АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

- ПЛОСКАЯ ЛИНИЯ И ЕЕ УРАВНЕНИЕ В R^2
- ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НОРМАЛЬНОМУ ВЕКТОРУ
- УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НАПРАВЛЯЮЩЕМУ ВЕКТОРУ
- УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ДВУМ ТОЧКАМ
- УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И УГЛОВОМУ КОЭФФИЦИЕНТУ

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ С УГЛОВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ.

УГОЛ МЕЖДУ ДВУМЯ ПРЯМЫМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Уравнение $F(x, y) = 0$, связывающее между собой переменные x и y называют ***уравнением плоской линии*** в выбранной системе координат, если координаты x и y любой точки M этой линии ему удовлетворяют , а координаты всех точек , не лежащих на ней , ему не удовлетворяют .

ПРИМЕР

- Построить линию, заданную уравнением

$$y = \sqrt{x}$$

- Придавая переменной различные числовые значения и вычисляя соответствующие значения , построим таблицу

x	0	1	4	9	...
y	0	1	2	3	...

- Введем на плоскости декартову систему координат и построим на этой плоскости соответствующие точки с координатами. Соединяя построенные точки линией, получим искомую кривую

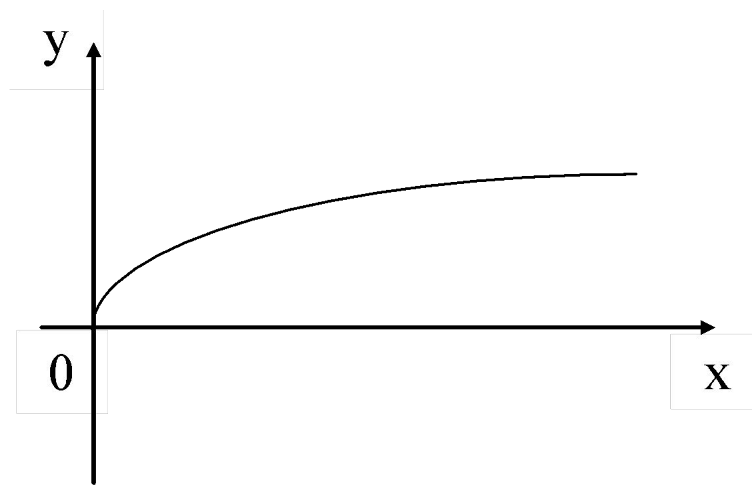


Рис. 1.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ Уравнение $F(x, y) = 0$ называется $\boxed{\text{алгебраическим}}$, если выражение $F(x, y)$ есть сумма конечного числа слагаемых вида $\boxed{Ax^k y^m}$, где $k, m -$ целые неотрицательные числа, A -действительное число. При этом наибольшая из сумм степеней $\boxed{k + m}$ называется ***степенью уравнения***

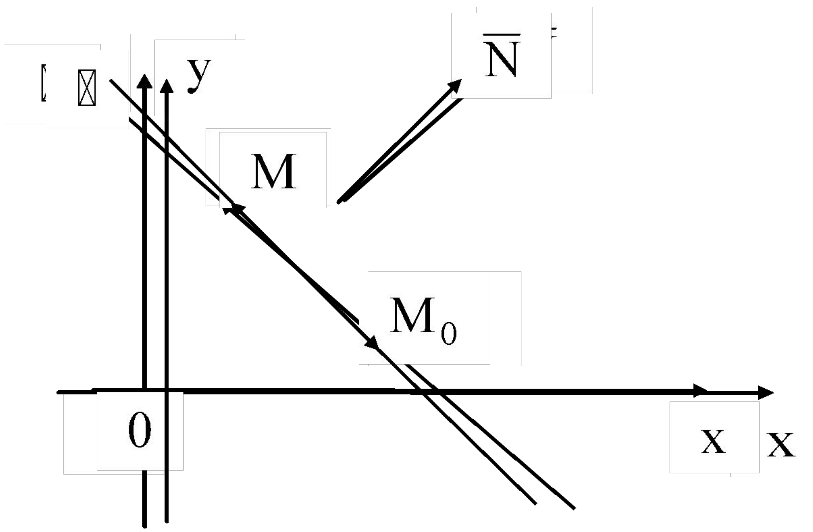
ПРЯМАЯ ЛИНИЯ НА ПЛОСКОСТИ. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НОРМАЛЬНОМУ ВЕКТОРУ

