

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА



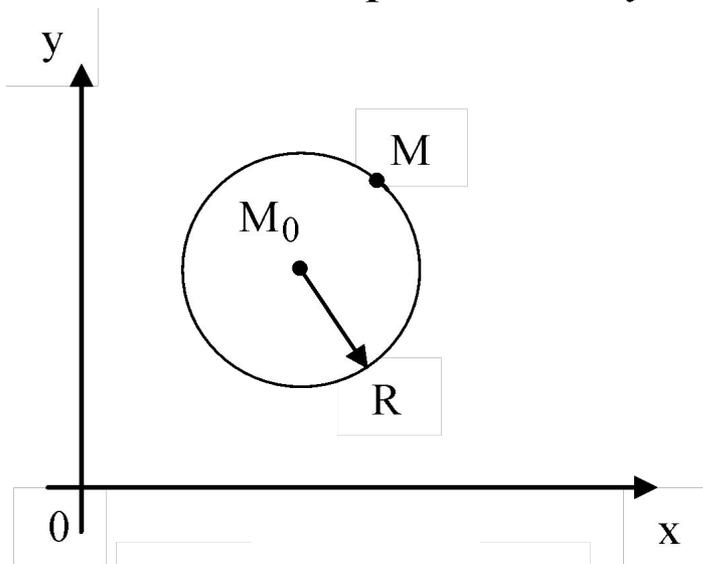
Линия, определяемая уравнением

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + Q = 0,$$

называется **кривой второго порядка**.

Пусть на координатной плоскости XOY дана окружность радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0)$ и требуется определить ее уравнение.

Выберем на этой плоскости произвольную точку $M(x; y)$.



Тогда: 1) если точка M лежит на окружности, то

$$|\overline{M_0M}| = R \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2}$$

2) если точка M не лежит на окружности, то для внутренних точек круга

$|\overline{M_0M}| < R$, а для внешних точек круга $|\overline{M_0M}| > R$. Следовательно, для всех

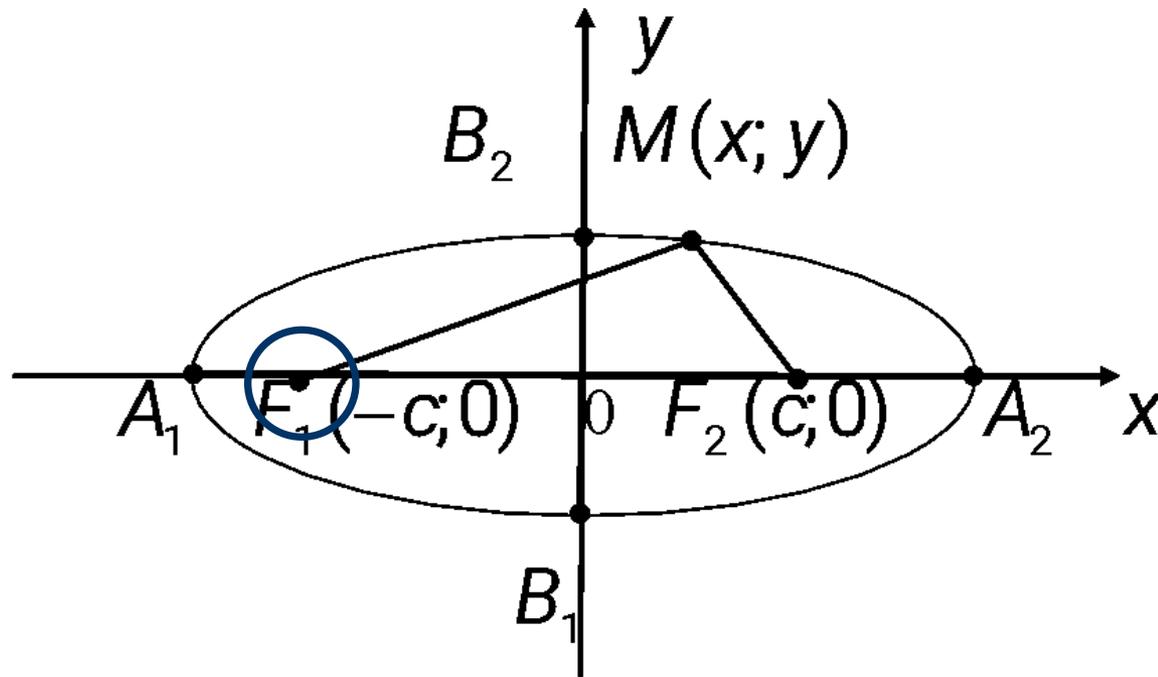
точек, не лежащих на окружности,

$$|\overline{M_0M}| \neq R \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \neq R^2.$$

