ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

- Скалярные и векторные величины
- Линейные операции над векторами
- Угол между векторами. Проекция вектора на ось
- Линейная комбинация векторов. Базис
- Прямоугольная декартова система координат
- Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме

Скалярные и векторные величины

- Определение скалярной величины
- Определение векторной величины
- Длина вектора
- Нулевой вектор
- Коллинеарность векторов. Компланарность векторов
- Равенство векторов
- Противоположный вектор. Единичный вектор

Определение скалярной величины

Величина, определяемая заданием своего численного значения, называется ***скалярной величиной***

Примерами **скалярных величин** являются **длина, площадь, объем, масса, температура** и др.

Скалярные величины обозначаются символами

$a, b, \dots, A, B \dots$

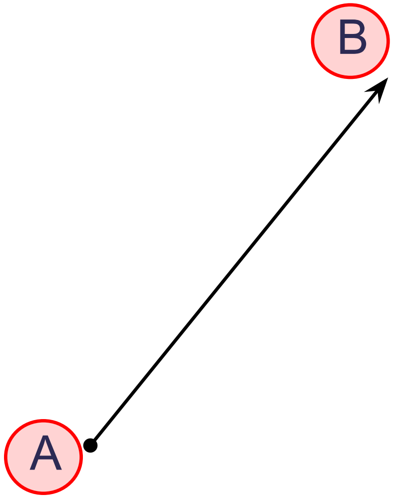
и изображаются точками соответствующей числовой оси

Определение векторной величины

- Величина, определяемая заданием своего численного значения и направления, называется ***векторной величиной.***
- Примерами **векторных величин** являются **сила, скорость, ускорение** и др.
- Векторные величины изображаются с помощью векторов - направленных отрезков.

Изображение вектора

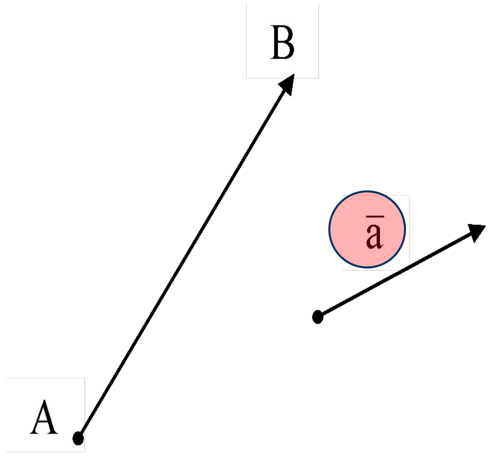
- Пусть точка A есть начало вектора, а точка B его конец, тогда этот вектор обозначается символом $\overline{AB}$ и изображается с помощью стрелки



Длина вектора

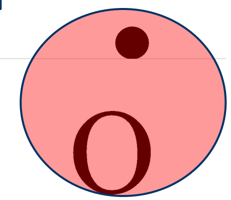
- Вектор может быть обозначен также одним из символов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$
- Расстояние между началом и концом вектора называется ***длиной вектора*** или ***его модулем***. Модуль вектора обозначается символами

$$|\overline{AB}|, |\overline{a}|, \ldots$$



Нулевой вектор

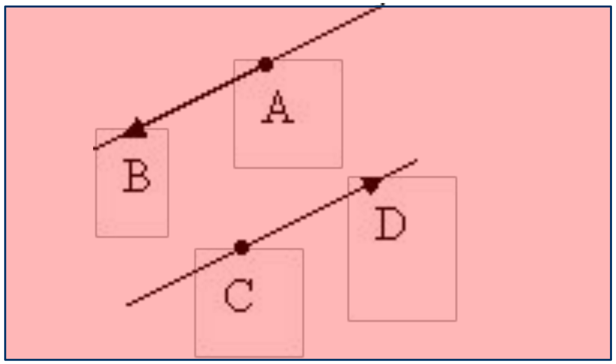
- Вектор, начало которого совпадает с его концом, называется ***нулевым вектором*** и обозначается $\overline{0}$



