

РАЗДЕЛ 6

«ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ»

1.1 ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если в каждой точке этого промежутка

$$F'(x) = f(x) \quad (1.1)$$

или, что тоже,

$$dF(x) = f(x)dx \quad (1.2)$$

Например, $F(x) = \sin x$ является первообразной для $f(x) = \cos x$ на всей числовой оси Ox , так как

$$(\sin x)' = \cos x$$

Теорема 1.1 Если функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$, то всякая другая первообразная для $f(x)$ отличается от $F(x)$ на постоянное слагаемое, то есть может быть представлена в виде $F(x)+C$, где C постоянная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 Если $F(x)$ одна из первообразных для функции $f(x)$ на $[a; b]$, то выражение $F(x) + C$, где C произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$ (читается: неопределенный интеграл от $f(x)$ на dx). Итак,

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (1.3)$$

где $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ - подынтегральным выражением, x - переменной интегрирования, а символ \int - знаком неопределенного интеграла.

Отыскание всех первообразных или отыскание неопределенного интеграла для данной функции $f(x)$ называют интегрированием этой функции.

1.2 ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

1^0 Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x). \quad (1.4)$$

Действительно, $F'(x) = f(x)$ и согласно (1.3) $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

2⁰ Дифференциал от неопределенного интеграла равен
подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \quad (1.5)$$

Действительно, $d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x) + C) = f(x)dx$.

3⁰ Неопределенный интеграл от производной равен самой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C. \quad (1.6)$$

Действительно, $F'(x) = f(x)$. Тогда, $\int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C$ согласно определения 1.2.

4⁰ Неопределенный интеграл от дифференциала равен дифференцируемой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int dF(x) = F(x) + C. \quad (1.7)$$

Действительно, $dF(x) = f(x)dx$. Тогда, $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.

5⁰ Постоянный множитель k ($k \neq 0$) можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx. \quad (1.8)$$

6⁰ Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функции равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\begin{aligned} \int [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)] dx &= \\ &= \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx + \dots + \int f_k(x) dx \end{aligned} \tag{1.9}$$

1.3 ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$$1 \int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \in R, \alpha \neq -1 \quad (1.10)$$

$$2 \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (1.11)$$

$$3 \int dx = x + C \quad (1.12)$$

$$4 \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1 \quad (1.13)$$

$$5 \int e^x dx = e^x + C \quad (1.14)$$

$$6 \int \sin x dx = -\cos x + C \quad (1.15)$$

$$7 \int \cos x dx = \sin x + C \quad (1.16)$$

$$8 \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (1.17)$$

$$9 \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad (1.18)$$

$$10 \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \quad (1.19)$$

$$11 \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad a \neq 0 \quad (1.20)$$

$$12 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \quad (1.21)$$

$$13 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C, \quad a \neq 0 \quad (1.22)$$

$$14 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \quad a \neq 0 \quad (1.23)$$

$$15 \int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C \quad (1.24)$$

$$16 \int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C \quad (1.25)$$

$$17 \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C \quad (1.26)$$

$$18 \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C \quad (1.27)$$

$$19 \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (1.28)$$

$$20 \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C \quad (1.29)$$

Например, для формулы (1.22) имеем

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ \left(\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C \right)' &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}} \right) = \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + a^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{aligned}$$

Из равенства производных и следует справедливость равенства (1.22).

1.4 ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1.4.1 Интегрирование методом разложения

Пример 1.1 Найти $\int \frac{x^3 + 5x - 2}{x} dx$.

Решение.

Разделив почленно числитель на знаменатель в подынтегральной функции, получим $\frac{x^3 + 5x - 2}{x} = x^2 + 5 - \frac{2}{x}$; тогда, согласно (1.8) и (1.9) имеем

$$\int \frac{x^3 + 5x - 2}{x} dx = \int x^2 dx + \int 5 dx - \int \frac{2}{x} dx = \frac{x^3}{3} + 5x - 2 \ln|x| + C$$

Пример 1.2 Найти $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx + \\ &+ \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C \end{aligned}$$

Пример 1.3 Найти $\int \frac{dx}{x^2(9+x^2)}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2(9+x^2)} &= \frac{1}{9} \int \frac{9dx}{x^2(9+x^2)} = \frac{1}{9} \int \frac{9+x^2-x^2}{x^2(9+x^2)} dx = \frac{1}{9} \int \frac{9+x^2}{x^2(9+x^2)} dx - \\ &-\frac{1}{9} \int \frac{x^2}{x^2(9+x^2)} dx = \frac{1}{9} \int \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{9} \int \frac{dx}{9+x^2} = -\frac{1}{9x} - \frac{1}{27} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C \end{aligned}$$

