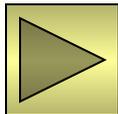


Решение систем уравнений второй степени



Решить систему уравнений – значит найти множество её решений.

А решением системы двух уравнений с двумя переменными является пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Системы уравнений с двумя переменными можно решать

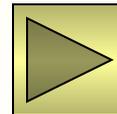
- а) графически;
- б) способом подстановки;
- в) способом сложения.

Выбор способа решения зависит от уравнений, входящих в систему.

Графический способ применим к решению любой системы, но с помощью графиков уравнений можно приближенно находить решения системы. Лишь некоторые найденные решения системы могут оказаться точными. В этом можно убедиться, подставив их координаты в уравнения системы.

Способ подстановки «хорош» при решении систем, когда одно из уравнений является уравнением первой степени.

Способом сложения лучше пользоваться в случае, когда оба уравнения системы есть уравнения второй степени.



Пример1. С помощью графиков решим систему уравнений:

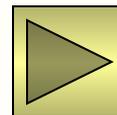
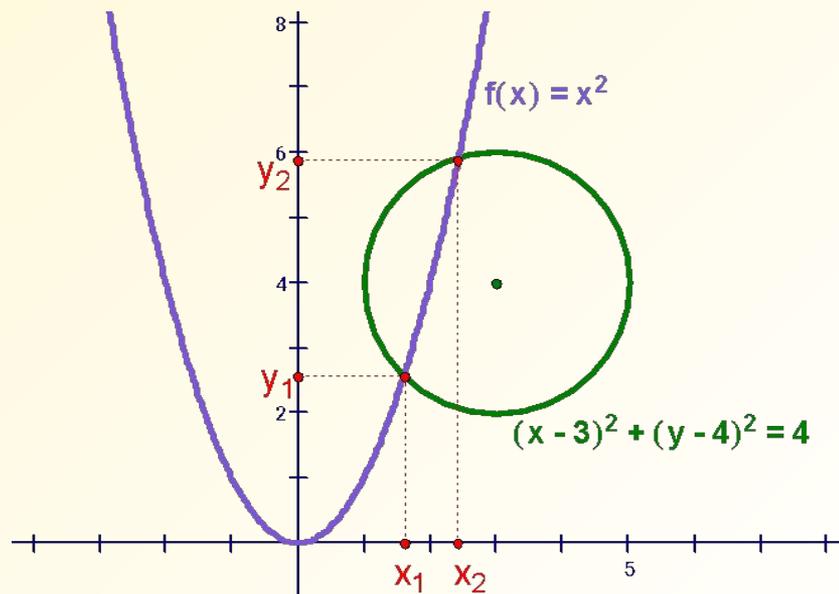
$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ y - x^2 = 0. \end{cases}$$

Решение.

На геометрическом языке решить систему уравнений – значит найти все общие точки графиков уравнений, входящих в систему. Поэтому выясним, что является графиком каждого из уравнений данной системы. Итак, графиком уравнения $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ является окружность радиуса 2 с центром в точке с координатами $(3; 4)$. Графиком уравнения $y - x^2 = 0$ является парабола $y = x^2$, ветви которой направлены вверх, а вершина расположена в точке с координатами $(0; 0)$.

Изобразим графики уравнений в одной системе координат и найдём координаты точек пересечения, это и есть решения системы.

Ответ: $x_1 \approx 1,7, y_1 \approx 2,5;$
 $x_2 \approx 2,4, y_2 \approx 5,9.$



Пример2. Решим систему уравнений способом подстановки:

$$\begin{cases} 0,5x^2 - y = 2, \\ y - x = 2. \end{cases}$$

Решение.

1) Выразим из второго уравнения системы y через x , получим уравнение: $y = x + 2$.

2) В первое уравнение системы вместо y подставим выражение $(x + 2)$, получим уравнение: $0,5x^2 - (x + 2) = 2$, решим его.

$$0,5x^2 - x - 2 = 2,$$

$$0,5x^2 - x - 2 - 2 = 0,$$

$$0,5x^2 - x - 4 = 0.$$

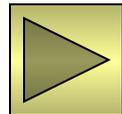
Домножив обе части уравнения на 2 , получим уравнение равносильное предыдущим: $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Используя теорему, обратную Виета, находим корни квадратного уравнения – ими являются числа -2 и 4 .