ЭЛЛИПС

ОПРЕДЕЛЕНИЕ *Эллипсом* называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Выберем на плоскости две произвольные точки F_1 и F_2 и введем систему координат XOY , как это показано на рисунке. Обозначим через $2c$ расстояние между этими точками, тогда выбранные фокусы F_1 и F_2 будут иметь координаты $F_1(-c; 0)$, а $F_2(c; 0)$.



Пусть точка $M(x; y)$ произвольная точка плоскости XOY . Предположим, что точка M принадлежит эллипсу. Тогда, если $2a$, где $2a > 2c$, есть сумма расстояний от точки M до точек F_1 и F_2 , то по определению эллипса

$$|\overline{MF_1}| + |\overline{MF_2}| = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

Избавляясь от иррациональности, уравнение можно привести к виду:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

По условию $2a > 2c > 0$. Тогда $a > c$ и $a^2 > c^2$. Пусть $a^2 - c^2 = b^2$.

Подставляя в предыдущее уравнение получим:

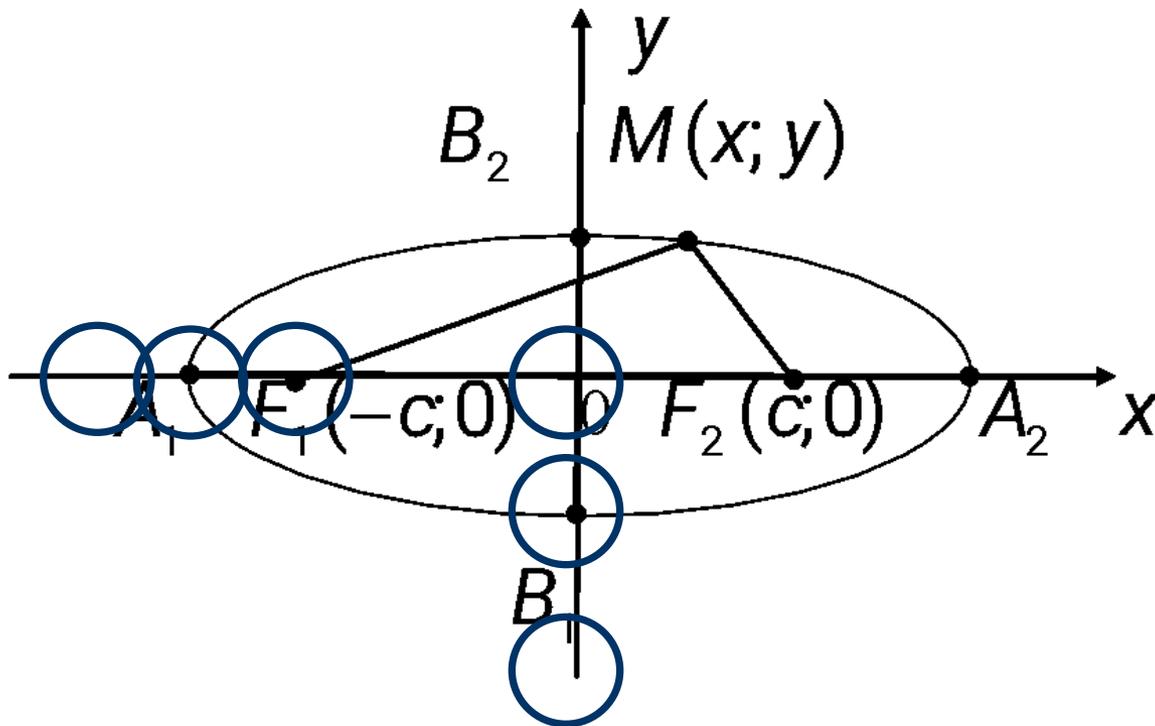
$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$.

