

Векторная алгебра

- Скалярное произведение векторов
 - Векторное произведение векторов
 - Смешанное произведение векторов
- 

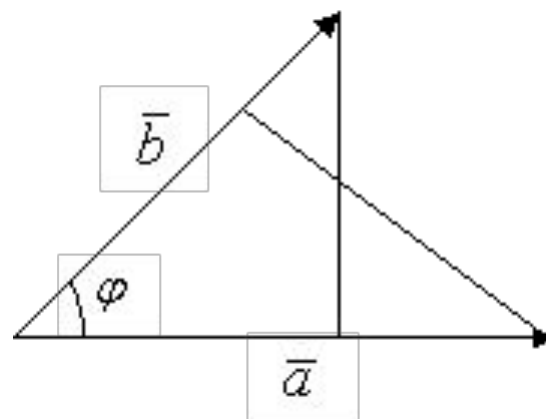
Скалярное произведение векторов

- Определение скалярного произведения векторов
- Свойства скалярного произведения векторов
- Скалярное произведение векторов в координатной форме
- Условие перпендикулярности векторов
- Нахождение угла между векторами
- Физическое приложение скалярного произведения векторов

Определение скалярного произведения векторов

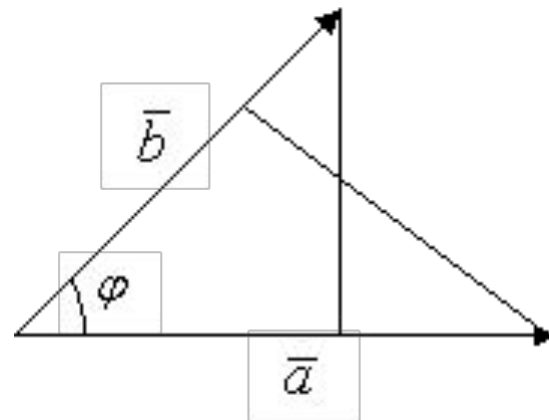
- Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению модулей перемножаемых векторов на косинус угла φ между ними. Скалярное произведение обозначается символом $\vec{a}\vec{b}$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$



Определение скалярного произведения векторов через проекции одного вектора на направление второго

- Так как $|\vec{b}| \cos \varphi = n p_{\vec{a}} \vec{b}$,
 $|\vec{a}| \cos \varphi = n p_{\vec{b}} \vec{a}$,
- то
 $\vec{a} \vec{b} = |\vec{a}| n p_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| n p_{\vec{b}} \vec{a}$.
- Следует, что скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно модулю одного из векторов, умноженному на проекцию другого на направление первого вектора.



Свойства скалярного произведения векторов

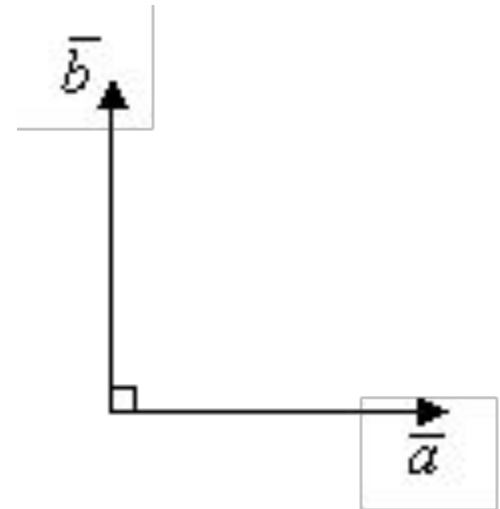
- 1) $\overline{a} \overline{b} = \overline{b} \overline{a}$;
- 2) $\overline{a} \overline{b} = 0$, если $\overline{a} \perp \overline{b}$ или хотя бы один из векторов есть нулевой вектор (справедливо и обратное утверждение);
- 3) $\overline{a} \overline{a} = |\overline{a}|^2$;
- 4) $\lambda(\overline{a} \overline{b}) = (\lambda \overline{a}) \overline{b} = \overline{a} (\lambda \overline{b})$ для $\forall \lambda \in R$;
- 5) $(\overline{a} + \overline{b}) \overline{c} = \overline{a} \overline{c} + \overline{b} \overline{c}$.