3) Если $x = -2$, то $y = x + 2 = -2 + 2 = 0$.

Если $x = 4$, то $y = x + 2 = 4 + 2 = 6$.

Ответ: $\{ (-2; 0), (4; 6) \}$



Пример3. Решим систему уравнений способом сложения:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3 = 0, \\ 2x^2 + 3xy - 27 = 0. \end{cases}$$

Решение.

1) Первое уравнение системы умножим на **3**, а второе – на **2**. Получим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6xy - 9 = 0, \\ 4x^2 + 6xy - 54 = 0. \end{cases}$$

2) Сложив уравнения системы, получим уравнение с одной переменной:

$$7x^2 - 63 = 0,$$

$$7x^2 = 63,$$

$$x^2 = 63 : 7,$$

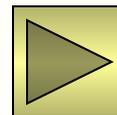
$$x = \pm 3.$$

3) Подставим найденные значения **x** в первое уравнение системы:

если **x = -3**, то $(-3)^2 - 2*(-3)*y - 3 = 0$, отсюда **y = -1**;

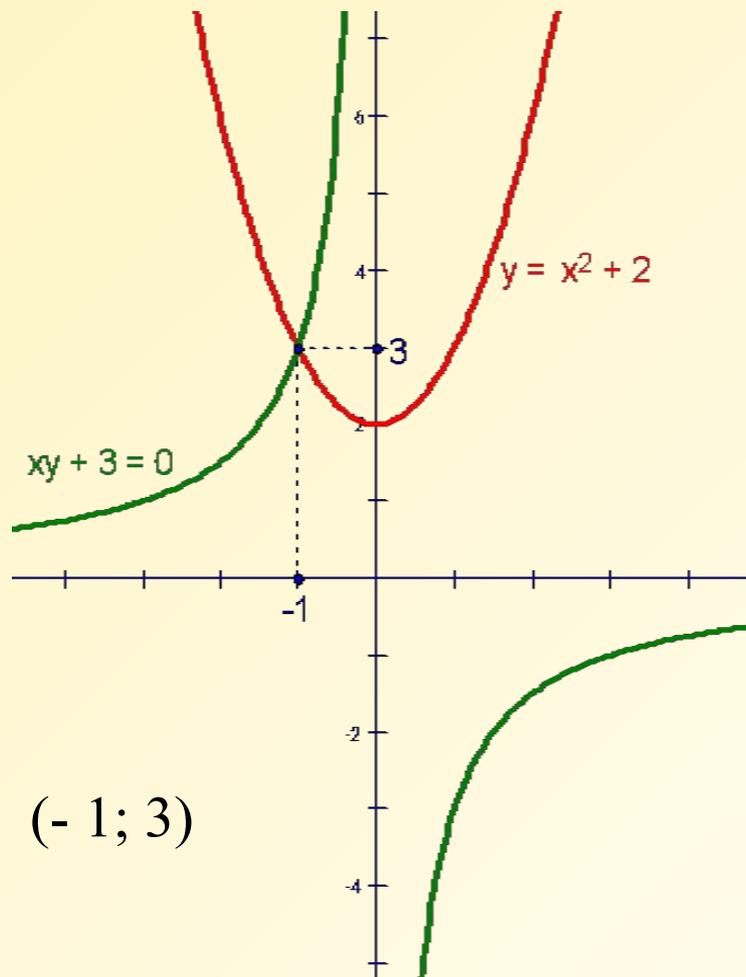
если **x = 3**, то $3^2 - 2*3*y - 3 = 0$, отсюда **y = 1**.

Ответ: $\{ (-3; -1), (3; 1) \}$.



