Логарифмические уравнения и неравенства

Алгебра 10 класс

Т.Н.Оленникова
учитель ГБОУ школы № 413
г. Санкт-Петербург

План урока

- 1. Определение.
- 2. Свойства и формулы логарифмирования.
- 3. Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических уравнений.
- 4. Примеры решения простейших логарифмических уравнений.
- 5. Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических неравенств.
- 6. Примеры решения простейших логарифмических неравенств.

1. Определение.

1. **Логарифмом** положительного числа **b** $(b > 0)$ по основанию **a** $(a > 0,\ a \neq 1)$ называется показатель степени, в которую надо возвести **a**, чтобы получить **b**.

Обозначение : $\log_a b$

2. **Логарифмическим уравнением** (неравенством) называется уравнение (неравенство), в котором переменная находится под знаком логарифма.

Например:

$$1)\ \log_4 \frac{1}{x^2} + \log_4 \sqrt{x} = -3$$

$$2)\ \log_3 (x+2) < 3$$

Примеры

- 1. $\log_3 9 = 2,\ \textit{так как}\ 3^2 = 9$
- 2. $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2},\ \textit{так как}\ 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
- 3. Десятичный логарифм: $\log_{10} b = \lg b$
- 4. Натуральный логарифм:

$$\log_e b = \ln b,\ (e \approx 2{,}7182...)$$

2. Свойства и формулы логарифмирования

$a^{\log_a b} = b$ - **Основное логарифмическое тождество**

- **1.** $\log_a 1 = 0$ **2.** $\log_a a = 1$
- **3.** $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$
- **4.** $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
- **5.** $\log_a x^n = n \log_a x$
- **6.** $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$

3. Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических уравнений.

- **1.** $$\log_a f(x) = b$$

  $$a > 0,\ a \neq 1,\quad f(x) = a^b$$

- **2.** $$\log_a f(x) = \log_a g(x),\qquad a > 0,\ a \neq 1,$$

  $$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

4. Примеры решения простейших логарифмических уравнений.

1) $\log_2(x-5)=3$

Решение

$$\log_2(x-5)=3$$

$$x-5=2^3$$

$$x=13$$

$\text{Ответ}: x=13$

2) $\log_4(x-5)=\log_4(2x-1)$

Решение

$$\log_4 x=\log_4(2x-1)$$

$$\begin{cases} x=2x-1 \\ x\rangle\, 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=1 \\ x\rangle\, 0 \end{cases} \qquad x=1$$

$\text{Ответ}: x=1$

5. Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических неравенств

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

при $a > 0,\ a \neq 1,$

1) *Если* $0 < a < 1$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Знак неравенства меняется и учитывается ОДЗ

2) *Если* $a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Знак неравенства не меняется и учитывается ОДЗ

6. Примеры решения простейших логарифмических неравенств.

$$1)\ \log_5(2x) \rangle \log_5(x-1)$$

$Т.к.\ 5 \rangle 1,$ *то функция* $y = \log_5 t$ – *возрастающая*

и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x \rangle x-1 \\ x-1 \rangle 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \rangle -1 \\ x \rangle 1 \end{cases} \qquad x \rangle 1$$

Ответ: $(1; +\infty)$

Примеры решения простейших логарифмических неравенств. (продолжение)

$$2)\quad \log_{\frac{1}{2}}(2x) \rangle \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$\textit{Т.к.}\ 0 \langle \frac{1}{2} \langle 1,\ \textit{то функция}\ y=\log_{\frac{1}{2}} t - \textit{убывающая}$$

и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x \langle x-1 \\ 2x \rangle 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \langle -1 \\ x \rangle 0 \end{cases} \quad \textit{решений нет}$$

$$\textit{Ответ}: \textit{решений нет}$$