Уравнение эллипса называется его каноническим уравнением.

Терминология.

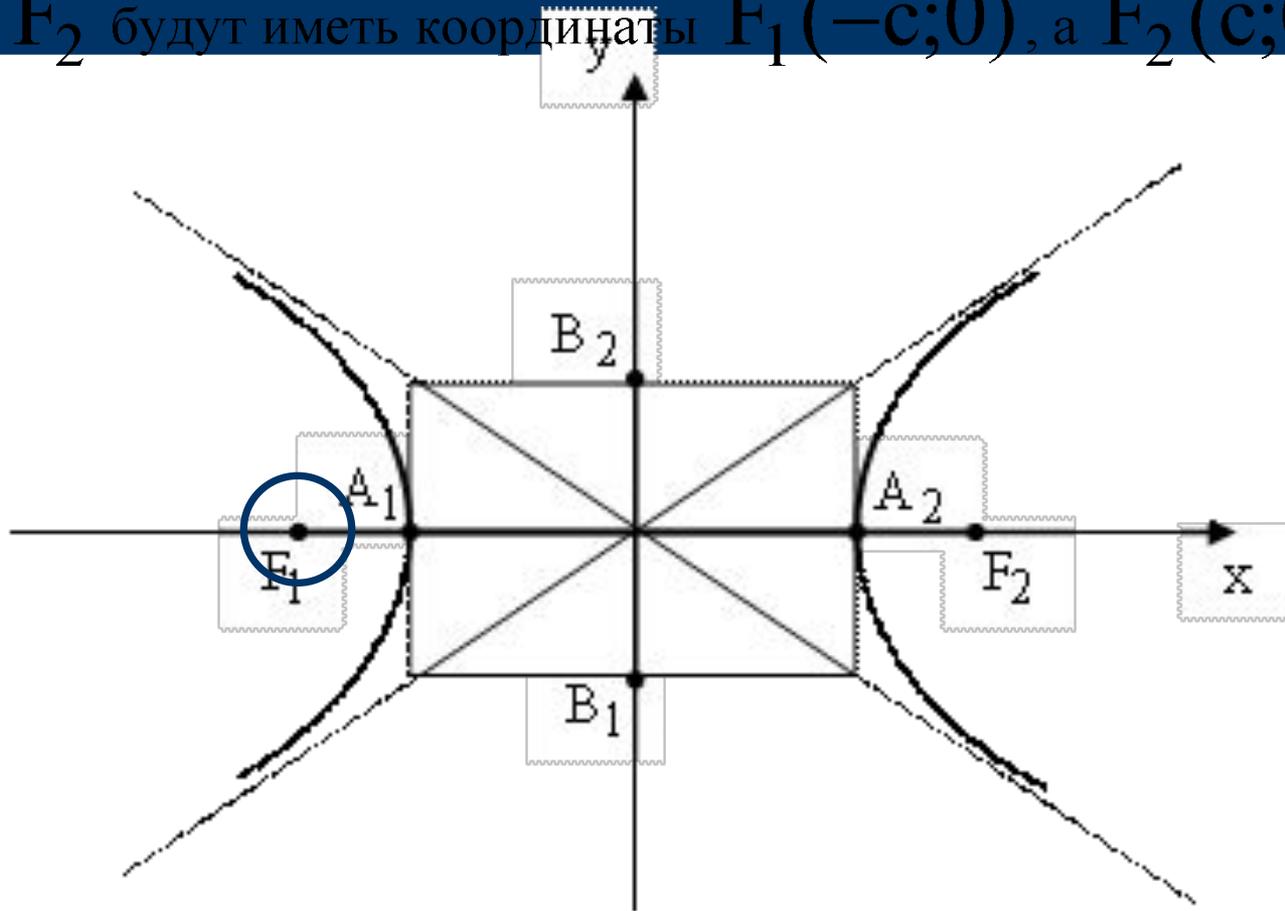
Точки $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$ называются **фокусами эллипса**. Точки $A_1(-a;0)$, $B_1(0;-b)$, $A_2(a;0)$, $B_2(0;b)$ называются **вершинами эллипса**. Точка $O(0;0)$ называется **центром эллипса**. Ось, на которой расположены фокусы эллипса, называется **фокальной осью**. Оси **OX и OY** называются **осями симметрии эллипса**.



ГИПЕРБОЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ *Гиперболой* называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Выберем на плоскости две произвольные точки F_1 и F_2 и введем систему координат XOY , как это показано на рисунке. Обозначим через $2c$ расстояние между этими точками, тогда выбранные фокусы F_1 и F_2 будут иметь координаты $F_1(-c;0)$, а $F_2(c;0)$.



Терминология. Точки $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ называются

фокусами гиперболы Точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$ называются

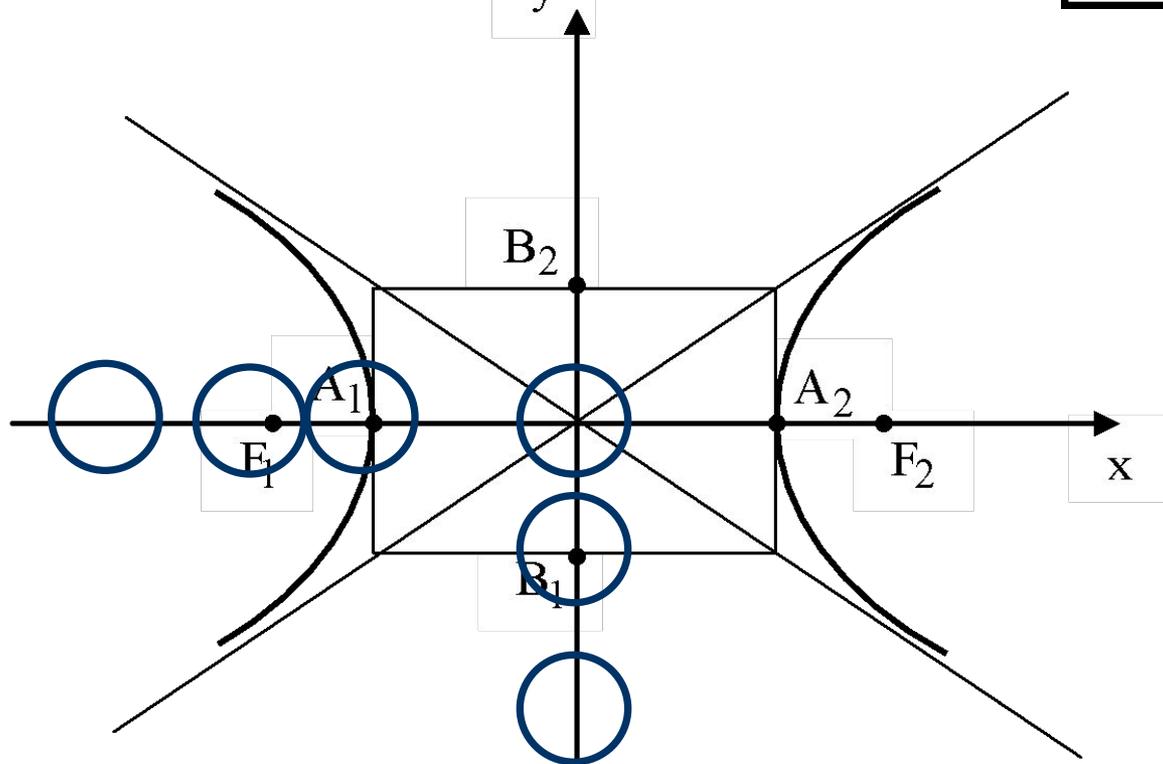
действительными вершинами гиперболы, а точки $B_1(0; -b)$,

$B_2(0; b)$ - мнимыми вершинами. Точка $O(0; 0)$ называется

центром гиперболы. Ось, на которой расположены фокусы, называ-

ется фокальной осью или действительной осью. Ось, на которой

расположены мнимые вершины гиперболы, называется мнимой осью.