Решите графически системы уравнений:

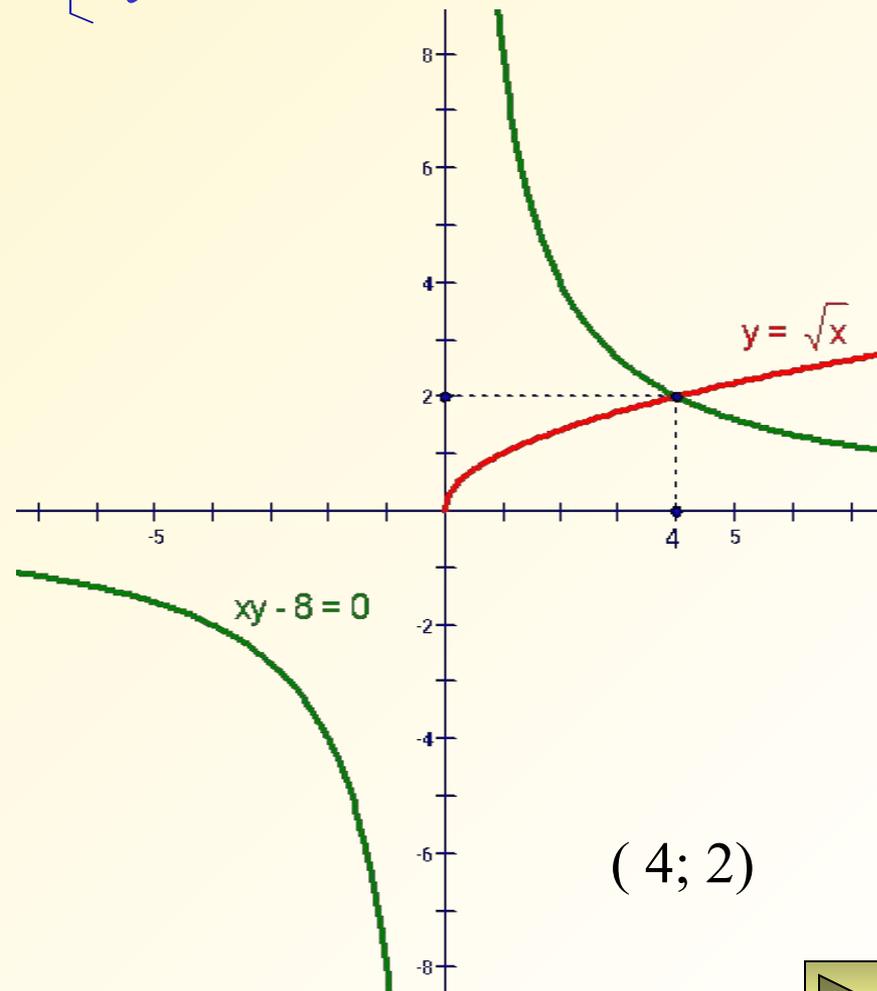
$$1) \begin{cases} xy + 3 = 0, \\ y = x^2 + 2. \end{cases}$$



$(-1; 3)$

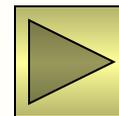
Ответ (по щелчку)

$$2) \begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ xy - 8 = 0. \end{cases}$$



$(4; 2)$

Ответ (по щелчку)



Решите самостоятельно системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 + y^2 = 9 - 2xy; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} xy = -8, \\ (x - 4) * (y - 2) = -12; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x - y = 2, \\ 1/x - 1/y = -2/3. \end{cases}$$

В случае затруднений в ходе решения, загляните в подсказки



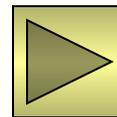
Подсказки

Система 1). Если во втором уравнении системы слагаемое « $-2xy$ » перенести в левую часть, то там получим квадрат суммы $(x + y)^2$. В первом уравнении системы выразим x через y и подставим получившееся выражение во второе преобразованное уравнение; решив его, найдем значения y . Найдя значение y , найдем соответствующие значения x .
Ответ: $\{(2; -5), (5; -2)\}$.