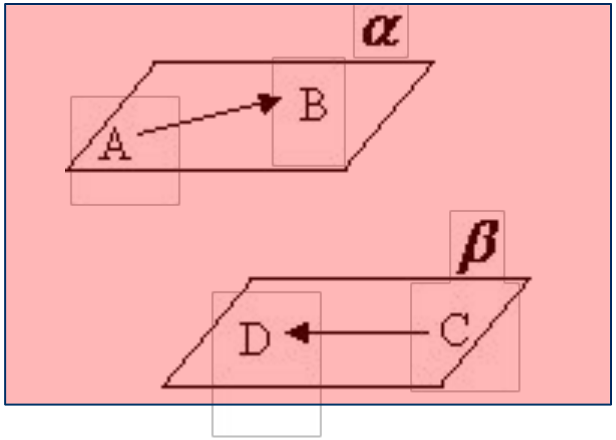
- Нулевой вектор не имеет определенного направления и его $|\overline{0}| = 0$

Коллинеарность векторов Компланарность векторов

- Векторы, расположенные на одной прямой или параллельных прямых, называются ***коллинеарными***

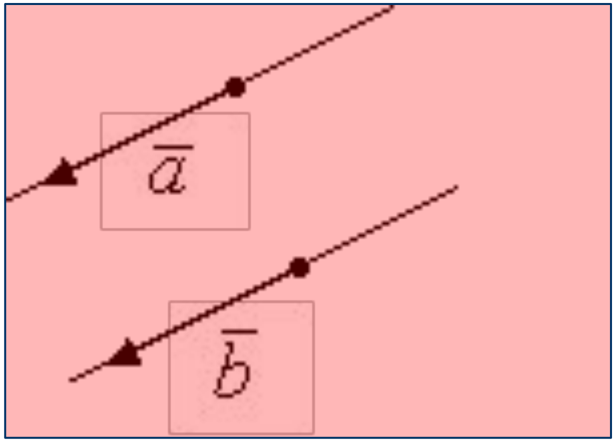


- Векторы, расположенные на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются ***компланарными***



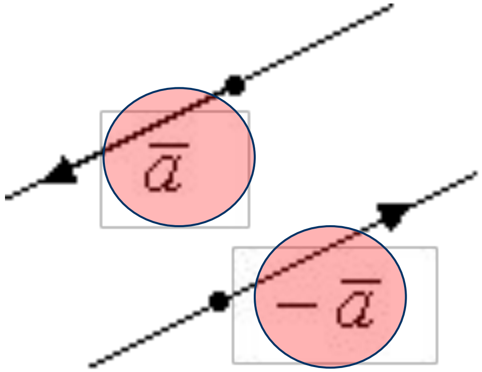
Равенство векторов

- Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **равными**, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковую длину.
- Равенство векторов записывается в виде $\overline{a} = \overline{b}$

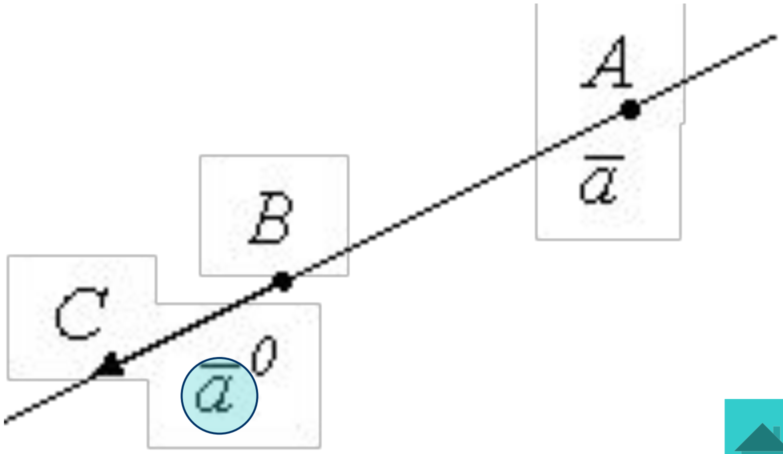


Противоположный вектор Единичный вектор

- Вектор $\left(-\overline{a}\right)$ называется **противоположным вектором** для вектора $\overline{a}$, если он ему коллинеарен, имеет одинаковую с длину, но направлен в противоположную сторону.



- Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором** и обозначается символом $\overline{a}^{0}$

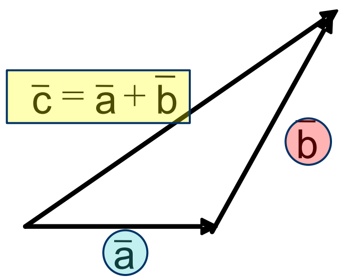


Линейные операции над векторами

- Сложение векторов
- Переместительный закон сложения векторов
- Сочетательный закон сложения векторов
- Разность векторов
- Умножение вектора на число
- Распределительный и сочетательный законы умножения вектора на число

Сложение векторов

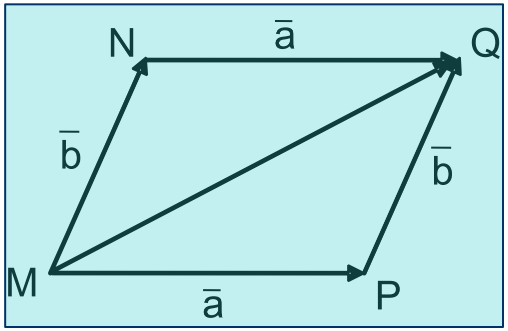
- Суммой векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется третий вектор $\boxed{\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}}$, начало которого совпадает с началом вектора $\overline{a}$, а конец – с концом вектора $\overline{b}$, при условии, что начало вектора $\overline{b}$ приложено к концу вектора $\overline{a}$



Переместительный закон сложения векторов

- Сумма векторов может быть найдена и по правилу параллелограмма

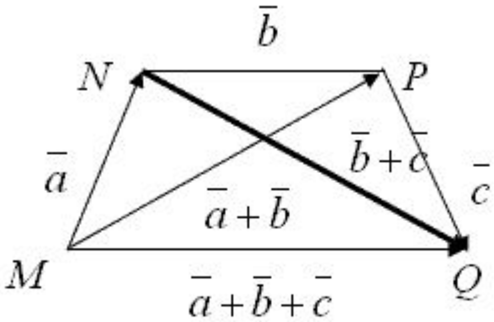
- Сложение векторов подчиняется переместительному закону $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$



Сочетательный закон сложения векторов

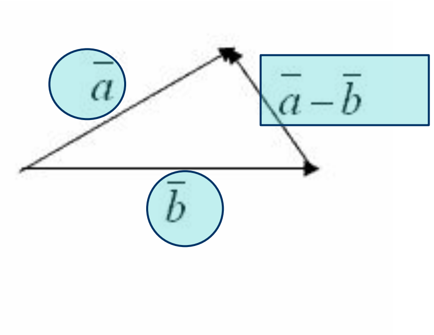
- Сложение векторов подчиняется сочетательному закону

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$$

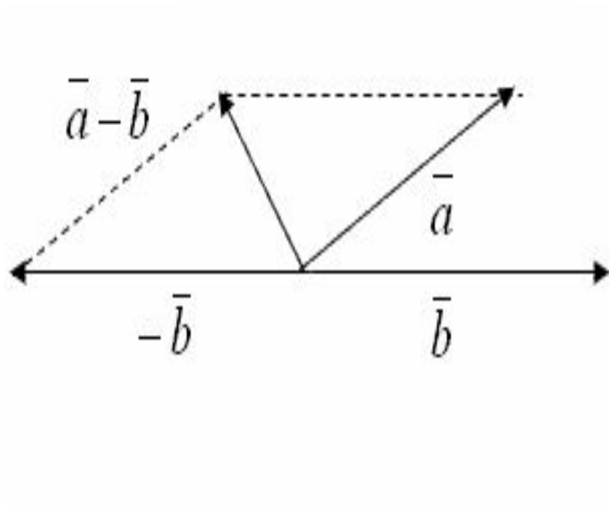


Разность векторов

- **Разностью векторов** $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется такой вектор $\boxed{c = a - b}$, что $\overline{a} = \overline{b} + \overline{c}$.

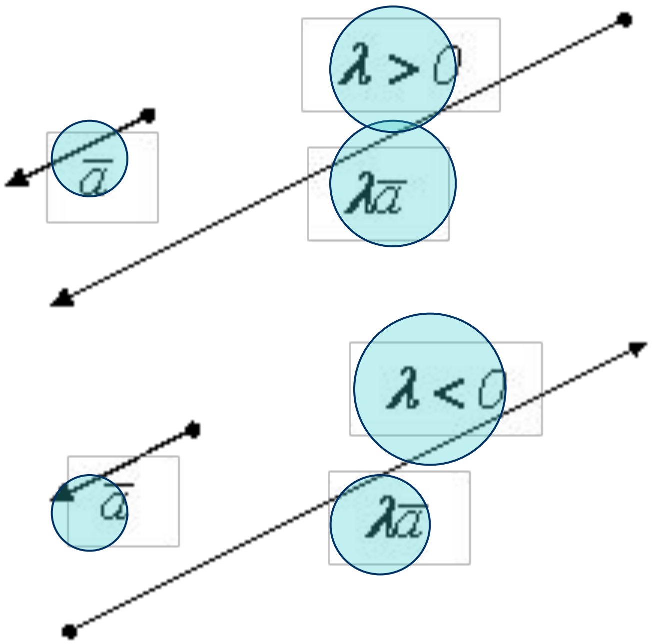


- Для построения вектора $\overline{a} - \overline{b}$ по данным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$ можно воспользоваться одним из способов, сущность которых пояснена на рисунках



