Иррациональные уравнения

Алгебра 10

ГОУ СОШ № 413 Петродворцового района
Санкт-Петербурга
Учитель: Оленникова Т.Н.

План урока

1. Историческая справка
2. Определение иррационального уравнения
3. Уравнения, содержащие корень нечетной степени.
4. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$
5. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$
6. Замена переменных
7. Задания для самостоятельной работы
8. Домножение на сопряженное выражение

Историческая справка

- **Название «радикал» происходит от латинских слов radix – «корень», radicalis -- «коренной». Начиная с XIII в. европейские математики обозначали корень этим словом, или, сокращенно, r.**
- **В 1525г в книге К. Рудольфа «Быстрый и красивый счет при помощи искусных правил алгебры, обычно называемых Косс» появилось обозначение V для знака квадратного корня, корень кубический обозначался там, как ▼▼▼.**

Историческая справка (продолжение)

- В **1626г** голландский математик **А.Жирар** ввел обозначение $\overset{2}{V}, \overset{3}{V}$ и т.д., которое стало быстро вытеснять **знак r**; при этом над подкоренным выражением ставилась **горизонтальная черта.**

  Тогда писали $V\,\overline{x+y}$ вместо $\sqrt{x+y}$ современного.

- Современное обозначение корня впервые появилось в книге **Р. Декарта «Геометрия»**, изданной в **1637г.**

Иррациональные уравнения

- **Иррациональным называется уравнение, в котором переменная входит под знаком корня (радикала).**
- **Например:**

$$x - \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = 3$$

$$\sqrt[4]{4x^3 + 8x^2 - 5x} = 2x - 1$$

$$\sqrt[3]{x - 1} = x - 1$$

$$2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$$

Уравнения, содержащие корень нечетной степени.

- **Решая уравнения, содержащие корень нечетной степени, чтобы «избавиться от радикала», надо возвести обе части уравнения в соответствующую степень.**
- **Примеры. Решить уравнение.**

$$\sqrt[3]{x+3} = 2$$

Возведём обе части в куб, получим

$$x + 3 = 8, \qquad x = 5$$

Ответ: $x = 5$

Уравнения, содержащие корень нечетной степени (продолжение)

Решить уравнение: $\sqrt[3]{x-1} = x - 1$

Возведём обе части в куб, получим:

$$x - 1 = (x-1)^3$$

$$(x-1)^3 - (x-1) = 0$$

$$(x-1)((x-1)^2 - 1) = 0$$

$$(x-1)(x-2)x = 0$$

$$x = 1,\ \ x = 2,\ \ x = 0$$

Ответ: 0, 1, 2

I. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$

- В ОДЗ левая часть уравнения всегда неотрицательна – поэтому решение может существовать только тогда, когда $g(x) \geq 0$.
- В этом случае обе части уравнения неотрицательны, возведение в квадрат даёт равносильное в ОДЗ уравнение. Мы получаем, что

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \qquad (*)$$

ПРИМЕРЫ

1) Решить уравнение $x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3$

Воспользуемся условием равносильности (*):

$$x-\sqrt{2x^2-9x+5}=3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-9x+5}=x-3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-9x+5=x^2-6x+9 \\ x-3\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x-4=0 \\ x\geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=4$$

$$Ответ:\ x=4$$

ПРИМЕРЫ

2) Решить уравнение $\sqrt{4x^3+8x^2-5x}=2x-1$

Воспользуемся условием равносильности (*):

$$\sqrt{4x^3+8x^2-5x}=2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3+8x^2-5x=(2x-1)^2 \\ 2x-1\geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3+4x^2-x-1=0 \\ 2x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(4x^2-1)=0 \\ x\geq 0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\pm 0,5 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ x\geq 0,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=0,5$$

Ответ: $x = 0,5$

II. Уравнения вида $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$

- **В ОДЗ обе части неотрицательны и при возведении в квадрат дает равносильное уравнение**

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x) \\ g(x)\geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

- **При таком способе решения достаточно проверить неотрицательность одной из функций – можно выбрать более простую.**

ПРИМЕРЫ

1) Решить уравнение $\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{2x^3-4x^2+x-1}$

- **Воспользуемся условием равносильности (1):**

$$\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{2x^3-4x^2+x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\geq 0 \\ x^2+x-1=2x^3-4x^2+x-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\geq 0 \\ 2x^3-5x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=2,5 \\ x=0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \quad x=2,5$$