Скалярное произведение векторов в координатной форме

- Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:
 $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$
- Найдем скалярное произведение $\vec{a}\vec{b}$. Вычислим предварительно скалярные произведения единичных векторов.
- Имеем $\vec{i}\vec{i} = |\vec{i}||\vec{i}|\cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1, \quad \vec{j}\vec{j} = 1, \quad \vec{k}\vec{k} = 1.$
- Векторы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ взаимно перпендикулярны. Тогда, согласно свойству 2, их произведения друг на друга равны нулю. Итак, $\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Условие перпендикулярности векторов

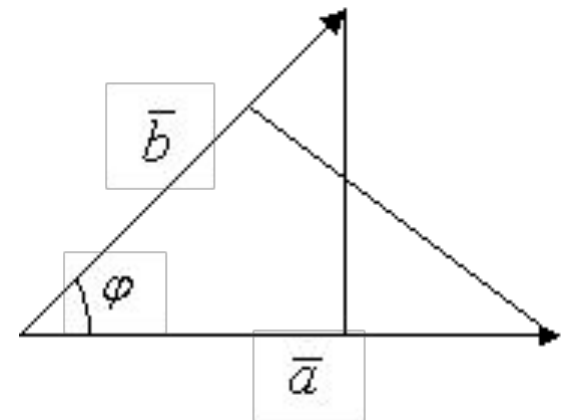
- Следствие 1. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$,
то $\vec{a}\vec{b} = 0$
- Условие $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$
называется **условием перпендикулярности двух векторов**, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:
$$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}.$$



Нахождение угла между векторами

- Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \quad \vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$



- Следствие 2.

Так как $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, то

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

Физическое приложение скалярного произведения векторов

- ПРИМЕР Вычислить работу по перемещению материальной точки вдоль отрезка, из точки $B(1;-2;3)$ в точку $C(3;4;2)$ под действием постоянной по величине и направлению силы $\vec{F} = \{2;1;5\}$.

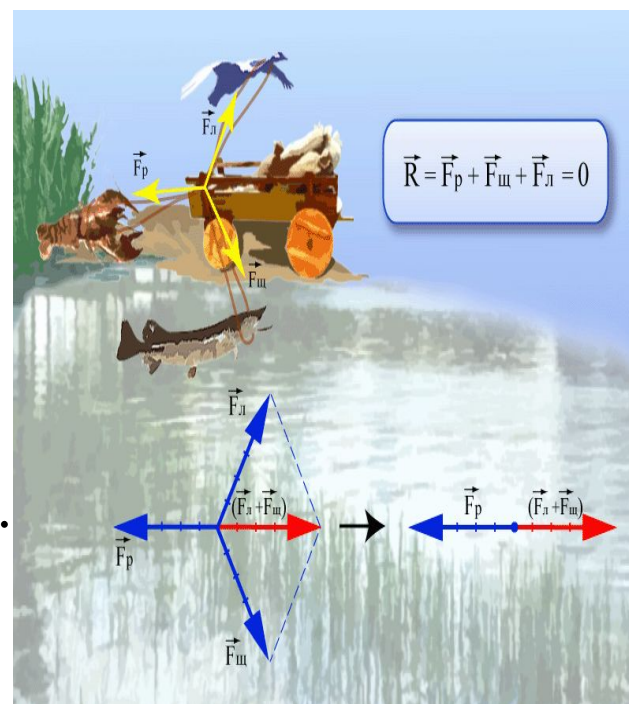
- Решение. Из курса физики известно, что работа, совершаемая при указанных в примере условиях, находится по формуле

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = \vec{F} \cdot \vec{BC}.$$

Так как, $\vec{BC} = \{2;6;-1\}$, $\vec{F} = \{2;1;5\}$

то $A = \vec{F} \cdot \vec{BC} = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot (-1) = 5.$

- Ответ: 5.

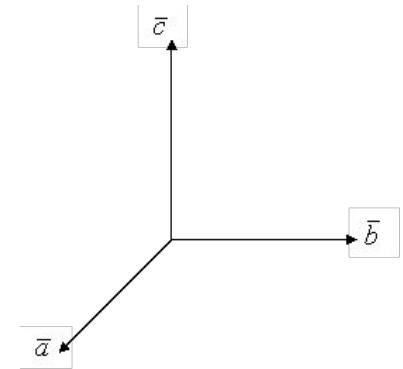


Векторное произведение векторов

- Определение векторного произведения векторов
- Свойства векторного произведения векторов
- Векторное произведение векторов, заданных своими координатами
- Физическое приложение векторного произведения векторов
- Геометрическое приложение векторного произведения векторов

Определение векторного произведения векторов

- **ОПРЕДЕЛЕНИЕ** Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий условиям:
- 1) длина вектора $\vec{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е. $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$;
- 2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен обоим векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) вектор $\vec{c}$ направлен в ту сторону, что если смотреть из его конца вдоль вектора, то кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ вектору виден совершающимся против движения часовой стрелки. Векторное произведение векторов обозначаемся символом $\vec{a} \times \vec{b}$.

