Иррациональные уравнения

Иррациональными называются уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня

Выбрать иррациональное уравнение:

$$\sqrt{x-1}=3$$

$$y^2+3y\sqrt{2}=4$$

$$x+\sqrt{x^2+9}=2$$

$$\sqrt{3}y-4=5$$

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$$

$$\sqrt{x}=x-2$$

$$\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}$$

$$\sqrt{6y}=0$$

$$\sqrt[3]{x-9}=-3$$

Иррациональные уравнения содержат радикалы. Чтобы избавиться от радикалов, необходимо возвести обе части уравнения в одну и ту же степень с натуральным показателем.

если:

- Возводим в нечетную степень, то получаем равносильное уравнение;
- Возводим в четную степень, то можем получить посторонние корни. В этом случае делаем проверку.

Алгоритм решения простейшего иррационального уравнения

1. Возвести обе части уравнения в нужную степень.
2. Решить полученное рациональное уравнение.
3. При необходимости проверить полученные корни подстановкой в исходное уравнение.
4. Выписать ответ.

Решить иррациональное уравнение

$$\sqrt{x^2 - x - 2} = 2$$

$$(\sqrt{x^2 - x - 2})^2 = (2)^2$$

$$x^2 - x - 2 = 4$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$x_1 = 3$ $\qquad$ $x_2 = -2$

Проверка

$\sqrt{3^2 - 3 - 2} = 2$ $\qquad$ $\sqrt{(-2)^2 + 2 - 2} = 2$

Ответ: 3; -2

Самостоятельная работа

I

$\sqrt{x+1} = x - 5$ — 8

$\sqrt[3]{x^2 - 28} = 2$ — ± 6

II

$\sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$ — решений нет

$\sqrt[3]{x^2 - 8} = 2$ — ± 4

III

$\sqrt{x-2} = x - 8$ — 11

$\sqrt[3]{x+12} = 4$ — 52

IV

$\sqrt{x^4 + 19} = 10$ — ± 3

$\sqrt[3]{x-1} = -1$ — 0

Устная работа

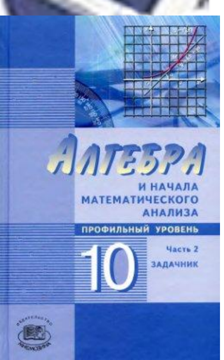
- Можно ли, не решая уравнений, сделать вывод о неразрешимости предложенных уравнений:

$$\sqrt{7-x} = -8 + x;$$

$$\sqrt{x-3} = -\sqrt{x^2-1}$$

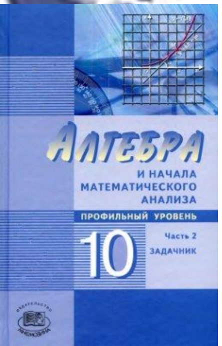
$$\sqrt{3-x} = 5 - \sqrt{x-9}$$

$$\sqrt{5x+7} + \sqrt{3-4x-x^2} + 2 = 0$$



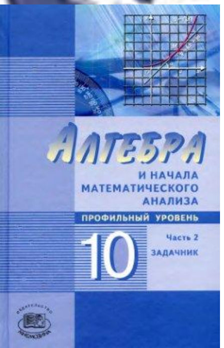
Методы решения иррациональных уравнений

- ***Введение новой переменной***
- ***Исследование ОДЗ***
- ***Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель.***
- ***Сведение уравнения к системе рациональных уравнений с помощью введения переменной.***
- ***Выделение полного квадрата***



Методы решения иррациональных уравнений

- ***Использование ограниченности выражений, входящих в уравнение***
- ***Использование свойств монотонности функций***
- ***Функционально - графический метод***
- ***Метод равносильных преобразований***
- ***Метод возведения обеих частей уравнения в одну и ту же степень***



Пример. Решите уравнение:

$$2x+\sqrt{x}-3=0$$

1 способ.