Пусть точка $M(x; y)$ произвольная точка плоскости XOY . Предположим, что точка $M(x; y)$ принадлежит гиперболе. Тогда, если $2a$, где $2a < 2c$, есть абсолютная величина разности расстояний от точки M до точек F_1 и F_2 , то по определению гиперболы

$$|\overline{MF_1}| - |\overline{MF_2}| = \pm 2a \Leftrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Избавляясь от иррациональности, уравнение можно привести к виду

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

По условию $2a < 2c$. Тогда $c > a$ и $c^2 > a^2$. Обозначим через b^2 разность $c^2 - a^2$. Подставляя это число в уравнение, получим

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{где } b^2 = c^2 - a^2.$$

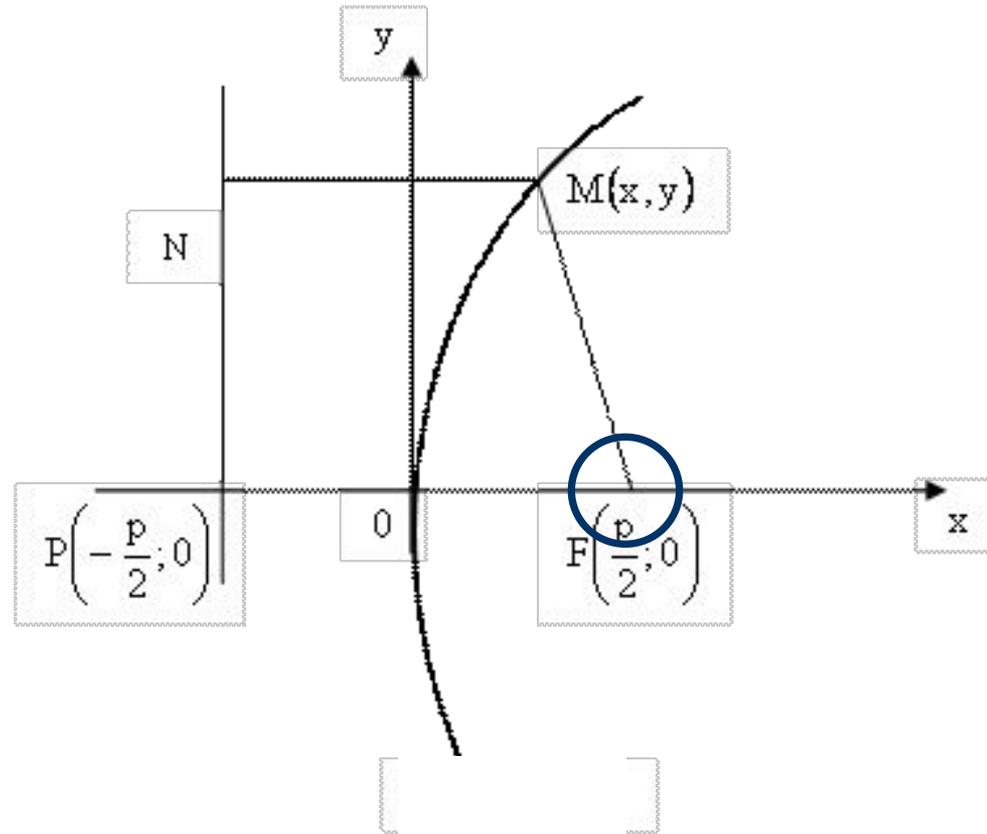
Получили уравнение искомой гиперболы.

Оно называется каноническим уравнением гиперболы.

