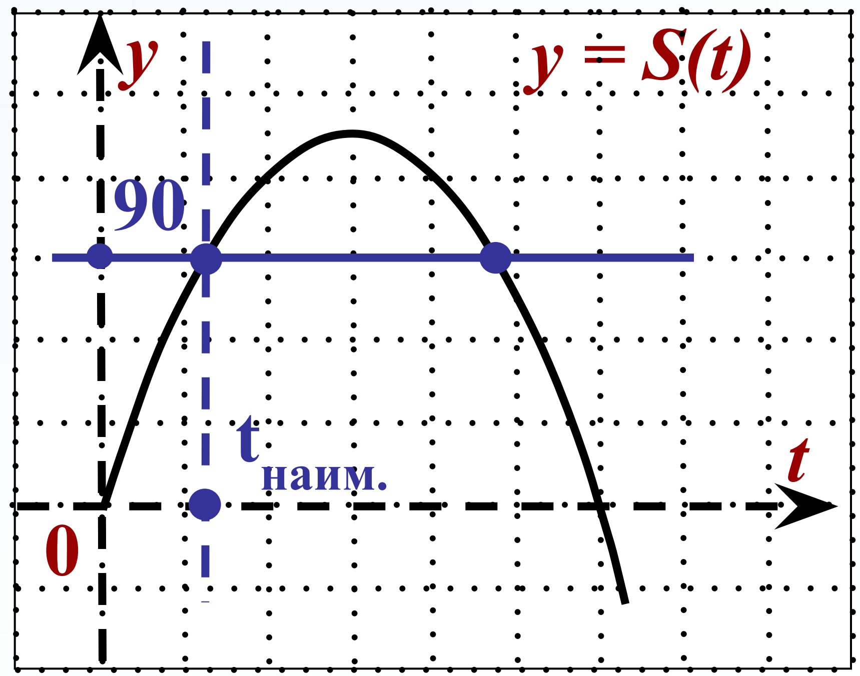
Данные:

$v_0 = 24,$
$a = 3.$

Функция: $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$

Найти: $t > 0 \ \text{при} \ S = 90.$

Схематичный график:



Задание B11

Решение. Функция: $S = 24t - \dfrac{3t^2}{2}.$

Решаем уравнение:

$$90 = 24t - \frac{3t^2}{2}.$$

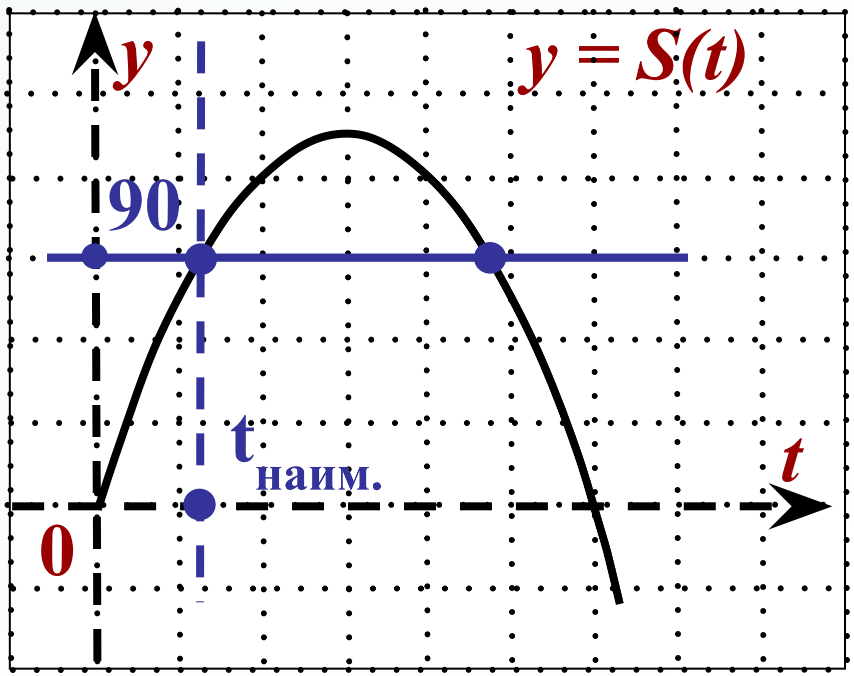
$$\frac{3}{2}t^2 - 24t + 90 = 0, | : \frac{3}{2}$$

$$t^2 - 16t + 60 = 0.$$

$$t_1 = 10, t_2 = 6 - t_{наим}.$$

(меньший корень)

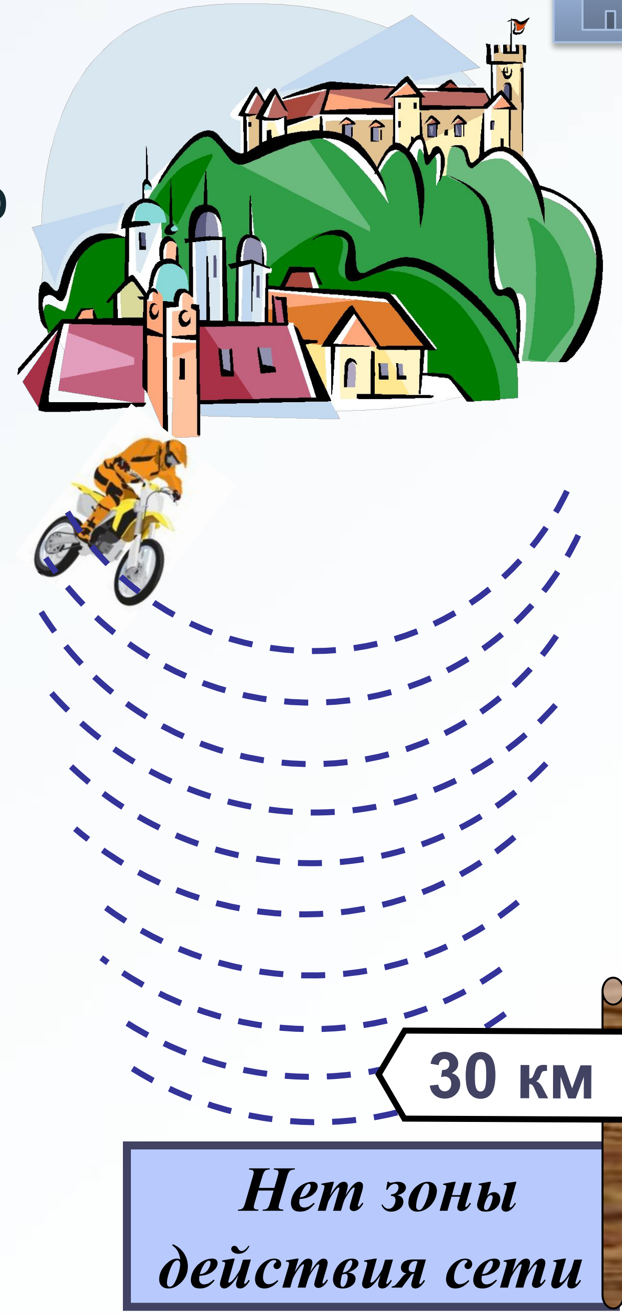
Схематичный график:



Ответ: 6.

Задание В11

Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 57$ *км/ч*, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 12$ *км/ч*^{2}. Расстояние от мотоциклиста до города, измеряемое в километрах, определяется выражением $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем в *30 км* от города. Ответ выразите в минутах.