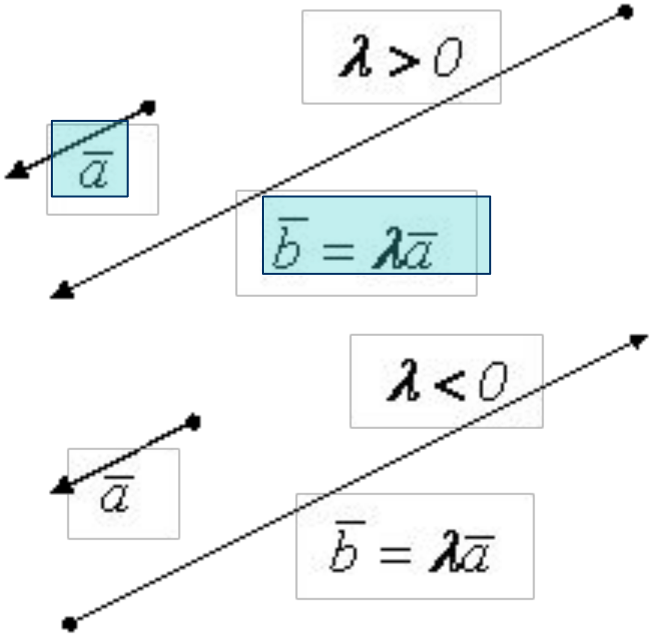
Умножение вектора на число

- **Произведением вектора** $\overline{a}$ **на число** λ называется вектор $\lambda\overline{a}$ коллинеарный вектору $\overline{a}$, имеющий длину $|\lambda\overline{a}| = |\lambda||\overline{a}|$ и то же направление, что и вектор $\overline{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$.
  Если $\lambda = 0$, то $\lambda\overline{a} = \overline{0}$



Следствие 1
о коллинеарности векторов

- Из определения умножения вектора на число следует, что если $\boxed{\bar{b} = \lambda \bar{a}}$, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны. Очевидно, что если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные векторы, то $\bar{b} = \lambda \bar{a}$.

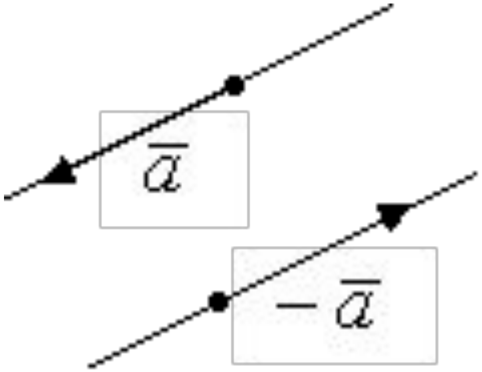


Следствие 2. Следствие 3.

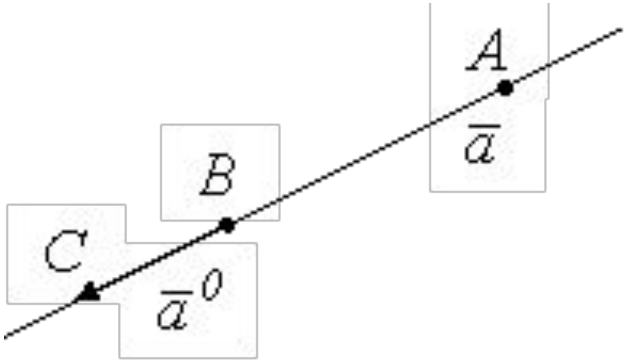
$$-\overline{a} = (-1)\overline{a}$$

$$\overline{a} = |\overline{a}|\overline{a}^{0}$$

- Следствие 2.
  Противоположный вектор $-\overline{a}$ можно рассматривать как произведение вектора $\overline{a}$ на $\lambda = -1$, то есть $-\overline{a} = (-1)\overline{a}$