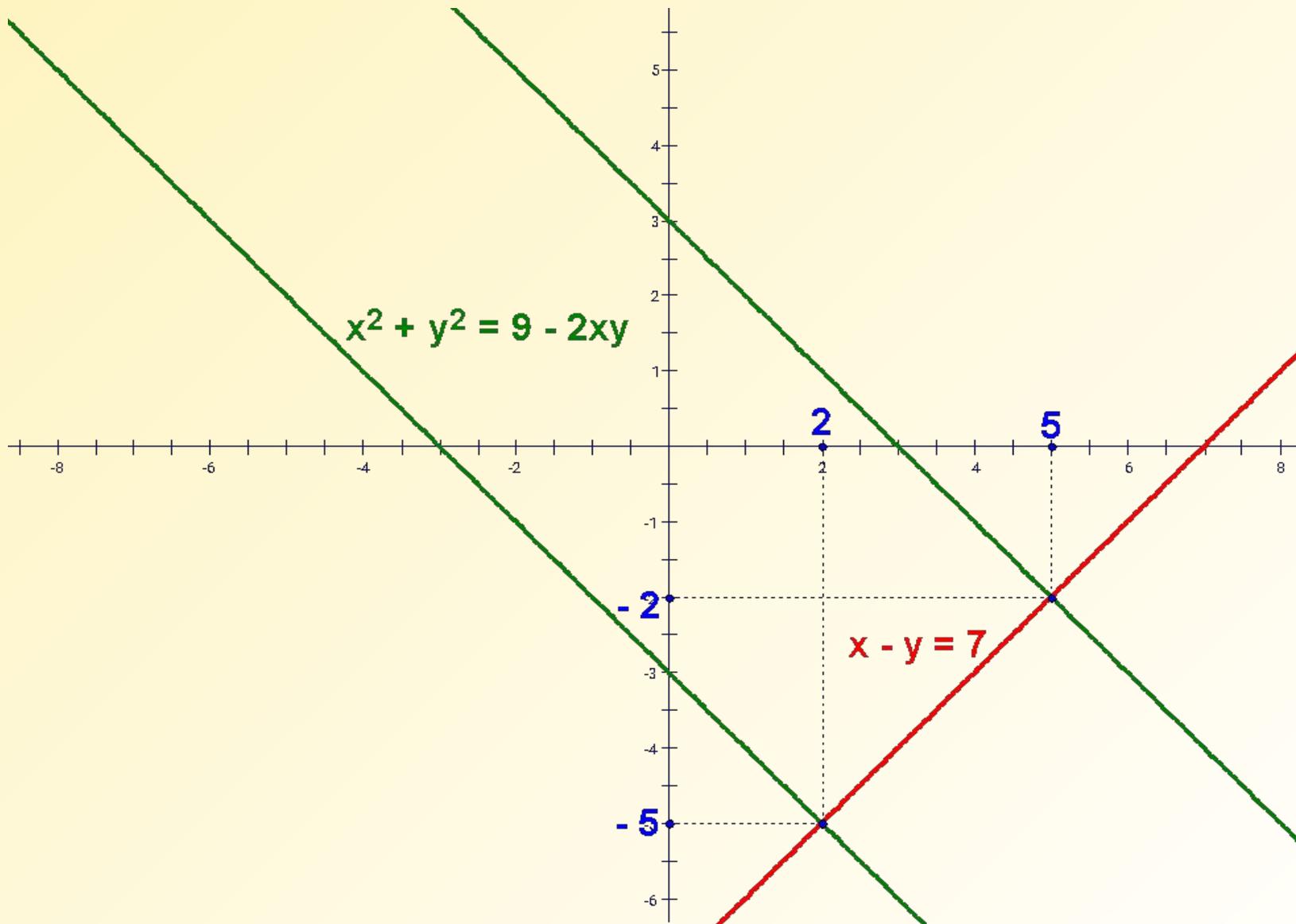
Система 2). Если во втором уравнении системы раскроем скобки, слагаемое « xy » заменим значением « -8 » и приведем подобные слагаемые, а затем разделим обе части уравнения на « 2 », то сможем выразить x через y . Подставив полученное выражение x через y в первое уравнение системы, получим квадратное уравнение относительно y ; решив его, найдем значения y . Найдя значение y , найдем соответствующие значения x .
Ответ: $\{(-2; 4), (8; -1)\}$.

Система 3). Если из первого уравнения системы выразим x через y и подставим во второе уравнение, то получим дробно-рациональное уравнение относительно y ; решив его, найдем значения y . Найдя значение y , найдем соответствующие значения x .
Ответ: $\{(3; 1), (-1; -3)\}$.