Задание В11

Данные:

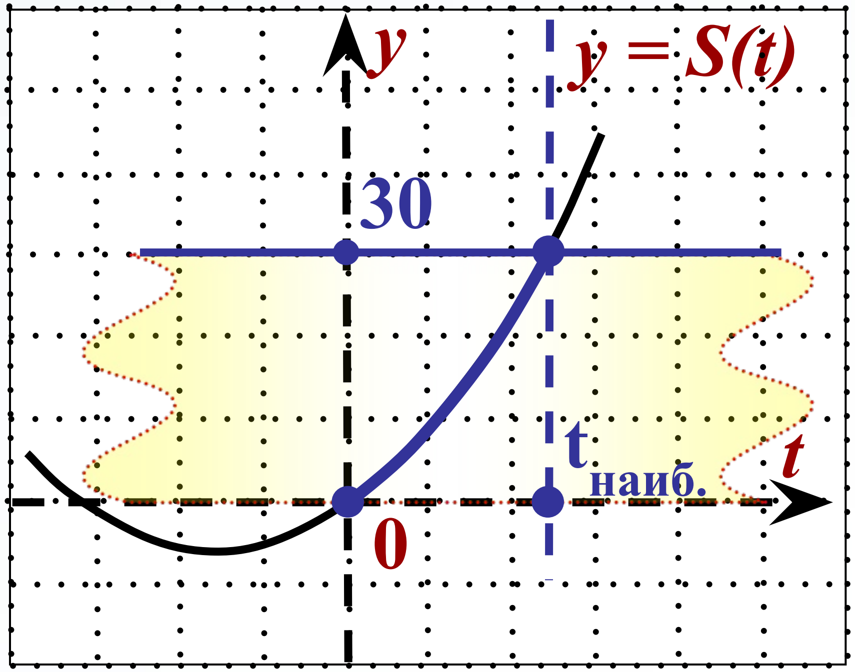
$v_0 = 57,$
$a = 12.$

Функция: $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$

Найти: $t_{наиб.} > 0 \ при \ S \leq 30.$

$$57t + 6t^2 \leq 30$$

Схематичный график:



$$6t^2 + 57t - 30 = 0, |:3$$
$$2t^2 + 19t - 10 = 0.$$

$t_1 = -10, t_2 = 0{,}5(ч) - t_{наиб.}$
$(больший \ корень)$

$t_{наиб.} = 30(мин.)$

Ответ: 30

Задание B11

Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур определяется выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время в минутах, $T_0 = 1450$ *К*, $a = -12{,}5$ *К/мин*^{2} , $b = 175$ *К/мин*. Известно, что при температуре нагревателя свыше *1750 К* прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор. Ответ выразите в минутах.

Пирометр — прибор для бесконтактного измерения температуры тел.

Задание B11

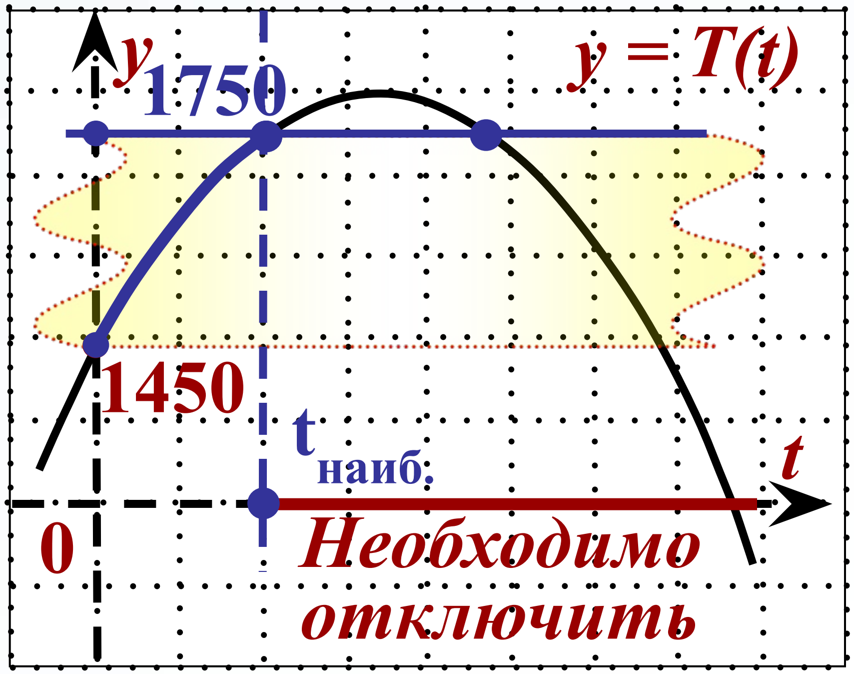
Данные:

$T_0 = 1450,$
$a = -12{,}5,$
$b = 175.$

Функция: $T(t) = T_0 + bt + at^2$

Найти: $t_{наиб.} > 0 \;\; при \;\; T(t) \le 1750.$

Схематичный график:



Задание B11

Решение. Функция: $T(t) = 1450 + 175t - 12{,}5t^2$

Решаем уравнение:

Найти: $t_{наиб.} > 0 \;\; при \;\; T(t) \le 1750.$

$$1750 = 1450 + 175t - 12{,}5t^2$$

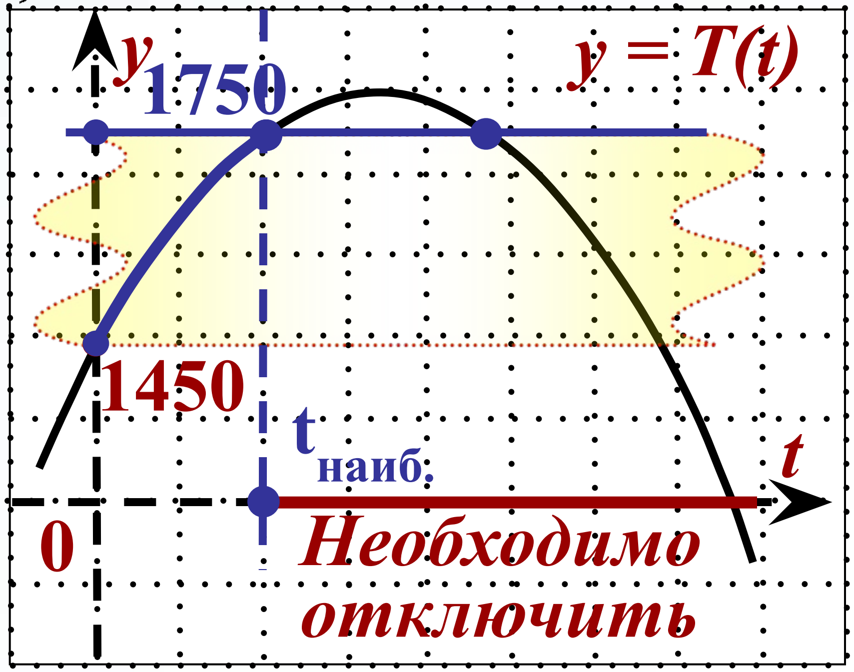
$$12{,}5t^2 - 175t + 300 = 0, \;\; |:12{,}5$$

$$t^2 - 14t + 24 = 0,$$

$$t_1 = 12, t_2 = 2 - t_{наиб.}$$

$$(меньший \;\; корень)$$

Схематичный график:



Ответ: 2.