ПАРАБОЛА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

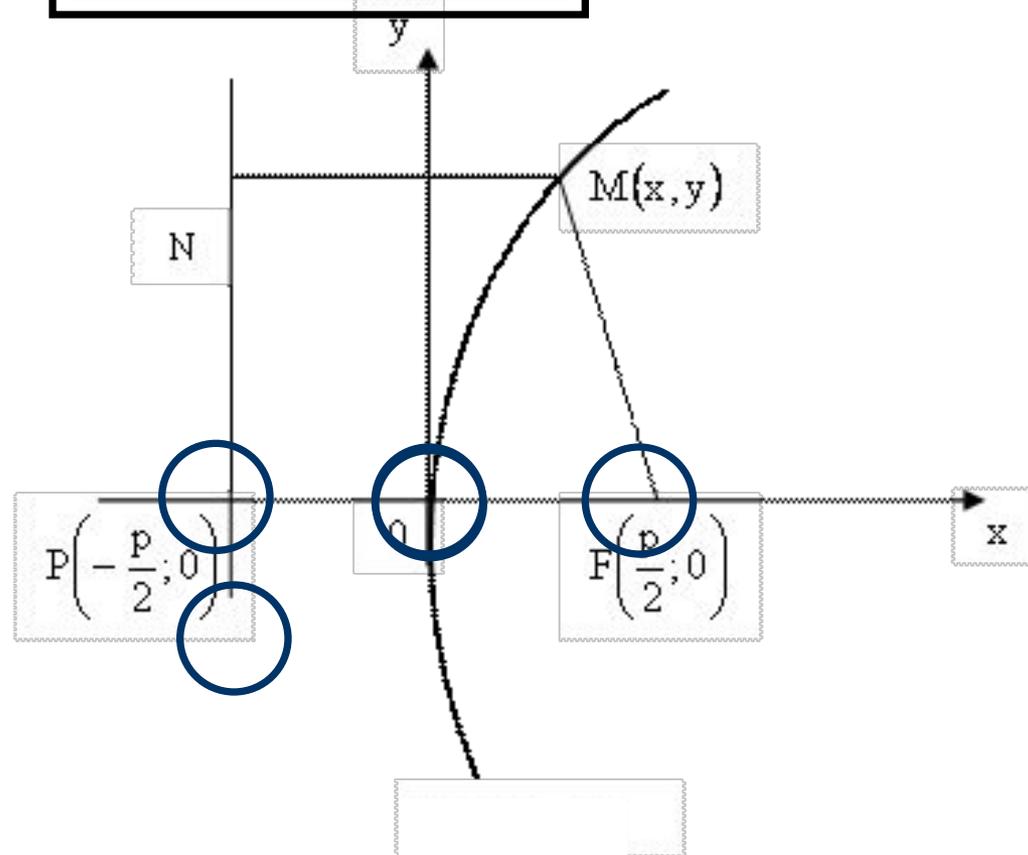
Выберем на плоскости произвольную точку F и произвольную прямую (NP) , не проходящую через эту точку. Назовем точку F фокусом, а прямую (NP) директрисой. Обозначим расстояние от точки F до прямой (NP) через p и построим систему координат XOY так, как это изображено на рисунке.



Терминология, Точка $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ называется **фокусом параболы**. Точка $O(0;0)$

называется **вершиной параболы**. Прямая $x = -\frac{p}{2}$ называется **директрисой**. Ось, на

которой расположен фокус, называется **фокальной осью**. Расстояние p от фокуса до директрисы называется **параметром параболы**.



Пусть точка $M(x; y)$ произвольная точка плоскости XOY . Предположим, что точка M лежит на параболе. Тогда, по определению этой кривой

$|MF| = |MN|$, где $(MN) \perp (NP)$. Точка N по построению имеет координаты

$N\left(-\frac{p}{2}; y\right)$. Следовательно, равенство $|MF| = |MN|$ запишется в виде

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} \Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Освобождаясь от иррациональности, получим

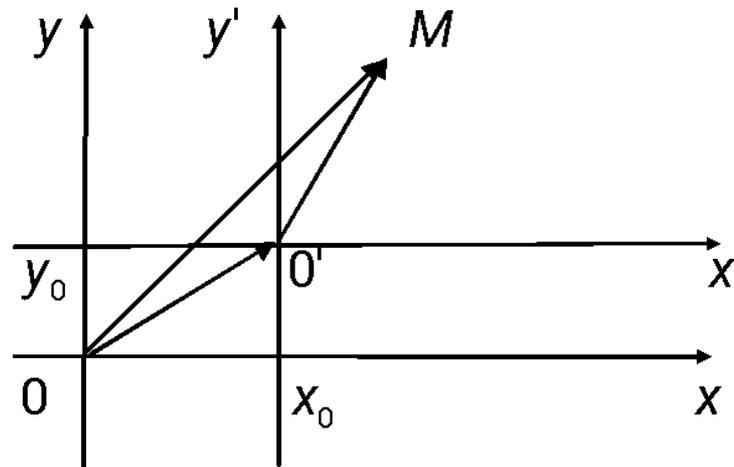
$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2px.$$

Пусть точка M не лежит на параболе. Тогда $|MF| \neq |MN|$. Следовательно, и $y^2 \neq 2px$.