- Положение прямой на координатной плоскости вполне определяется заданием
- **любых двух ее точек**
- **точки и вектора, параллельного прямой**
- **точки и вектора, перпендикулярного прямой**
- **углового коэффициента и отрезка, отсекаемого прямой от оси OY**
- **других величин.**

Уравнение прямой по точке и нормальному вектору

Пусть на плоскости XOY дана точка $M_0(x_0;y_0)$ и вектор $\overline{N}=A\bar{i}+B\bar{j}$.

Выберем на плоскости произвольную точку $M(x;y)$ и построим вектор $\overline{M_0M}=(x-x_0)\bar{i}+(y-y_0)\bar{j}$.



•

Рассмотрим два случая:

1) пусть точка $M \in$ □.Тогда $\overline{M_0M} \perp \overline{N} \Rightarrow \overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$ или

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;}$$

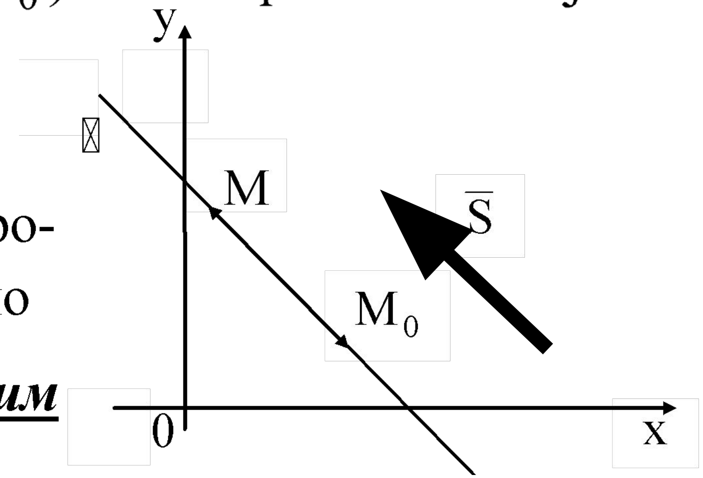
2) если точка $M \notin$ □, то векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{N}$ не перпендикулярны. Следовательно $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} \neq 0$ или $A(x - x_0) + B(y - y_0) \neq 0$.

Таким образом, в п. 1 получено уравнение искомой прямой □.

- Уравнение п.1. называется уравнением прямой по точке и нормальному вектору $\overline{N} = \{A; B\}$.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И НАПРАВЛЯЮЩЕМУ ВЕКТОРУ

Пусть на плоскости XOY дана точка $M_0(x_0; y_0)$ и вектор $\bar{S} = m\bar{i} + n\bar{j}$.



Требуется определить уравнение прямой □ проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно вектору $\bar{S}$ (вектор $\bar{S}$ называется ***<u>направляющим вектором прямой</u>***).

•

Выберем на плоскости XOY произвольную точку $M(x; y)$ и построим вектор $\overline{M_0 M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j}$.

Рассмотрим два случая:

1) пусть точка $M \in \ell$. Тогда $\overline{M_0M} \parallel \overline{S}$. Следовательно, векторы $\overline{M_0M}$ и $\overline{S}$ коллинеарны. Итак, $\overline{M_0M} = \lambda \overline{S}$, где λ - некоторое действительное число. Тогда $(x - x_0)\overline{i} + (y - y_0)\overline{j} = \lambda(m\overline{i} + n\overline{j}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = m\lambda \\ y - y_0 = n\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \lambda \Leftrightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n};}$$

2) пусть точка $M \notin \ell$. Тогда $\overline{M_0M} \neq \lambda \overline{S}$ при любом λ. Отсюда и $\boxed{\frac{x - x_0}{m} \neq \frac{y - y_0}{n}.}$ Из 1) и 2) и определения уравнения линии следует, что уравнение п.1 является уравнением искомой прямой ℓ. Это уравнение называется уравнением прямой по точке и направляющему вектору $\overline{S} = \{m; n\}$. Его также называют каноническим уравнением прямой.