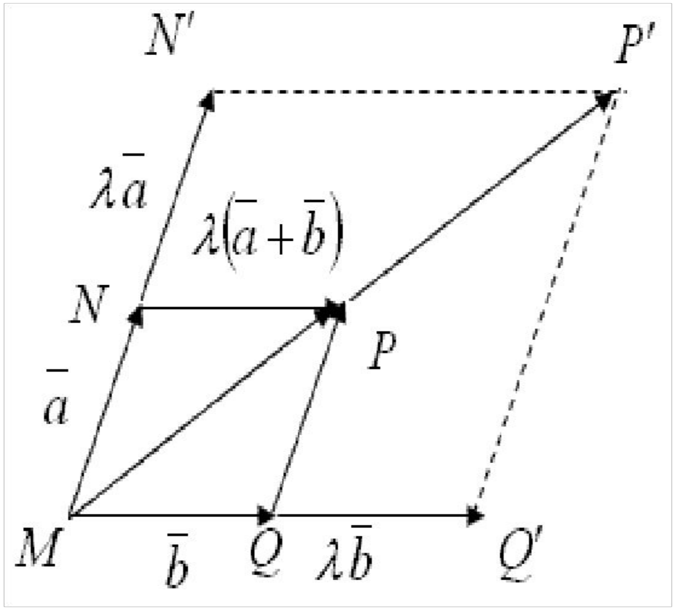
- Следствие 3. Пусть дан вектор $\overline{a}$. Рассмотрим вектор $\overline{a}^{0}$, коллинеарный $\overline{a}$, направленный, как $\overline{a}$, имеющий длину, равную единице. Тогда, согласно операции умножения вектора на число, следует, что



Распределительные и сочетательный законы умножения вектора на число

- Умножение вектора на число подчиняется распределительным законам

$$\lambda(\overline{a}+\overline{b}) = \lambda\,\overline{a}+\lambda\,\overline{b},\quad (\lambda_1+\lambda_2)\overline{a} = \lambda_1\,\overline{a}+\lambda_2\,\overline{a}$$



- и сочетательному закону

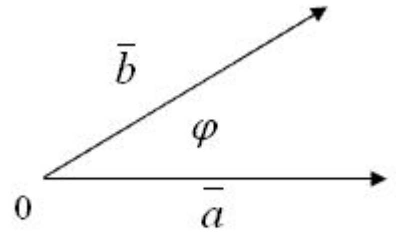
$$(\lambda_1\cdot\lambda_2)\overline{a} = \lambda_1\left(\lambda_2\,\overline{a}\right)$$

Угол между векторами. Проекция вектора на ось.

- Угол между векторами
- Определение проекции вектора на ось
- Проекция суммы векторов на ось

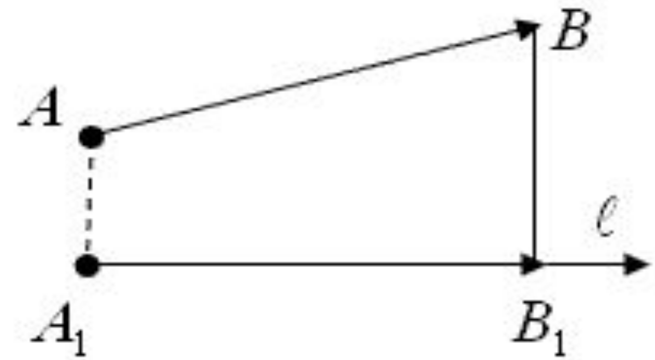
Угол между векторами

- Углом между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется наименьший угол $\varphi\left(0 \le \varphi \le \pi\right)$ на который нужно повернуть один из заданных векторов до его совпадения со вторым



Определение проекции вектора на ось

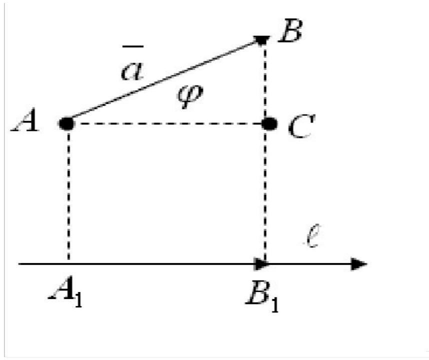
- Пусть в пространстве заданы вектор $\overline{AB}$ и ось ℓ
- Вектор $\overline{A_1B_1}$ - компонента вектора $\overline{AB}$ по оси ℓ .
- Проекцией вектора $\overline{AB}$ на ось ℓ называется длина его компоненты по этой оси, если компонента направлена в ту же сторону, что и ось ℓ ; противоположное число, если компонента и ось имеют разные направления; нуль, если компонента есть нулевой вектор. Проекция вектора на ось обозначается в виде $np_{\ell}\overline{AB}$ или $\cdot np_{\ell}\overline{a}$