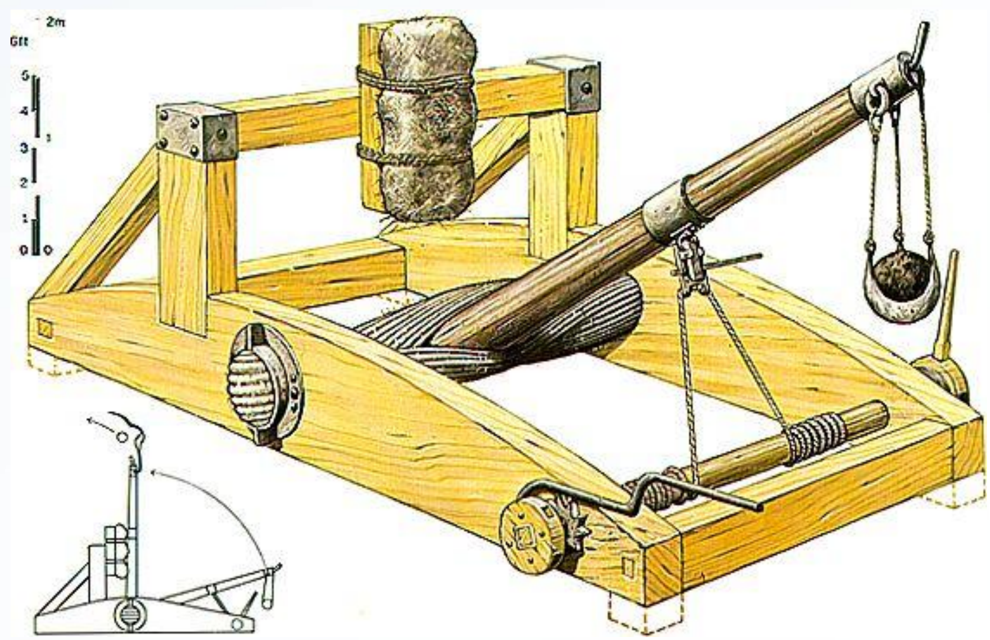
Задание B11

Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту. Траектория полёта камня описывается формулой $y = ax^2 + bx$,

где $a = \frac{-1}{60}$ $м^{-1}$, $b = \frac{7}{6}$ — постоянные параметры,

x *(м)* — смещение камня по горизонтали, y *(м)* — высота камня над землёй.

На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой *9 м* нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее *1* метра?



Задание B11

Данные:

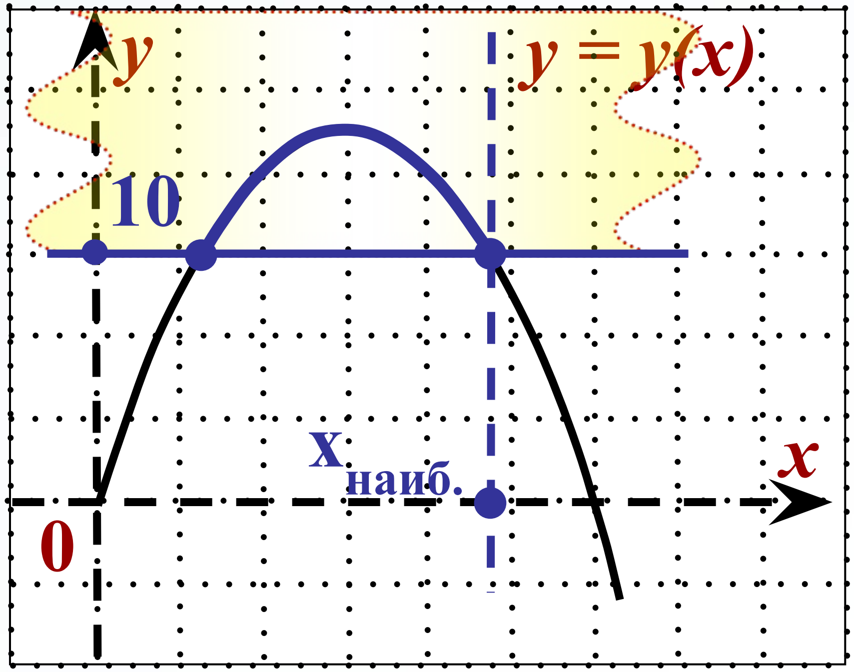
$$a = -\frac{1}{60},$$

$$b = \frac{7}{6}.$$

Функция: $y(x) = ax^2 + bx.$

Найти: $x \text{ при } y(x) \geq 10.$

Схематичный график:



Задание В11

Решение. Функция: $y(x) = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{7}{6}x.$

Найти: $x \ при \ y(x) \geq 10.$

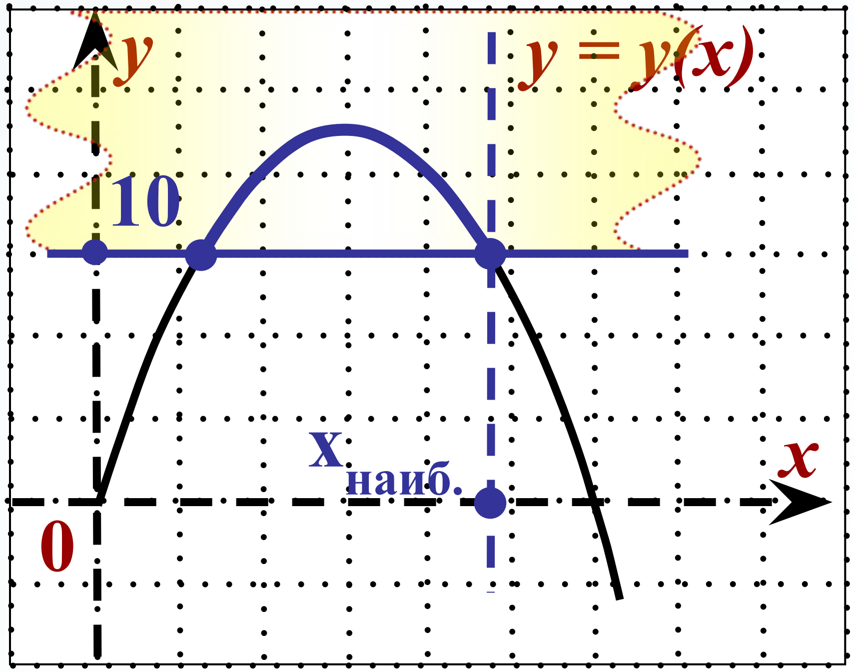
Решаем уравнение:

$$-\frac{1}{60}x^2 + \frac{7}{6}x = 10.$$

$$x^2 - 70x + 600 = 0,$$

$$x_1 = 10, \ x_2 = 60 = x_{наиб.}$$

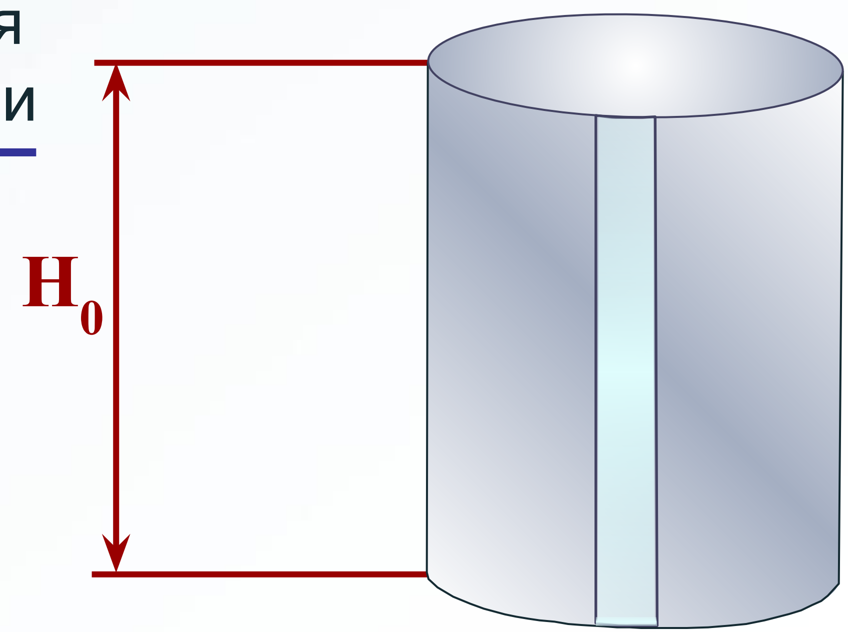
Схематичный график:



Ответ: 60.

Задание B11

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = H_0 + bt + at^2$, где $H_0 = 2$ *м* — начальный уровень воды, $a = \dfrac{1}{50}$ *м/мин*^{2}, $b = \dfrac{-2}{5}$ *м/мин*, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.