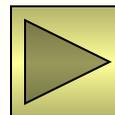
Далее ознакомьтесь с *графическим* способом решения систем



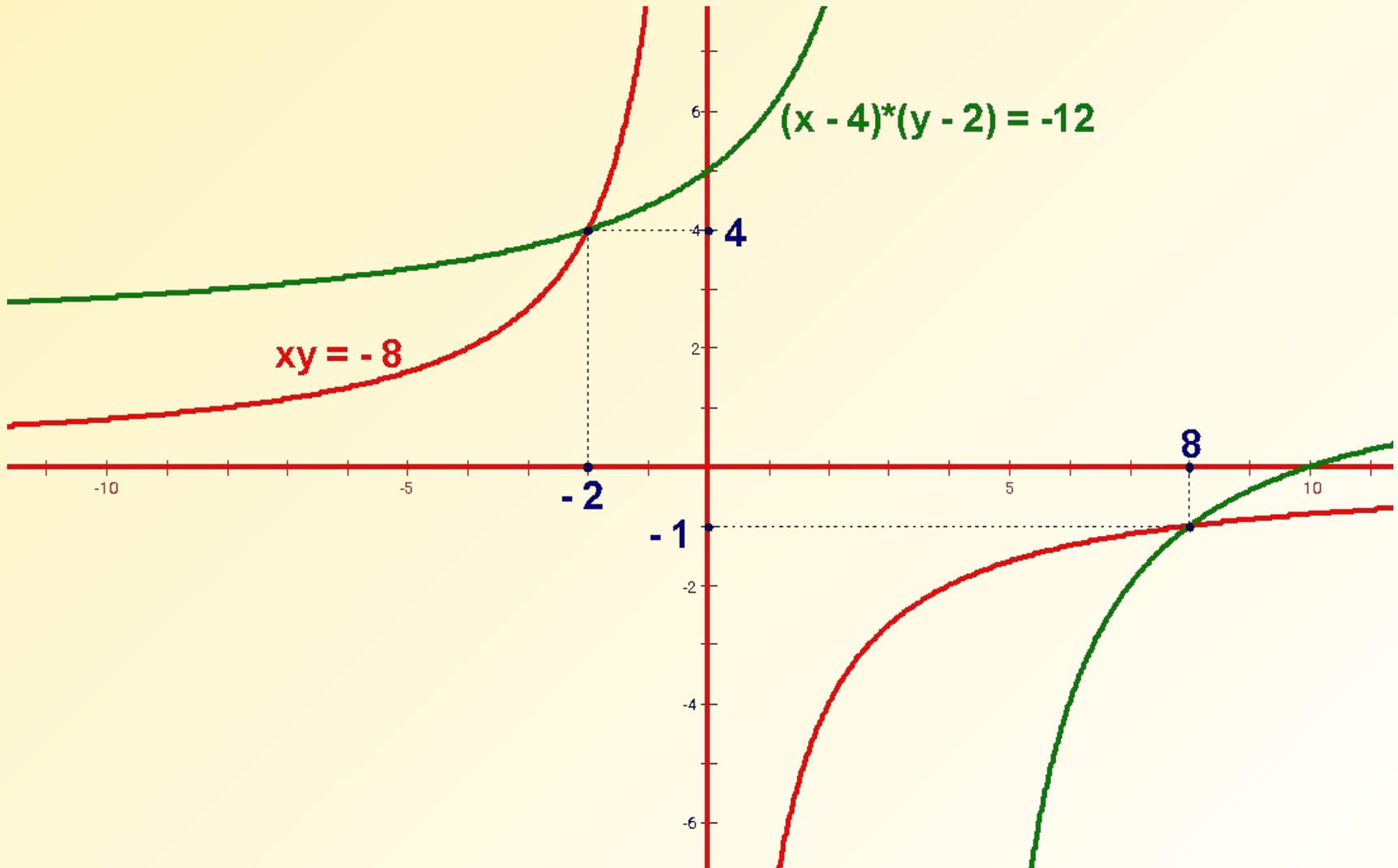
Графический способ решения системы 1).