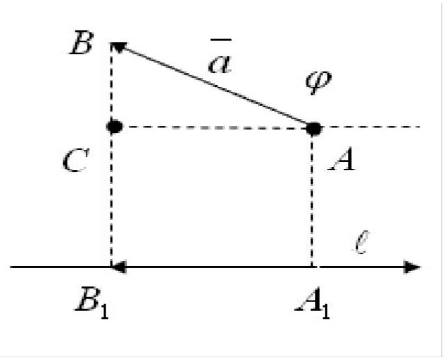


Теорема
Проекция вектора на ось

- ***Теорема*** Проекция вектора $\overline{a}$ на ось ℓ равна модулю вектора , умноженному на $\overline{a}$ косинус угла φ между вектором и осью:

$$np_{\ell}\,\overline{a} = \left|\overline{a}\right|\cos\varphi$$





Проекция суммы векторов на ось

- ***Теорема.*** Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекции слагаемых векторов на ту же ось:
$$пр_{\ell}\left(\overline{a}_1+\overline{a}_2+\dots+\overline{a}_k\right)=пр_{\ell}\overline{a}_1+пр_{\ell}\overline{a}_2+\dots+пр_{\ell}\overline{a}_k$$
- ***Теорема.*** Если вектор $\overline{a}$ умножить на число λ, то его проекция на ось умножится на это число: $пр_{\ell}\left(\lambda\overline{a}\right)=\lambda\, пр_{\ell}\overline{a}$

Линейная комбинация векторов. Базис

- Линейная комбинация векторов
- Линейная зависимость и независимость векторов
- Определение базиса пространства
- Базис пространства
- Разложение вектора по базисным вектрам

Линейная комбинация векторов

- **<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>** Пусть заданы векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_k$ и числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Выражение $\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \dots + \lambda_k \overline{a}_k$ называется ***линейной комбинацией векторов*** $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_k$

Линейная зависимость и независимость векторов

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ** Если равенство

$$\lambda_1 \overline{a}_1 + \lambda_2 \overline{a}_2 + \dots + \lambda_k \overline{a}_k = \overline{0}$$

возможно только при всех $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, равных нулю, то векторы $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_k$ называются ***линейно-независимыми***.

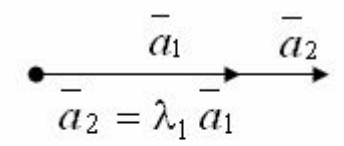
Если же это равенство справедливо не при всех $\lambda_i = 0$, где $i = 1, 2, \dots, k$, то векторы называются ***линейно-зависимыми.***

Определение базиса пространства

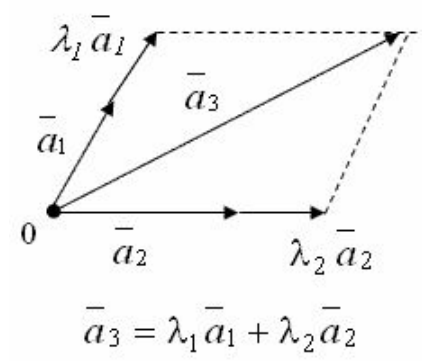
- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ** Любая группа, составленная из максимального числа линейно-независимых векторов некоторого пространства R^n, называется ***базисом*** этого пространства.
- Число векторов базиса ***называется размерностью пространства***.

Базис пространства

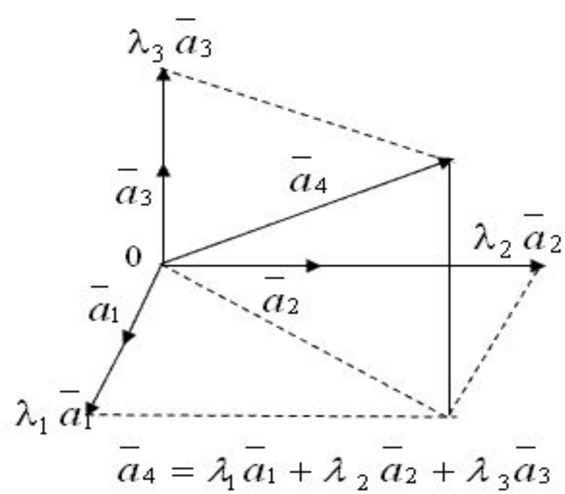
- Базисом на прямой (пространство R^1) является любой ненулевой вектор этой прямой. Размерность прямой равна единице.