Итак, согласно определения уравнения плоской кривой, полученное уравнение является уравнением искомой параболы. Оно называется каноническим уравнением параболы, а число $p > 0$ называется ее параметром.

УРАВНЕНИЯ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОСЯМИ СИММЕТРИИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ОСЯМ КООРДИНАТ

Рассмотрим предварительно одну из частных задач преобразования системы координат. Пусть на плоскости введены две прямоугольные декартовы системы координат XOY и $X'O'Y'$ с центрами в точках O и O' и соответственно параллельными осями координат



Пусть точка O' в системе XOY имеет координаты $(x_0; y_0)$. Выберем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через $(x; y)$ и $(x'; y')$ в соответствующих системах XOY и $X'O'Y'$. Поставим задачу установления формул связи между координатами точки M в старой (XOY) и новой ($X'O'Y'$) системах координат. Очевидно, что в системе XOY вектор $\overline{OO'} = \{x_0; y_0\}$, вектор $\overline{OM} = \{x; y\}$. В системе $X'O'Y'$ вектор $\overline{O'M} = \{x'; y'\}$.

Согласно правилу сложения векторов

$$\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y'. \end{cases}$$

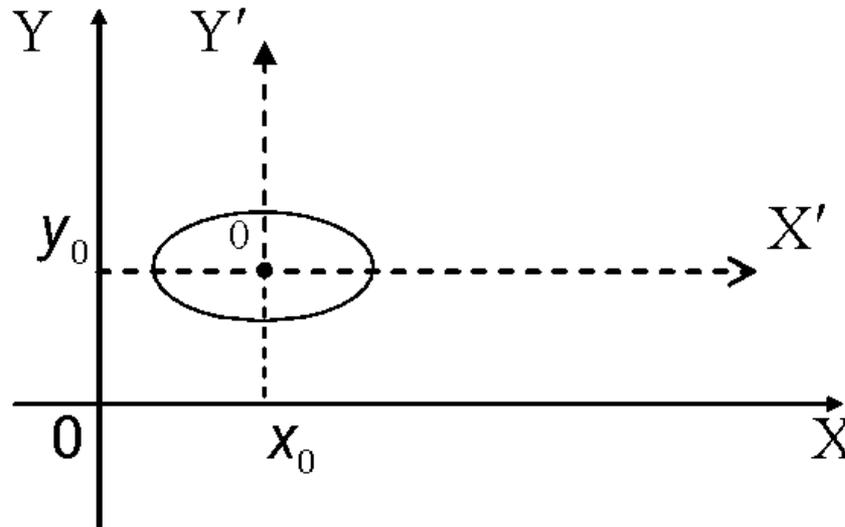
Формулы, связывающие между собой старые и новые координаты точки плоскости, называются формулами параллельного переноса системы координат. Пусть теперь на плоскости XOY задан эллипс с полуосями a и b , центр которого находится в точке $O'(x_0; y_0)$, а оси симметрии параллельны осям координат OX и OY . Требуется найти уравнение эллипса. Введем новую систему координат $X'O'Y'$ с помощью параллельного переноса системы XOY , расположив ее начало координат в центре эллипса. Тогда в новой системе $X'O'Y'$ каноническое уравнение эллипса запишется в виде

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Тогда $x' = x - x_0, y' = y - y_0$.

Тогда в заданной системе координат XOY , уравнение эллипса примет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$



Полученное уравнение является уравнением эллипса с полуосями a и b , центром в точке $O'(x_0; y_0)$ и осями симметрии, параллельными координатным осям.

Решая аналогичным образом задачу относительно уравнения гиперболы, с центром в точке $O'(x_0; y_0)$, с осями симметрии параллельными осям координат, с действительной полуосью равной a , мнимой равной b , получим уравнение

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Аналогично найдем, что уравнение параболы, ось симметрии которой параллельна оси абсцисс, вершина которой находится в точке $O'(x_0; y_0)$, а ее параметр равен p , имеет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

Если же ось параболы параллельна оси ординат, то

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0).$$