Замечание

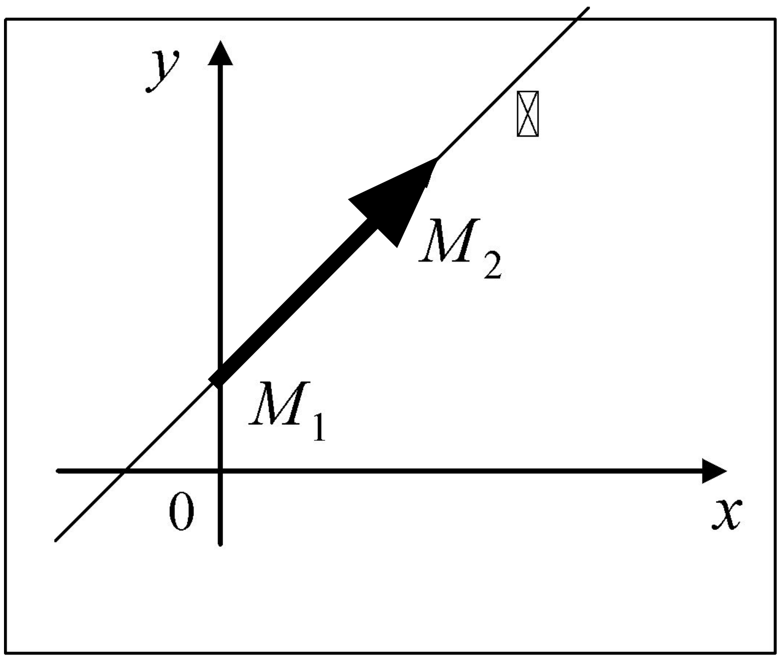
Если прямая ▯ проходит через точку $M_0(x_0; y_0)$ и параллельна оси OX, то направляющий вектор $\bar{S}$ также параллелен этой оси. Следовательно, $\boxed{\bar{S} = \{m; 0\}.}$ Хотя его проекция $n = 0$, уравнение этой прямой условились записывать в канонической форме, т.е. в форме $\boxed{\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{0}}$. Последнее уравнение считается другой формой записи уравнения этой прямой $y = y_0$.

Аналогично каноническое уравнение вида $\boxed{\dfrac{x - x_0}{0} = \dfrac{y - y_0}{n}}$ означает другую форму записи уравнения прямой $x = x_0$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ параллельно оси OY.

Примем за направляющий вектор $\bar{S}$ вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$. Тогда $m = x_2 - x_1, n = y_2 - y_1$. Подставляя найденные числа в предыдущее уравнение, получим уравнение искомой прямой .

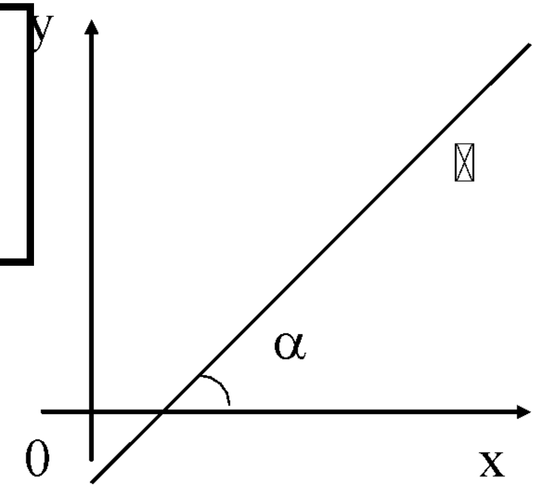
$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Полученное уравнение называется уравнением прямой, проходящей через две данные точки.



УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ПО ТОЧКЕ И УГЛОВОМУ КОЭФФИЦИЕНТУ

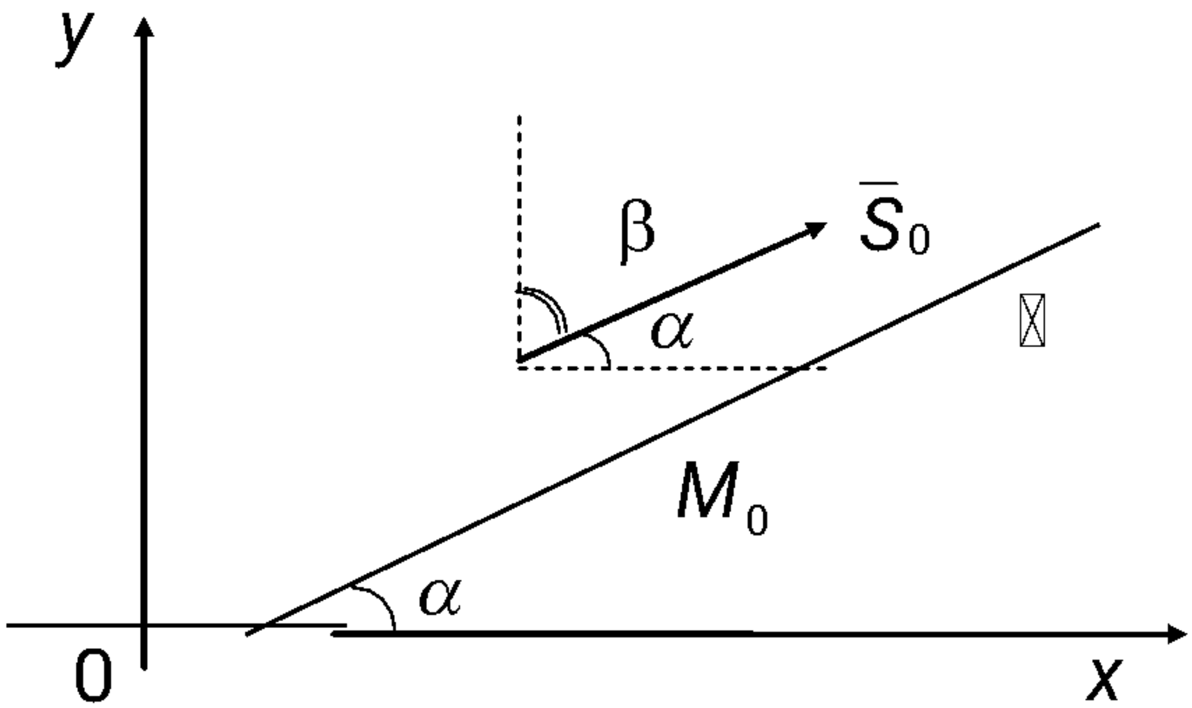
Пусть на плоскости XOY проведена некоторая прямая ⌧.
Углом наклона α прямой к оси OX называется угол, на который нужно повернуть вокруг начала координат против движения часовой стрелки ось абсцисс так, чтобы она стала параллельна данной прямой.



Тангенс угла наклона α прямой называется угловым коэффициентом прямой и обозначается буквой k. Итак,

$$\boxed{k = \mathrm{tg}\alpha}$$

Заметим, что если α острый угол, то $k > 0$, если тупой, то $k < 0$, если $\alpha = 0$, то $k = 0$, если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то k не существует.


y
β
$\bar{S}_0$
α
M_0
α
0
x

Так как $\cos\beta = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, то $\bar{S}^0 = \{\cos\alpha\,;\sin\alpha\}$.

Полагая $m = \cos\alpha, n = \sin\alpha$, получим

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha} \Leftrightarrow y - y_0 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = \mathrm{tg}\alpha(x - x_0) \Leftrightarrow \boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

Полученное уравнение называется уравнением прямой по точке и угловому коэффициенту.

Пусть требуется найти уравнение прямой □, если □ проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$ и имеет угловой коэффициент k. Как известно, уравнение любой прямой проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ запишется в виде

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n},}$$

где m и n есть координаты направляющего вектора $\bar{S}$. В качестве направляющего вектора прямой □ примем единичный вектор $\bar{S}^0=\{\cos\alpha;\cos\beta\}$, составляющий с осью OX тот же угол α, что и прямая □.