Задание B11

Данные:

$H_0 = 2\ м,$

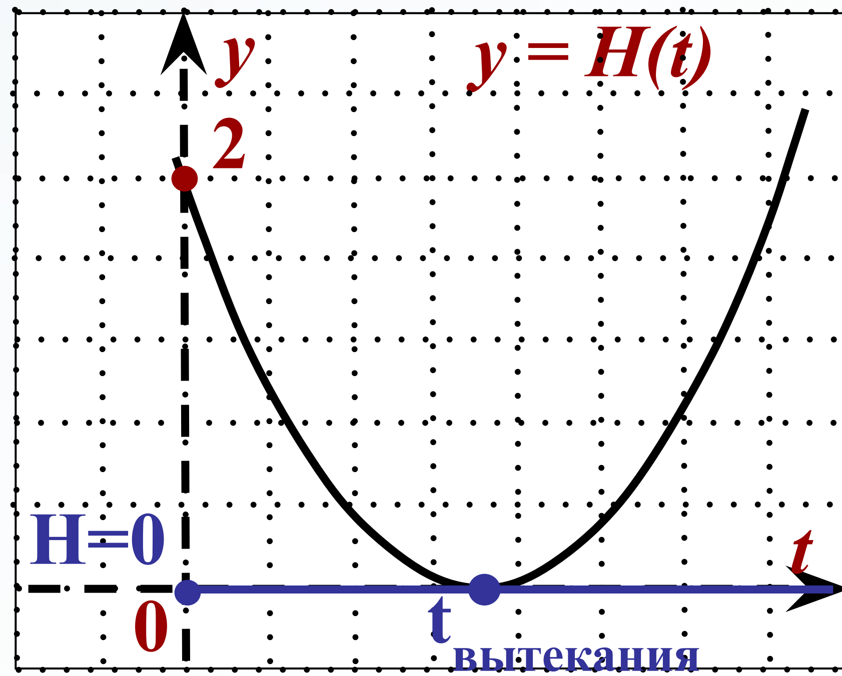
$a = \dfrac{1}{50},$

$b = -\dfrac{2}{5}.$

Функция: $H(t) = H_0 + bt + at^2$

Найти: $t\ при\ H(t) = 0.$

Схематичный график:



Задание В11

Решение. Функция: $H(t)=2-\frac{2}{5}t+\frac{1}{50}t^2$

Найти: $t\ \text{при}\ H(t)=0.$

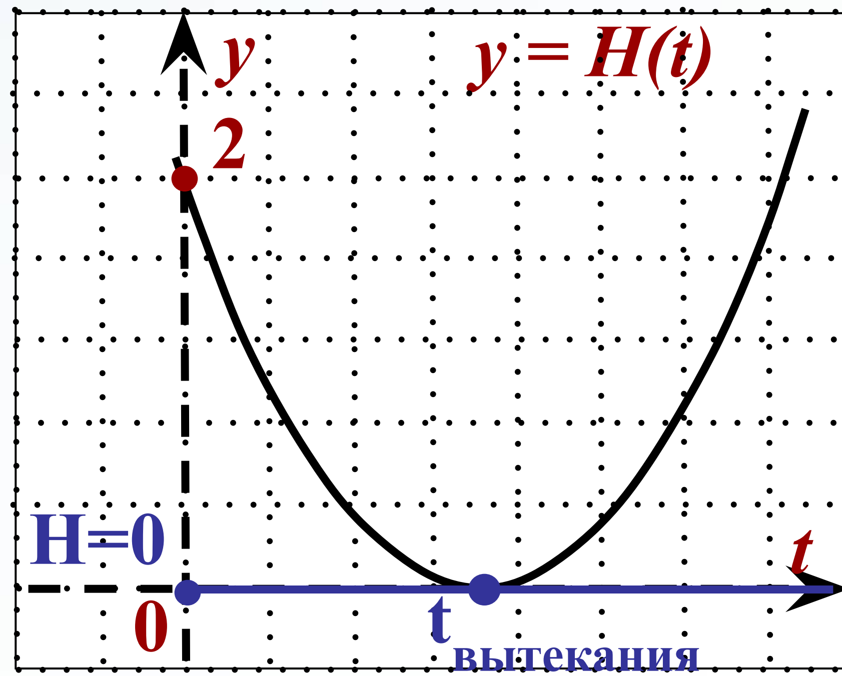
Решаем уравнение:

$$2-\frac{2}{5}t+\frac{1}{50}t^2=0,$$

$$100-20t+t^2=0,$$

$$(t-10)^2=0\Rightarrow t=10.$$

Схематичный график:



Ответ: 10.

Задание B11

В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0}kt + \frac{g}{2}k^2t^2$, где t — время в секундах, прошедшее с момента открытия крана, $k = \frac{1}{200}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, $H_0 = 5$ *м* — начальная высота столба воды, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ *м/с²*). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды?

Задание B11

Данные: Функция: $H(t)=H_0-\sqrt{2gH_0}kt+\frac{g}{2}k^2t^2$

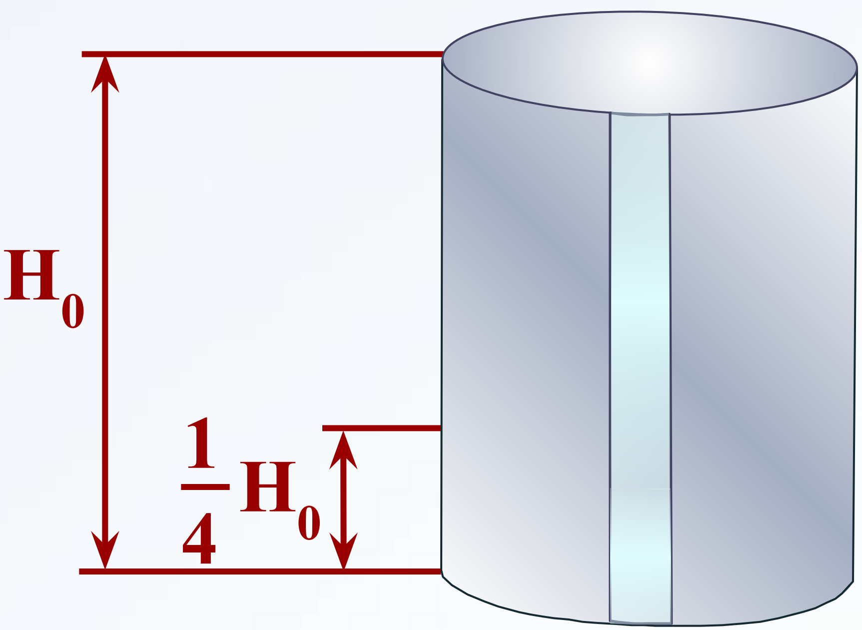
$g=10\ м/с^2$,

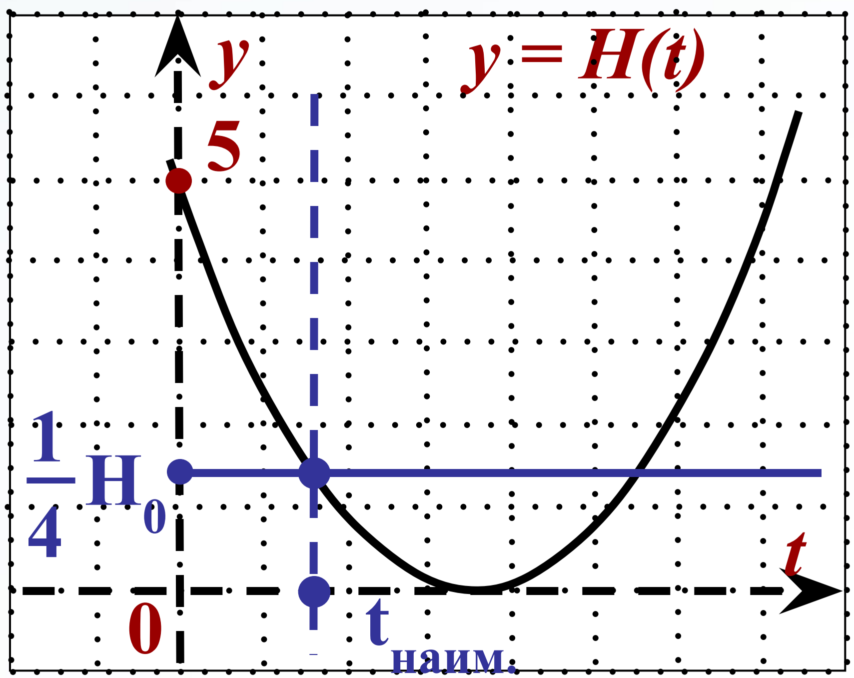
$k=\frac{1}{200}$,

$H_0=5\ м$

Найти: $t\ при\ H(t)=\frac{1}{4}H_0=\frac{5}{4}$.