- Базисом на плоскости (пространство R^2) являются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости. Размерность плоскости равна двум.



- Базисом в объемном пространстве (пространство R^3) являются любые три некомпланарные вектора. Размерность этого пространства равна трем.



Разложение вектора по базисным векторам

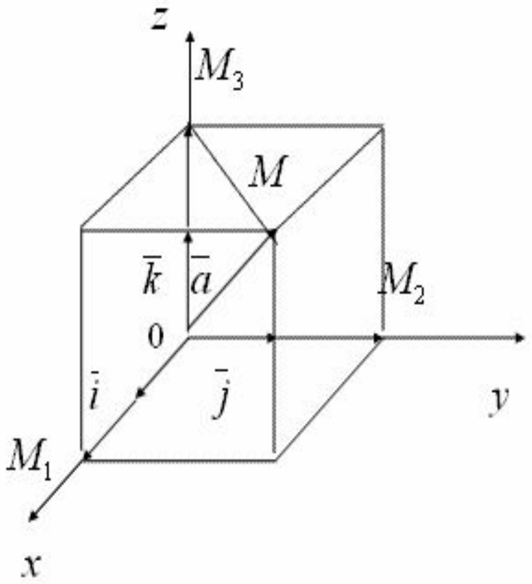
- Представление вектора $\bar{a}$ в форме
  $$\bar{a} = \lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n$$
  называется разложением этого вектора по базисным векторам.
- Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ разложения называются ***координатами вектора*** $\bar{a}$ по базису $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$. Этот факт записывается в виде $\bar{a} = \{\lambda_1; \lambda_2; \dots \lambda_n\}$
- Векторы $\lambda_1 \bar{a}_1, \lambda_2 \bar{a}_2, \dots, \lambda_n \bar{a}_n$ называется компонентами вектора $\bar{a}$ по базисным векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots \bar{a}_n$.

Прямоугольная декартова система координат

- Определение прямоугольной декартовой системы координат
- Координаты вектора. Длина вектора.
- Направляющие косинусы вектора

Определение прямоугольной декартовой системы координат

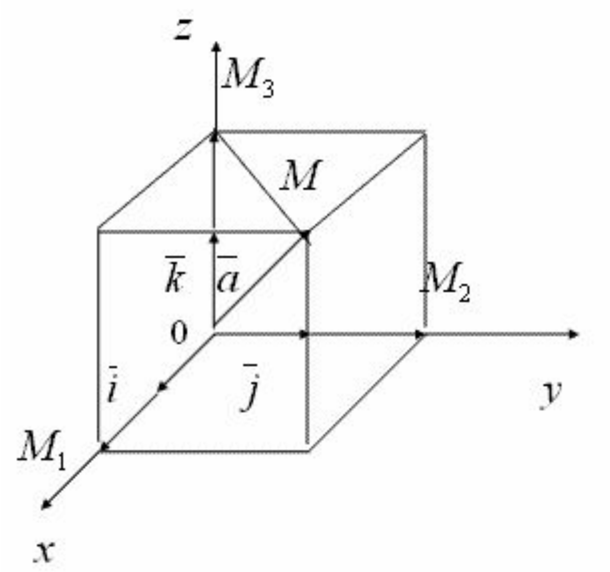
- **<u>ОПРЕДЕЛЕНИЕ</u>** Пусть в пространстве R^3 векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ образуют базис этого пространства. Выберем в R^3 произвольную точку O и отложим с началом в этой точке базисные векторы. Совокупность точки O и трех базисных векторов называется ***системой координат*** в пространстве R^3. Совокупность точки O и базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ называется ***прямоугольной декартовой системой координат*** в пространстве R^3 .



Координаты вектора. Длина вектора.