***Ответ:* $x=2,5$**

2) Найдите произведение корней уравнения

$$\sqrt{x^3+x^2-3x+2}=\sqrt{8+2x-x^2}$$

- **Воспользуемся условием равносильности (1):**

$$\sqrt{x^3+x^2-3x+2}=\sqrt{8+2x-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 8+2x-x^2\ge 0 \\ x^3+x^2-3x+2=8+2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-2x-8\le 0 \\ x^3+2x^2-5x-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4)\le 0 \\ (x+1)(x^2+x-6)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-4)\le 0 \\ (x+1)(x+3)(x-2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Ответ: Произведение корней равно - 2

III. Замена переменных.

Решить уравнение 1. $\frac{3}{1+\sqrt{x+1}} + 2\sqrt{x+1} = 5$

- Пусть $\sqrt{x+1} = t \geq 0\ (*)$

  получим уравнение $\frac{3}{1+t} + 2t = 5$

$3 + 2t^2 + 2t = 5t + 5, \quad 2t^2 - 3t - 2 = 0,$

$t = 2, \ t = -0{,}5$

Значит $\sqrt{x+1} = 2, \ x = 2^2 - 1 = 3$

$\sqrt{x+1} = -0{,}5$, решений нет.

Ответ: x = 3.

Замена переменных

Решить уравнение 2. $\sqrt{x+3-\sqrt{x+1}}-1=\sqrt{x-4+\sqrt{x+1}}$

- **Замена:** $\sqrt{x+1}=t\geq 0\,(*)$ **, тогда** $x=t^2-1$

$\sqrt{t^2-1+3-t}-1=\sqrt{t^2-1-4+t}$ **, т.е.** $\sqrt{t^2-t+2}=\sqrt{t^2+t-5}+1$

Обе части неотрицательны, возведём в квадрат и получим равносильное уравнение

$$t^2-t+2=t^2+t-5+2\sqrt{t^2+t-5}+1$$

$$6-2t=2\sqrt{t^2+t-5}\quad |:2$$

$3-t=\sqrt{t^2+t-5},\quad 3-t\geq 0$ **и учитывая (*):** $0\leq t\leq 3$

$$9-6t+t^2=t^2+t-5,\quad t=2$$

$$\sqrt{x+1}=2,\quad x+1=4,\quad x=3$$

Ответ: $x=3$

Решить самостоятельно уравнения

- 1. $\sqrt[3]{x(x+2)} = x$
- 2. $\sqrt{3x-2} = 4-x$
- 3. $\sqrt[6]{4-4x-x^2} = 2$
- 4. $\sqrt{x^2-4x} = \sqrt{6-3x}$
- 5. $\sqrt{3x+1} = x-1$
- 6. $2\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = 1$
- 7. $\sqrt{x} + \sqrt{x-3} = 3$

Ответы:
- 1, 0, 2
2
- 6, 10
- 2
5
1
4

Решить самостоятельно уравнения

- **8.** $\sqrt{2x^2-4x-1}-\sqrt{x^2-2x-1}=1$

  Замена : $\sqrt{x^2-2x-1}=t\geq 0\ (*)$

  тогда $2x^2-4x=2t^2+2$

  Ответ : $x=1\pm\sqrt{2},\qquad x=1\pm\sqrt{6}$

- **9.** $\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{4}{3}$

  Замена : $x=\sin\alpha,\ где\ -\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

  тогда $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}=-\dfrac{4}{3}$

  Ответ: $x=\dfrac{1-\sqrt{7}}{4}$

Домножение на сопряженное выражение

- Решить уравнение

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}+1}=\sqrt{x+10}-4 \quad (1)$$

ОДЗ: $x \geq -1$

а) $\sqrt{x+1}-1=0$

$$\sqrt{x+1}=1$$

x = 0 - не является корнем иск. ур-я (1)

Домножение на сопряженное выражение (продолжение)

б) Домножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{x+1}-1$, получим

$$\frac{x\left(\sqrt{x+1}-1\right)}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}=\sqrt{x+10}-4$$

$$\sqrt{x+1}-1=\sqrt{x+10}-4$$

$$\sqrt{x+1}+3=\sqrt{x+10}$$

Обе части неотрицательны, возведём в квадрат и получим равносильное уравнение

$$x+1+9+6\sqrt{x+1}=x+10 \qquad 6\sqrt{x+1}=0 \qquad x=-1$$

Ответ: $x=-1$