Схематичный график:





Задание B11

Решение. Функция: $H(t)=5-\frac{1}{20}t+\frac{1}{8000}t^2$

Решаем уравнение:

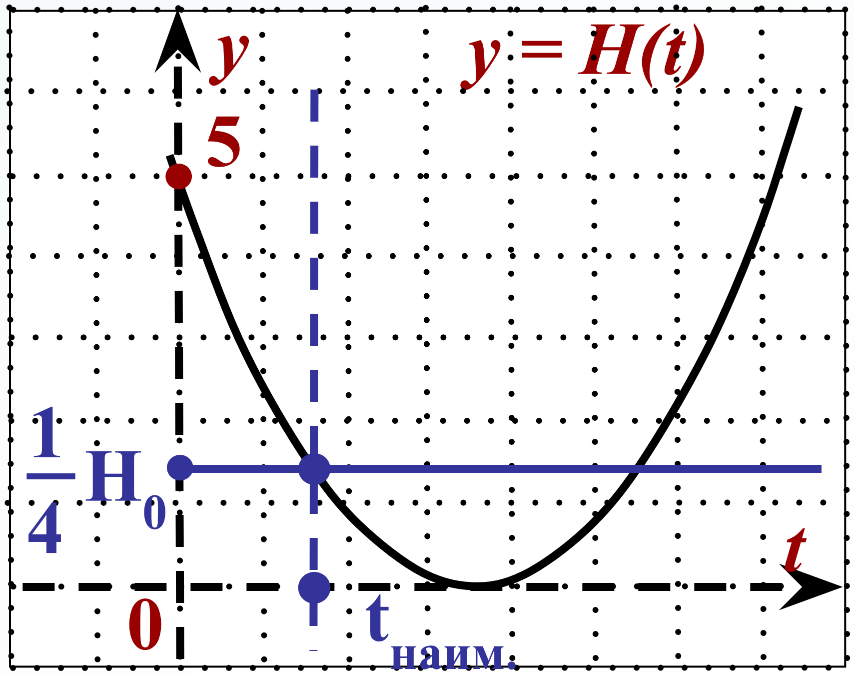
$$5-\frac{1}{20}t+\frac{1}{8000}t^2=\frac{5}{4}.$$

$$40000-400t+t^2=10000.$$

$$t^2-400t+30000=0.$$

$$t_1=300,\ t_2=100=t_{наим.}$$

Схематичный график:



Ответ: 100.

Задание B11

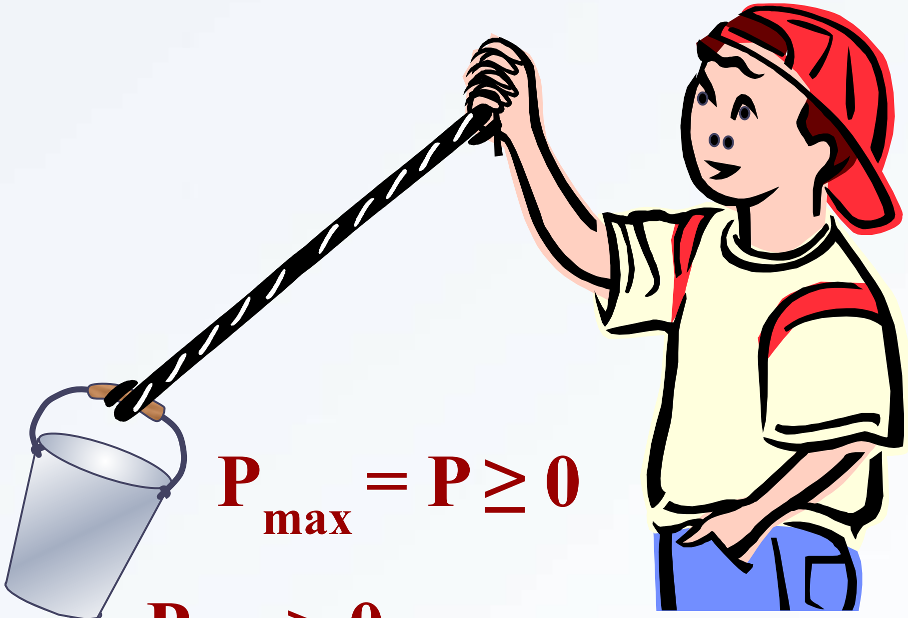
Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, $g = 10$ м/с^2). С какой наименьшей скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна *62,5 см*? Ответ выразите в *м/с*.

Задание B11

Данные: $L = 62{,}5\ см = 0{,}625\ м$

Функция: $P = m \cdot \left(\dfrac{v^2}{L} - g \right)$

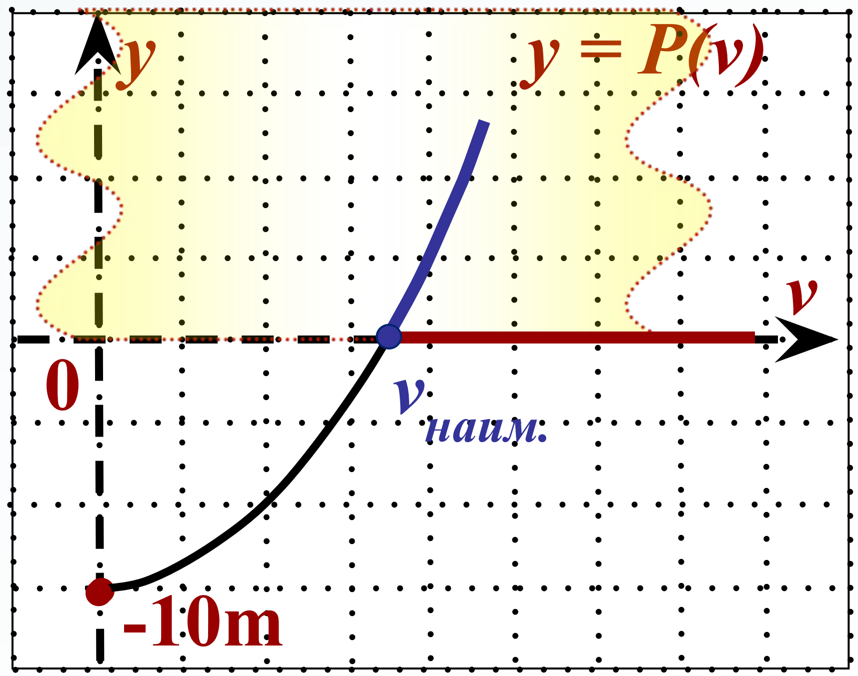
Найти: $v_{наим.} > 0\ при\ P \geq 0.$



$P_{max} = P \geq 0$

$P_{min} > 0$

Схематичный график:



Задание B11

Решение.