- Координаты точки $M \in R^3$ записываются в форме $M(x;y;z)$ Пусть вектор $\overline{a} = \overline{OM}$ задан в координатной форме $\overline{a} = \{x;y;z\}$. Так как этот вектор совпадает с диагональю прямоугольного параллелепипеда, то его длина равна длине этой диагонали. Следовательно,

$$|\overline{a}| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$



Направляющие косинусы вектора

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ** Косинусы углов α, β, γ , определяемые

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

называются ***направляющими косинусами вектора*** $.\bar{a}$
Нетрудно проверить, что направляющие косинусы связаны между собой соотношением

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме

- Действия на векторами, заданными в координатной форме
- Условие коллинеарности двух векторов
- Задача определения расстояния между двумя точками
- Деление отрезка в данном отношении

Действия над векторами, заданными в координатной форме

- Пусть векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ заданы в координатной форме:

$$\overline{a_1} = \{x_1; y_1; z_1\} = x_1\overline{i} + y_1\overline{j} + z_1\overline{k},$$

$$\overline{a_2} = \{x_2; y_2; z_2\} = x_2\overline{i} + y_2\overline{j} + z_2\overline{k}.$$

Непосредственно из теорем о проекциях векторов на ось и определения координат вектора вытекают правила:

$$\overline{a_1} = \overline{a_2} \qquad x_1 = x_2,\ y_1 = y_2,\ z_1 = z_2;$$

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} = (x_1 + x_2)\overline{i} + (y_1 + y_2)\overline{j} + (z_1 + z_2)\overline{k};$$

$$\overline{a_1} - \overline{a_2} = (x_1 - x_2)\overline{i} + (y_1 - y_2)\overline{j} + (z_1 - z_2)\overline{k};$$

$\lambda\,\overline{a_1} = \lambda\, x_1\overline{i} + \lambda\, y_1\overline{j} + \lambda\, z_1\overline{k}$, где $\lambda \in R$

Условие коллинеарности двух векторов

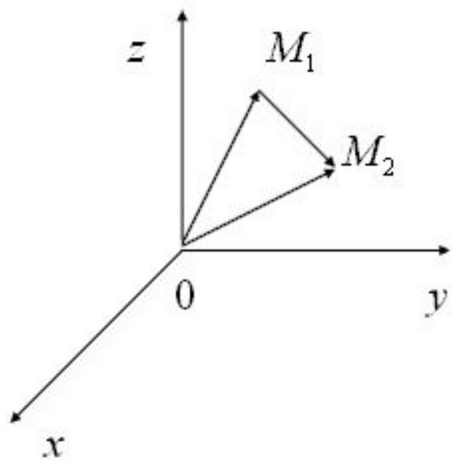
- ПРИМЕР
- Установить условие коллинеарности векторов $\overline{a_1} = \{x_1; y_1; z_1\},\ \overline{a_2} = \{x_2; y_2; z_2\}$
- <u>Решение.</u> Так как векторы коллинеарны, то $\overline{a_1} = \lambda \overline{a_2}$, где $\lambda -$ некоторое число. Имеем

$$x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k} = \lambda x_2 \bar{i} + \lambda y_2 \bar{j} + \lambda z_2 \bar{k} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \lambda x_2, y_1 = \lambda y_2, z_1 = \lambda z_2 \Rightarrow \lambda = \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Задача определения расстояния между двумя точками

- Пусть в пространстве R^3 заданы своими координатами две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Так как длина вектора $\overline{M_1M_2}$ равна расстоянию между точками M_1 и M_2, то



$$d = \left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Задача деления отрезка в данном отношении

Пусть даны две точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$. Требуется на прямой M_1M_2

найти точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, которая разделила бы отрезок $[M_1M_2]$ в заданном отношении λ, т.е. так, что $\overline{M_1M_0} = \lambda\,\overline{M_0M_2}$.

Находим длины векторов:

$$\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1;\, y_0 - y_1;\, z_0 - z_1\},$$

$$\overline{M_0M_2} = \{x_2 - x_0;\, y_2 - y_0;\, z_2 - z_0\}.$$

Равенство $\overline{M_1M_0} = \lambda\,\overline{M_0M_2}$ примет вид

$$x_0 - x_1 = \lambda(x_2 - x_0),\; y_0 - y_1 = \lambda(y_2 - y_0),\; z_0 - z_1 = \lambda(z_2 - z_0).$$

Определяя x_0, y_0, z_0 из этих равенств, получим

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\; y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\; z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda},$$

где $\lambda \in R, \lambda \neq -1$.

В частности, при $\lambda = 1$ получим формулы деления отрезка пополам:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\; y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2},\; z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$