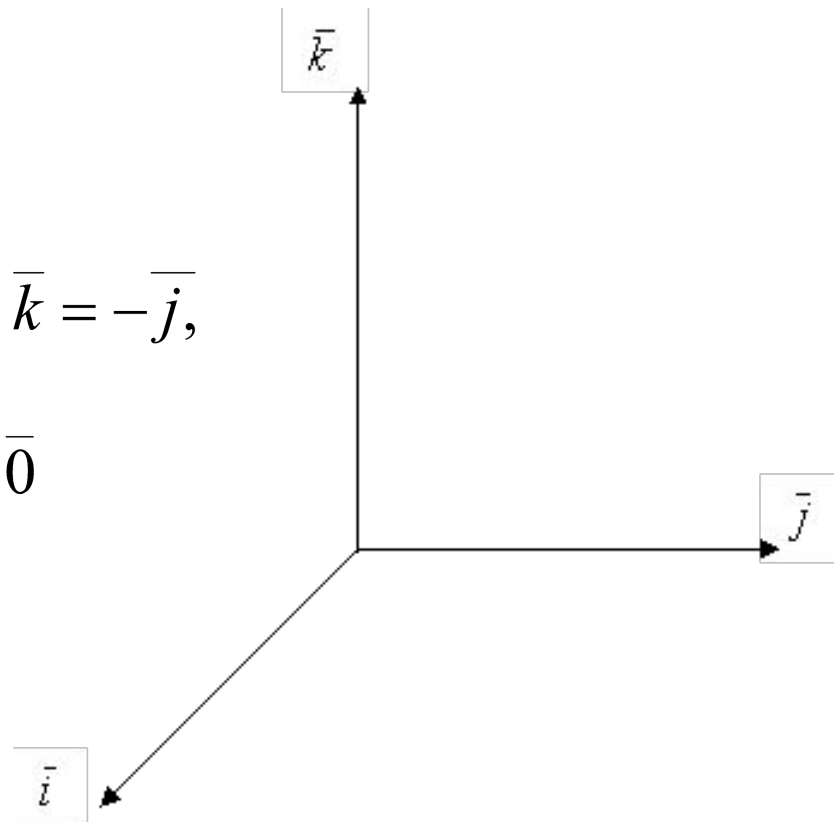


Векторное произведение единичных векторов

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}.$$

$$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},$$

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$



Свойства векторного произведения векторов

- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a});$
- $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$ для $\forall \lambda \in R;$
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0};$
- $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, если $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ или хотя бы один из векторов есть нулевой вектор;
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$

Векторное произведение векторов, заданных своими координатами

- Пусть $\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$. Тогда, согласно свойствам 2,3,4 получим

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

Физическое приложение векторного произведения векторов

ПРИМЕР Сила $\vec{F} = \{3; 2; -4\}$ приложена к точке $M(2; -1; 1)$.
Определить момент силы относительно начала координат.

Решение. Пусть точка A есть некоторая точка R^3 . Моментом силы $\vec{F}$, приложенной к точке M , относительно точки A называется вектор $\vec{AM} \times \vec{F}$.
По условию $\vec{AM} = \vec{OM} = \{2; -1; 1\}$, $\vec{F} = \{3; 2; -4\}$. Тогда, согласно формуле, получим

$$\vec{OM} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Ответ: $\{2; 11; 7\}$.

Применение векторного произведения векторов в геометрии

ПРИМЕР Даны вершины треугольника $A(1;2;0)$, $B(3;0;-3)$ и $C(5;2;6)$. Вычислить площадь этого треугольника.