Функция: $$P = m\cdot\left(\frac{v^2}{0{,}625}-10\right), m>0, v>0.$$

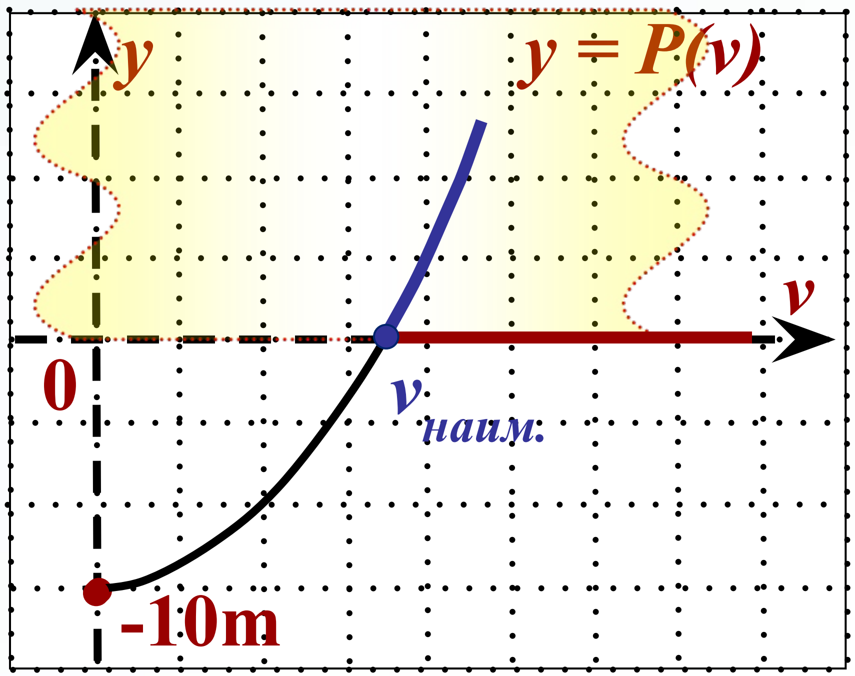
Решаем уравнение:

$$m\cdot\left(\frac{v^2}{0{,}625}-10\right)=0, v>0.$$

$$m\cdot\left(\frac{v^2}{0{,}625}-10\right)\geq 0, v>0,$$

$$Так\ как\ v>0, то\ v=2{,}5.$$

Схематичный график:



Ответ: 2,5.

Задание B11

Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 1,4 + 9t - 5t^2$, где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее ***3 метров***?

Функция: $h(t) = -5t^2 + 9t + 1,4$

Данные: $h(t) \geq 3$

Найти: $\Delta t = t_2 - t_1$

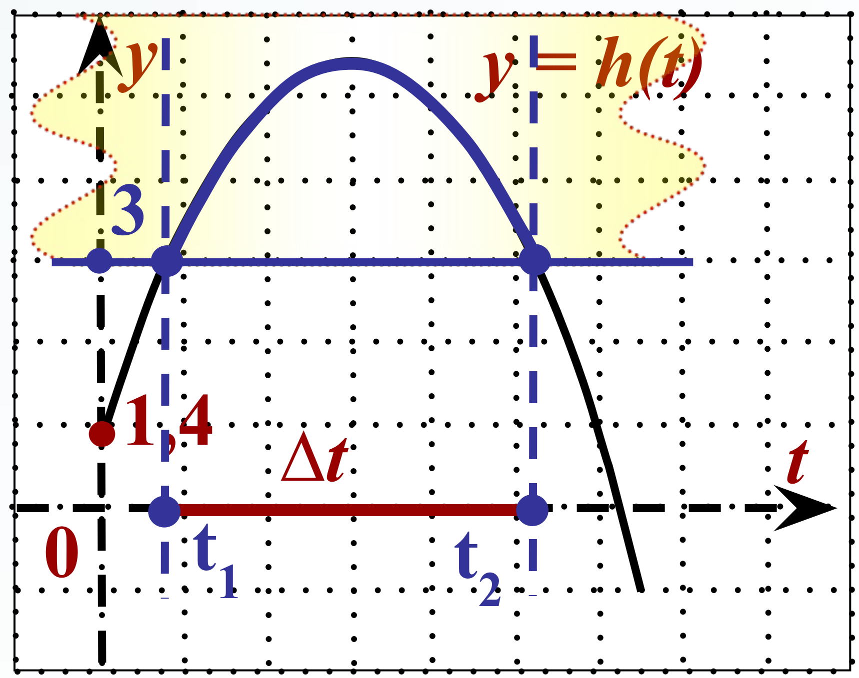
$$-5t^2 + 9t + 1,4 \geq 3$$

$$\Delta t = 1,6 - 0,2 = 1,4$$

$$-5t^2 + 9t + 1,4 = 3.$$

$$5t^2 - 9t + 1,6 = 0,$$

$$t_1 = 0,2, \;\; t_1 = 1,6.$$



Ответ: 1,4.

Задание B11

Зависимость объёма спроса *q* *(тыс. руб.)* на продукцию предприятия-монополиста от цены *p* *(тыс. руб.)* задаётся формулой *q = 130 - 10p*. Выручка предприятия за месяц *r (в тыс. руб.)* вычисляется по формуле *r(p) = q · p*. Определите наибольшую цену *p*, при которой месячная выручка составит не менее *360 тыс. руб*. Ответ приведите в тыс. руб.

Функция:

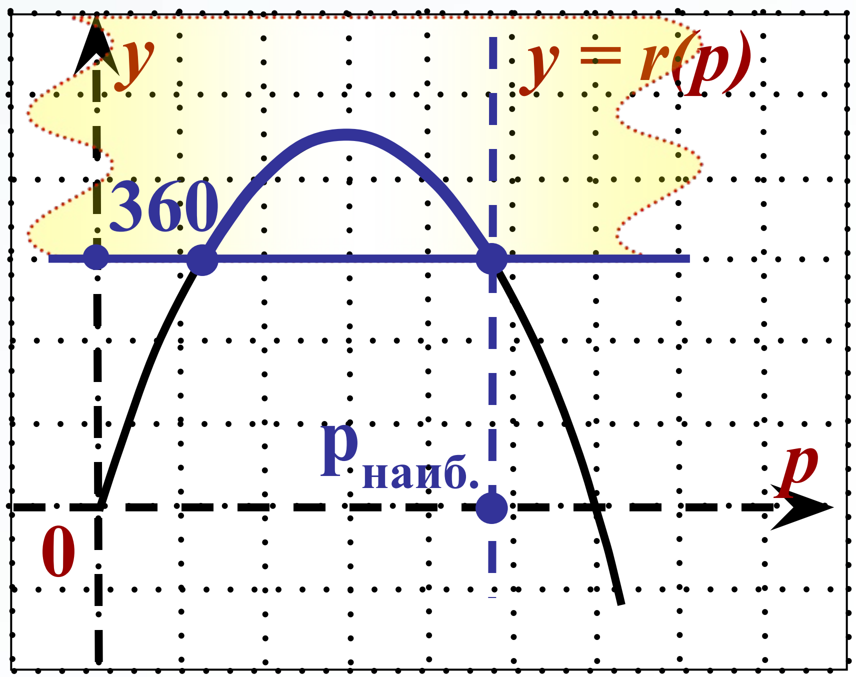
$$q = 130 - 10p,\ \ r(p) = q \cdot p$$

$$r(p) = (130 - 10p) \cdot p$$

Данные: $r(p) \geq 360$

Найти:

$$p_{наиб.}\ \ при\ \ r(p) \geq 360.$$



Задание В11

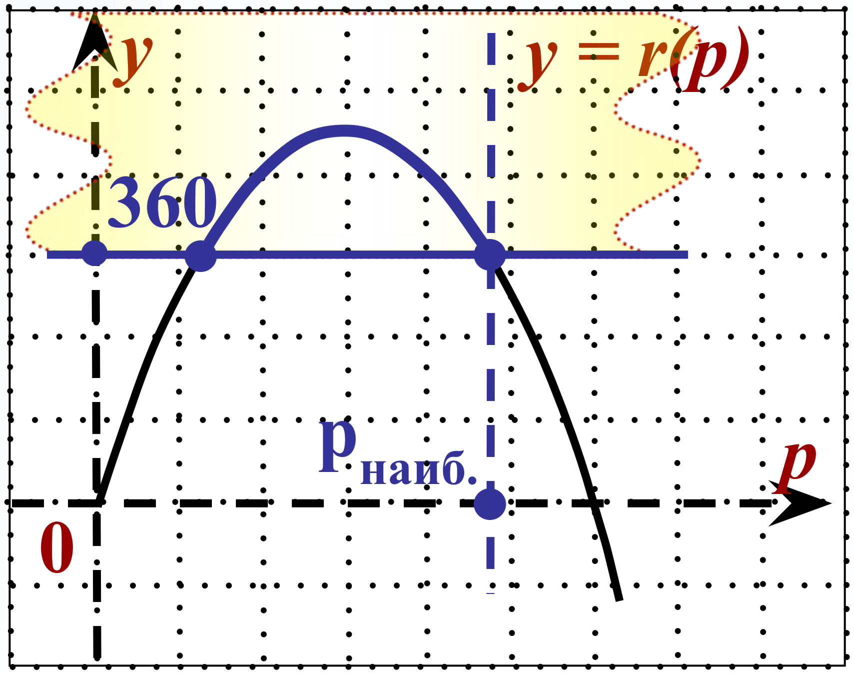
Решение.

$$r(p) = (130 - 10p) \cdot p$$

$$r(p) = -10p^2 + 130p$$

$$-10p^2 + 130p \geq 360$$

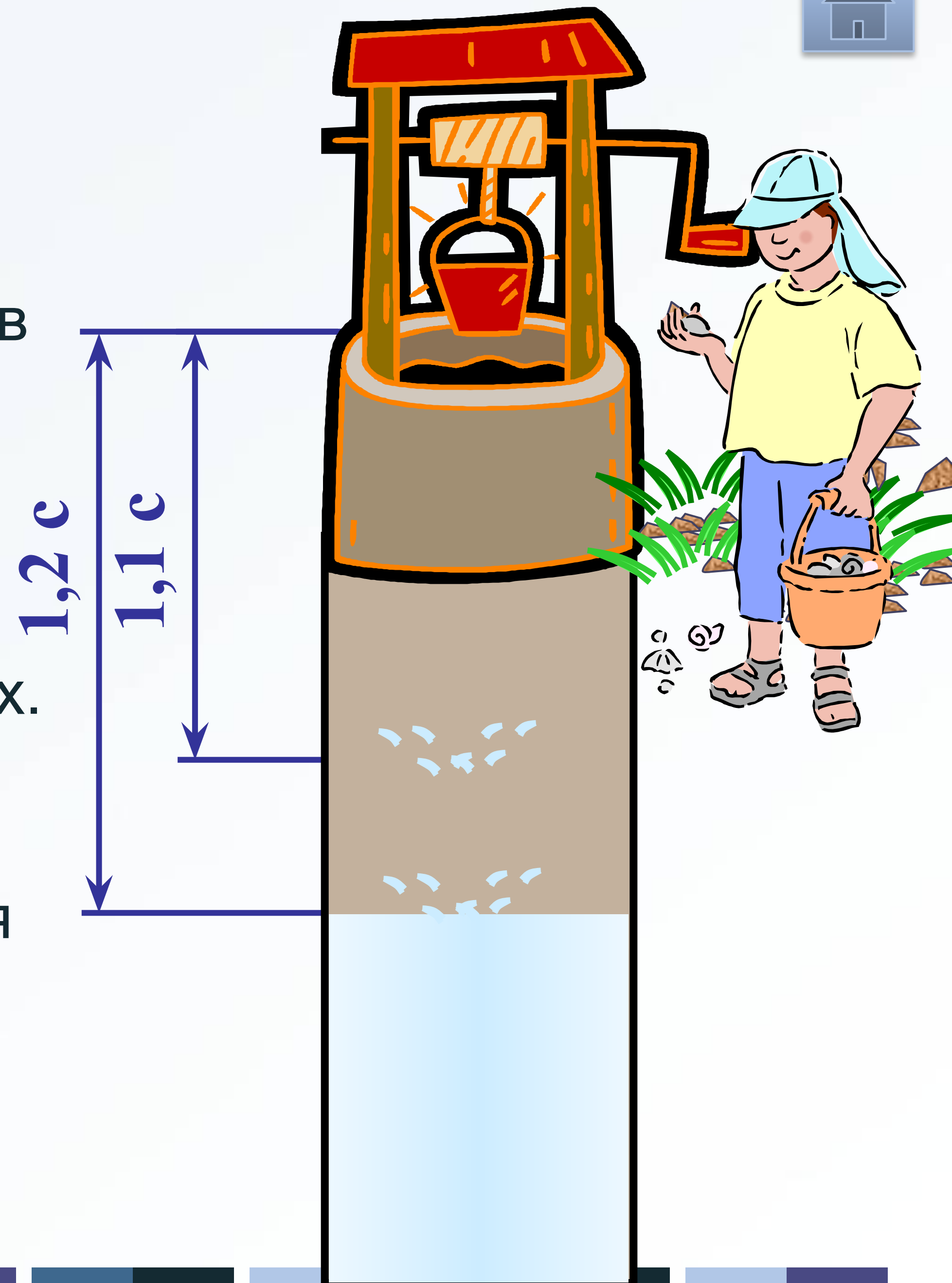
$$-10p^2 + 130p = 360,$$
$$p^2 - 13p + 36 = 0,$$
$$p_1 = 4,\ p_2 = 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p_{наиб.} = 9.$$



Ответ: 9.

Задание B11

После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время t падения небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где
h — расстояние в метрах,
t — время падения в секундах.
До дождя время падения камешков составляло *1,2 с.*
На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на *0,1 с*?



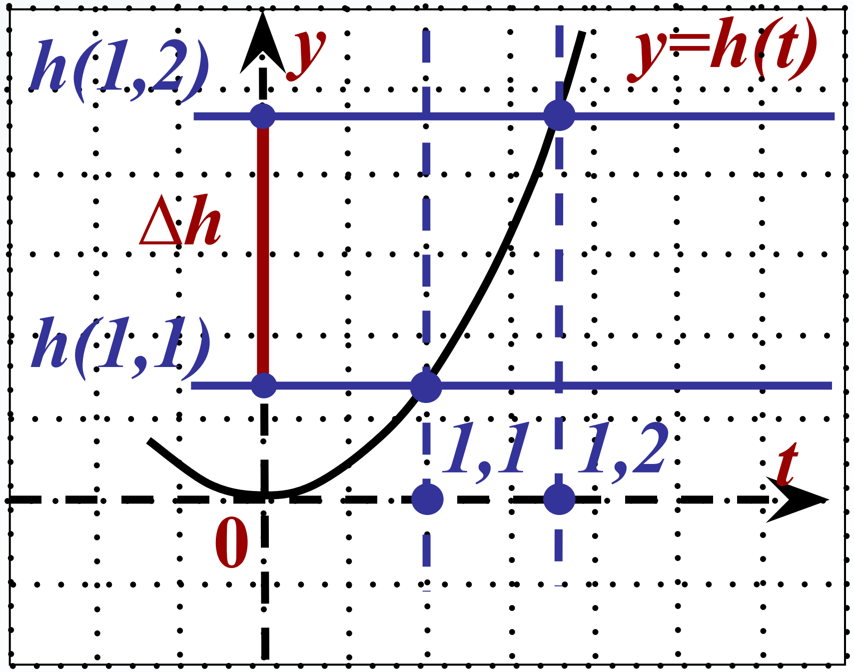
Задание B11

Решение. Функция: $h = 5t^2$

Данные: $t_{до} = 1{,}2\ c,\ t_{изм.} = 1{,}1\ c.$

Найти: $\Delta h = h(1{,}2) - h(1{,}1)$

Схематичный график:



$$\Delta h = 5 \cdot 1{,}2^2 - 5 \cdot 1{,}1^2 =$$
$$= 5 \cdot (1{,}2^2 - 1{,}1^2) =$$
$$= 5 \cdot (1{,}2 - 1{,}1) \cdot (1{,}2 + 1{,}1) =$$
$$= 5 \cdot 0{,}1 \cdot 2{,}3 = 1{,}15(м)$$

Ответ: 1,15.