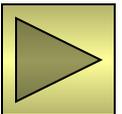
Ответ: $\{ (2; -5), (5; -2) \}$



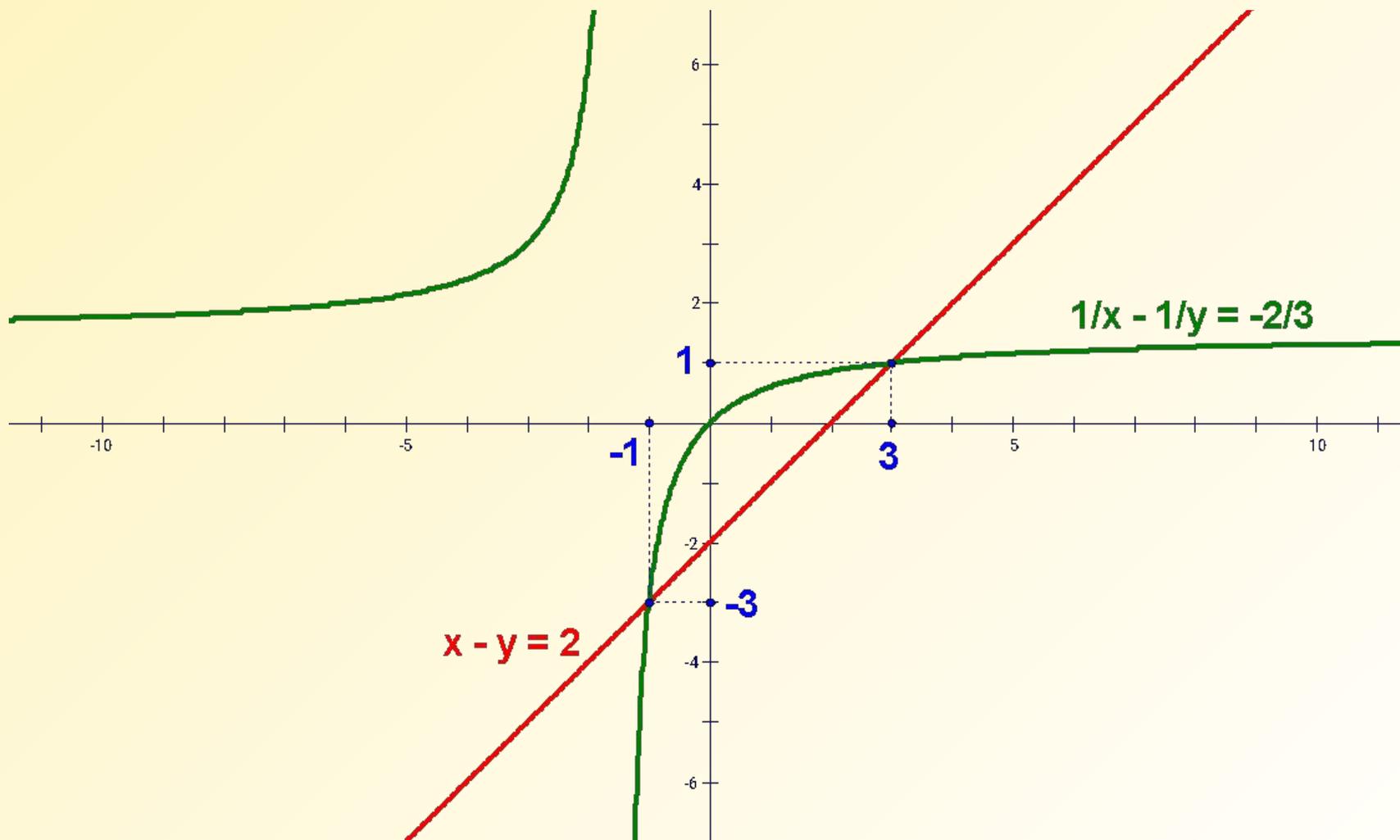
Графический способ решения системы 2).



Ответ: $\{ (-2; 4), (8; -1) \}$



Графический способ решения системы 3).



Ответ: $\{ (3; 1), (-1; -3) \}$