$$\sqrt{x}=3-2x$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2=(3-2x)^2$$

$$x=9-12x+4x^2$$

$$4x^2-13x+9=0$$

$$x_1=2\frac{1}{4}; \qquad x_2=1.$$

$$Проверка: x_1=2\frac{1}{4}$$

$$2\cdot\frac{9}{4}+\sqrt{\frac{9}{4}}-3=0$$

$$3=0 (неверно)$$

$$x_2=1$$

$$2\cdot 1+\sqrt{1}-3=0$$

$$0=0 (верно)$$

$$Ответ: \boxed{x=1.}$$

2 способ.

$$2x+\sqrt{x}-3=0$$

$$Замена: \sqrt{x}=a$$

$$2a^2+a-3=0$$

$$a_1=1; \qquad a_2=-\frac{3}{2}.$$

$$\sqrt{x}=1 \quad или \quad \sqrt{x}=-\frac{3}{2}$$

$$\boxed{x=1} \qquad к.нет$$

Этот метод называется методом введения новой переменной.
Примеры:

После замены

$$1)\ x+\sqrt{x}=30;$$

$$1)\ a^2+a=30;$$

$$2)\ \sqrt{x}-\frac{20}{\sqrt{x}}=1;$$

$$2)\ a-\frac{20}{a}=1;$$

$$3)\ (5x-1)+\sqrt{5x-1}=12.$$

$$3)\ a^2+a=12.$$

Введение новой переменной

Решение.

- Решить уравнение.

$$x^2+3x-18+4\cdot\sqrt{x^2+3x-6}=0$$

Пусть $\sqrt{x^2+3x-6}=t$, *t* – неотрицательное число,

тогда имеем $t^2-12+4t=0.$

Отсюда, $t_1=2$,

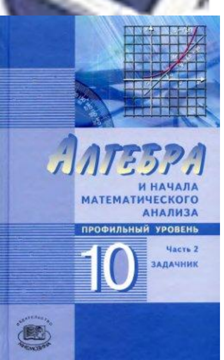
$t_2=-6$,

$t_2=-6$ – посторонний корень.

Выполняем обратную подстановку, получим

$x^2+3x-6=4$

Отсюда, $x_1=-5$, $x_2=2$.



Исследование ОДЗ

- Решить уравнение

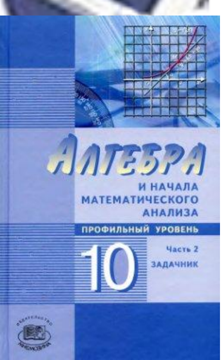
$$3\cdot\sqrt{3x+1}-4\cdot\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x-1}=-\left(2+\sqrt{1-x}\right)$$

Решение.

$$\begin{cases}3x+1\ge 0\\ x-1\ge 0\\ 1-x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge -\dfrac{1}{3}\\ x\ge 1\\ x\le 1\end{cases}$$

Замечаем, что ОДЗ уравнения состоит из одной точки $x=1$.

Проверкой убеждаемся, что $x=1$ – решение уравнения.



Умножение обеих частей уравнения на сопряженный множитель

- Решить уравнение $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5.$

Решение. Умножим обе части уравнения на

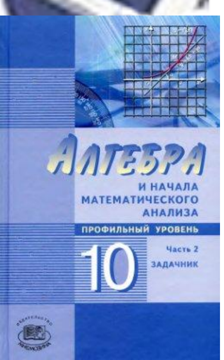
$$\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}\right)$$

Получим, $x+3-x-8=5\cdot\left(\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}\right).$

Имеем, $\begin{cases}\sqrt{x+3}-\sqrt{x+8}=-1,\\ \sqrt{x+3}+\sqrt{x+8}=5.\end{cases}$

Отсюда, $2\cdot\sqrt{x+3}=4,\quad x=1.$

Проверкой убеждаемся, что *x* = 1 является корнем данного уравнения.



Сведение уравнения к системе рациональных уравнений с помощью введения переменной

- Решить уравнение $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3.$

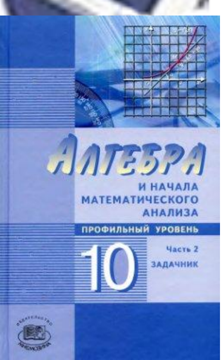
Решение. Положим $u=\sqrt[3]{x-2},\ v=\sqrt{x+1}.$

Тогда $u+v=3$. Так как $u^3=x-2$, $v^2=x+1$, то $v^2-u^3=3$.