Задание В11

Некоторая компания продает свою продукцию по цене $p = 600$ *руб.* за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 400$ *руб.*, постоянные расходы предприятия $f = 600000$ *руб.* в месяц. Месячная операционная прибыль (в рублях) вычисляется по формуле $\pi(q) = q(p - v) - f$. Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше **500000 *руб.***

Задание B11

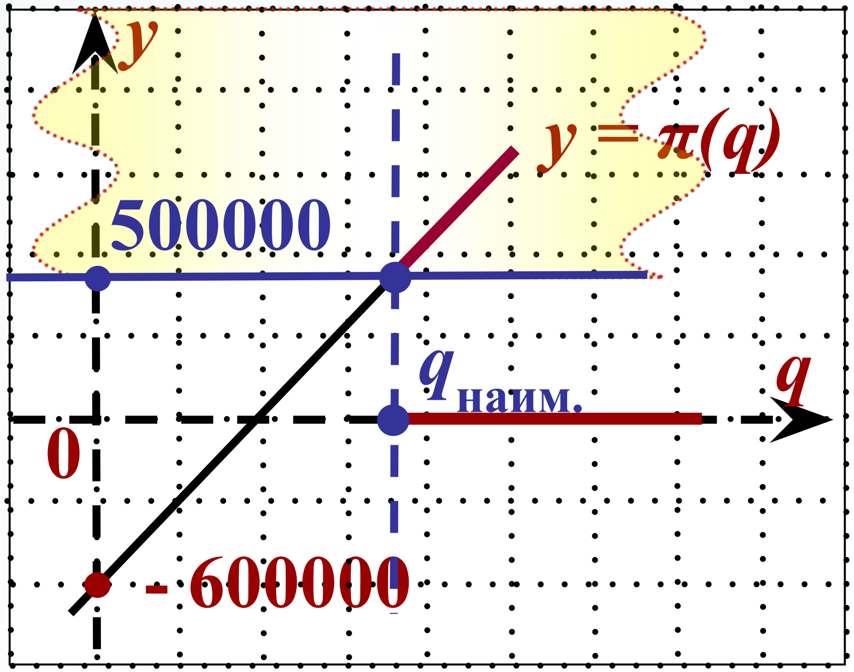
Данные: Функция: $\pi(q) = q(p - v) - f$

$p = 600\, руб.,$ Найти: $q_{наим.}$ $при\ \pi(q) \geq 500000.$

$v = 400\, руб.$

$f = 600000\, руб.$

Схематичный график:



Решение.

$$\pi(q) = 200q - 600000$$

$$200q - 600000 \geq 500000$$

$$200q = 1100000$$

$$q_{наим.} = 5500$$

Ответ: 5500.

Задание В11

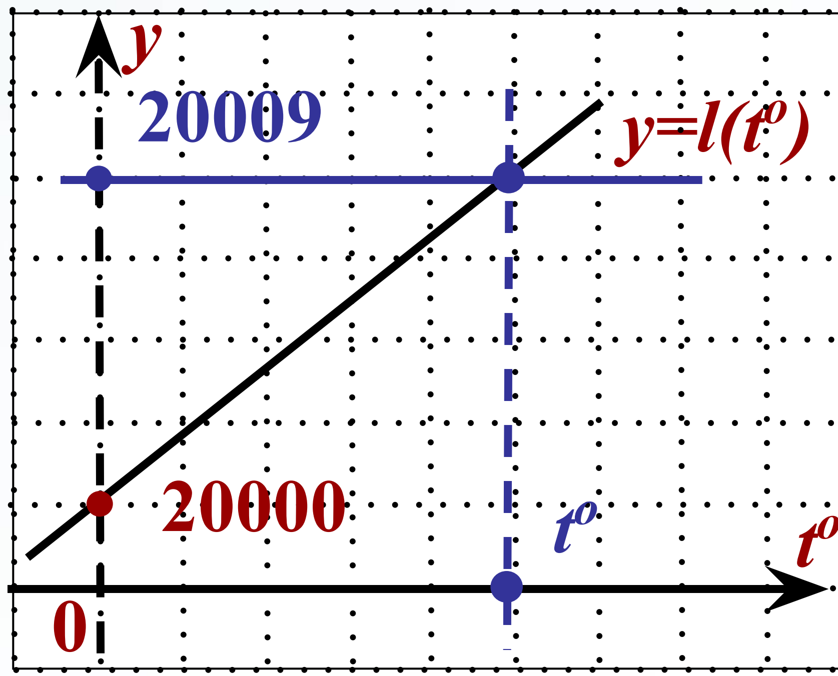
При температуре 0^oC рельс имеет длину $l_o = 20$ *м*. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^o) = l_0(1+\alpha \cdot t^o)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5} ({}^oC)^{-1}$ – коэффициент теплового расширения, t^o - температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на *9 мм*? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Функция:

$$l(t^0) = l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot t^0$$

Найти:

$$t^0 \;\; при \;\; l(t^0) = 20009 мм$$



Задание B11

Решение. $l_0 = 2\cdot 10^4\,мм;\ \alpha = 1{,}2\cdot 10^{-5}\,({}^0C)^{-1}.$

$$l_0 = 20м = 20\cdot 100см = 2000\cdot 10мм =$$
$$= 20000мм = 2\cdot 10^4\,мм$$

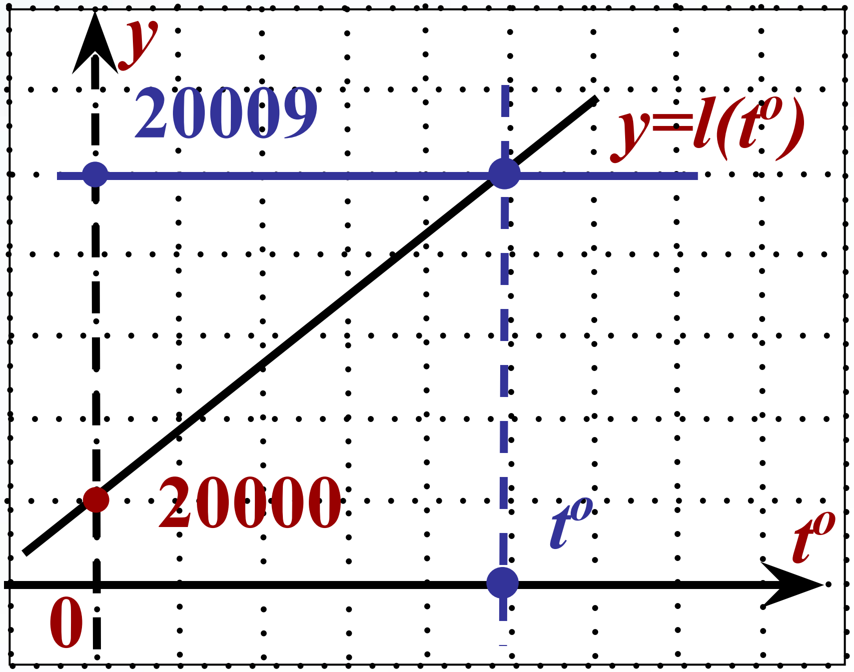
$$l(t^0) = 20000 + 2\cdot 10^4\cdot 1{,}2\cdot 10^{-5}t^0$$

$$l(t^0) = 0{,}24\cdot t^0 + 20000$$

$$20009 = 0{,}24\cdot t^0 + 20000$$

$$9 = 0{,}24\cdot t^0$$

$$t^0 = 37{,}5^0C$$



Ответ: 37,5.

Спасибо за внимание!