Решение. Найдем векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Имеем:

$$\overrightarrow{AB} = \{2; -2; -3\}, \overrightarrow{AC} = \{4; 0; 6\}.$$

Так как $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ равен площади параллелограмма

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3$$

, то площадь S треугольника ABC найдется по формуле

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{2} |-12\mathbf{i} -$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + (-24)^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \sqrt{874} = 14.$$

Ответ: 14

Смешанное произведение

- Определение смешанного произведения векторов
- Смешанное произведение векторов, заданных своими координатами
- Геометрический смысл смешанного произведения трех векторов
- Условие компланарности трех векторов
- Вычисление объема треугольной пирамиды

Определение смешанного произведения векторов

- Пусть даны три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
- Смешанное произведение, т.е. произведение, в котором вначале находится векторное произведение двух из заданных векторов, затем скалярное произведение полученного вектора на третий из данных векторов.
- Например, вначале находится векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$, затем - скалярное произведение $\vec{d} \cdot \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.
- Смешанное или иначе векторно-скалярное произведение обозначается символом $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ или символом $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.
- Результатом смешанного произведения является число.

Смешанное произведение векторов, заданных своими координатами

- Пусть требуется определить смешанное произведение векторов, если известны координаты этих векторов

$$\bar{a} = \{x_1; y_1; z_1\}, \bar{b} = \{x_2; y_2; z_2\}, \bar{c} = \{x_3; y_3; z_3\}$$

- Вычислим предварительно $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{d}$. Имеем

$$\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \bar{k}.$$

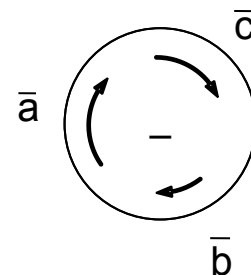
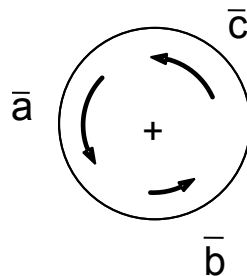
- Найдем $\bar{d} \bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \bar{c} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3.$

- Полученное равенство, согласно теореме о разложении определителя по элементам строки, можно переписать в форме

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Правая и левая тройки векторов в смешанном произведении векторов

- Для смешанного произведения векторов справедливы равенства

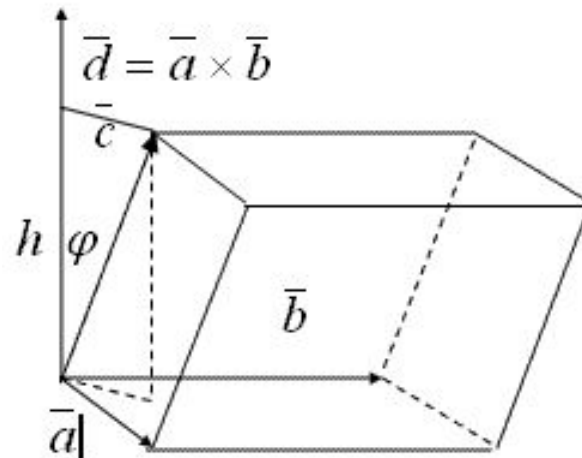


$$\begin{aligned}(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} &= (\bar{b} \times \bar{c})\bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a})\bar{b} = \\ &= -(\bar{a} \times \bar{c})\bar{b} = -(\bar{c} \times \bar{b})\bar{a} = -(\bar{b} \times \bar{a})\bar{c}\end{aligned}$$

Геометрический смысл смешанного произведения трех векторов

- Модуль смешанного произведения трех векторов равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах как на ребрах.

$$|(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}| = V$$



Условие компланарности трех векторов

Для того, чтобы три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю, т.е. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$ или в координатной форме

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

Вычисление объема треугольной пирамиды

ПРИМЕР Вычислить объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2;-1;1)$, $B(5;5;4)$, $C(3;2;-1)$, $D(4;1;3)$.

Решение. Построим три вектора

$\overline{AB} = \{3;6;3\}$, $\overline{AC} = \{1;3;-2\}$, $\overline{AD} = \{2;2;2\}$ с общим началом точкой A . На этих векторах, как на ребрах, построим параллелепипед. Его объем равен $|(\overline{AB} \times \overline{AC})\overline{AD}|$. Объем пирамиды V составляет шестую долю объема параллелепипеда. Следовательно,

$$V = \frac{1}{6}|(\overline{AB} \times \overline{AC})\overline{AD}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = |-3| = 3.$$

Ответ: 3