Итак, в новых переменных имеем

$$\begin{cases} v+u=3, \\ v^2-u^3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3-u, \\ u^3-u^2+6u-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=2, \\ u=1. \end{cases}$$

Значит, $x=3$.



Выделение полного квадрата

Решение.

- Решить уравнение

$$\sqrt{x+2+2\cdot\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\cdot\sqrt{x+1}}=2.$$

Заметим, что $x+2+2\cdot\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2$

$$x+2-2\cdot\sqrt{x+1}=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2.$$

Следовательно, имеем уравнение

$$\sqrt{\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x+1}-1\right)^2}=2.$$

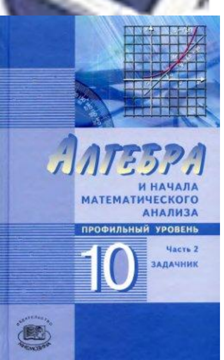
Данное уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\sqrt{x+1}+1+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=2,$$

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}-1\ge 0,\\ 2\cdot\sqrt{x+1}=2\end{cases}$$ или $$\begin{cases}\sqrt{x+1}-1<0,\\ \sqrt{x+1}+1+1-\sqrt{x+1}=2.\end{cases}$$

Ответ: $-1\le x\le 0.$

Решением первой системы будет x=0, решением второй системы – все числа, удовлетворяющие неравенству $-1\le x<0.$



Использование ограниченности выражений, входящих в уравнение

- Решить уравнение $\sqrt{x^2+1}+\sqrt[4]{x^4+1}=2-x^2.$

Решение

Так как $\sqrt{x^2+1}\ge 1$ и $\sqrt[4]{x^4+1}\ge 1$ для любых значений *x*,

то левая часть уравнения не меньше двух для $x\in R$

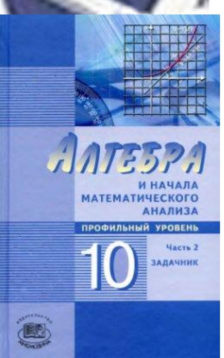
Правая часть $2-x^2\le 2$ для $x\in R.$

Поэтому уравнение может иметь корнями только те значения *x*, при которых

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+\sqrt[4]{x^4+1}=2,\\ 2-x^2=2.\end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, найдем *x=0*.

Это значение удовлетворяет и первому уравнению системы. Итак, *x*=0 – корень уравнения.



Использование свойств монотонности функций

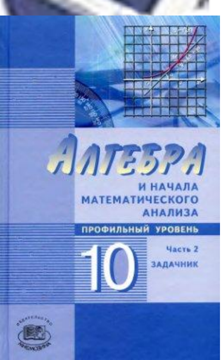
Решение

- Решить уравнение $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt{x+2}=\sqrt[3]{29-x}.$

Если функция *u(x)* монотонна, то уравнение *u(x) = A* либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

Отсюда следует, что уравнение *u(x) = v(x),* где *u(x)* - возрастающая, а *v(x)* – убывающая функции, либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

Подбором находим, что $x=2$ и оно единственно.



Домашнее задание

1. $\sqrt{\left|x^2+14x+47\right|-1}=\left|x+7\right|-1,$

2. $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12,$

3. $\sqrt[3]{5+x}-\sqrt[3]{5-x}=\sqrt[6]{25-x^2}.$

4. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1},$

5. $\sqrt[5]{x-1}+\sqrt{x+2}=3,$

6. $\sqrt[6]{x\sqrt{x^7}}-25\cdot\sqrt[4]{x\sqrt{x}}=54.$

7. $\sqrt{x+\sqrt{x+6}}+\sqrt{x-\sqrt{x+6}}=4$

8. $\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}-2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}}=1$

9. $x\sqrt[3]{x}-4\sqrt[3]{x^2}+4=0$

10. $4x^2+5x\sqrt{x+5}=44(x+5)$

11. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x-5-\sqrt{x+1}}=4$

12. $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}=\frac{x}{2}$

13. $\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{17-x}$

14. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{12(x-1)}$