Пример 1.4 Найти $\int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{(1 + \sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{1 + 3\sqrt{x} + 3x + x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{7}{6}} \right) dx = \\ &= \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + \frac{18}{7} x^{\frac{7}{6}} + \frac{9}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{6}{13} x^{\frac{13}{6}} + C \end{aligned}$$

При вычислении интегралов от тригонометрических функций используются тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1, \quad \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1,$$
$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)],$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)],$$

$$\sin^3 x = \sin^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x) \sin x = \sin x - \cos^2 x \sin x,$$

$$1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}, \quad 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \text{ и другие.}$$

$$1) \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \operatorname{tg} x -$$

интеграл 8

$$- \int dx = \operatorname{tg} x - x + C$$

интеграл 1

$$2) \int \frac{dx}{1 - \cos 2x} = \int \frac{dx}{2 \sin^2 x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg} x + C$$

интеграл 9

$$3) \int (\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x) \, dx = \int \frac{\pi}{2} \, dx = \frac{\pi}{2} \int dx = \frac{\pi}{2} x + C$$

$$4) \int 5 \cos^2 \frac{x}{2} \, dx = \frac{5}{2} \int (1 + \cos x) \, dx = \frac{5}{2} (\int dx + \int \cos x \, dx) = \frac{5}{2} (x + \sin x) + C$$

$$5) \int \frac{\cos 9x + \cos 7x}{\cos 8x} \, dx = \int \frac{2 \cos \frac{9x+7x}{2} \cdot \cos \frac{9x-7x}{2}}{\cos 8x} \, dx =$$

$$= 2 \int \frac{\cos 8x \cdot \cos x}{\cos 8x} \, dx = 2 \int \cos x \, dx = 2 \sin x + C$$

$$6) \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \, dx = \int \frac{dx}{\sin x} - \int \sin x \, dx = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \cos x + C$$

$$1) \int \frac{dx}{10 + x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{10})^2 + x^2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{10}} + C$$

интеграл 10

$$2) \int \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{5})^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

интеграл 12

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{3 - 2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + C$$

$$4) \int \frac{dx}{9 - x^2} = \int \frac{dx}{3^2 - x^2} = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x + 3}{x - 3} \right| + C$$

интеграл 11

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 16}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 16} \right| + C$$

Метод введения функции под знак дифференциала

Из дифференциального исчисления известно, что дифференциал функции $f(x)$ вычисляется по формуле $d[f(x)] = f'(x) dx$. Использование этой формулы в обратном порядке

$$f'(x) dx = d[f(x)]$$

называется *введением функции под знак дифференциала*. Таким образом, для известных функций справедливы следующие формулы:

$$dx = d(x \pm C), \quad dx = \frac{1}{a} d(a \cdot x + b), \text{ где } a, b, c = \text{Const},$$

$$e^x dx = d(e^x), \quad a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x), \quad \sin x dx = -d(\cos x)$$

$$\cos x dx = d(\sin x), \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x), \quad \frac{dx}{\sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$$

$$\frac{dx}{x} = d(\ln x), \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x), \quad \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -d(\arccos x)$$

$$\int (x+3)^5 dx = \left| \begin{array}{l} n = 5 \\ dx = d(x+3) \end{array} \right| = \int (x+3)^5 d(x+3) = \frac{(x+3)^{5+1}}{5+1} + C =$$

$$= \frac{(x+3)^6}{6} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \int (x-3)^{-1/2} dx = \int (x-3)^{-1/2} d(x-3) = 2 \cdot (x-3)^{1/2} + C =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{x-3} + C$$

$$\int \frac{2x+5}{(x^2+5x+3)^2} dx = \int \underbrace{(x^2+5x+3)}_u^{-2} \cdot \underbrace{(2x+5)}_{du} dx =$$

$$= \int \underbrace{(x^2+5x+3)}_u^{-2} \cdot \underbrace{d(x^2+5x+3)}_u = \frac{(x^2+5x+3)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x^2+5x+3} + C.$$

$$\int \frac{dx}{(5x-2)^2} = \int (5x-2)^{-2} dx = \frac{1}{5} \cdot \int (5x-2)^{-2} 5 dx = \left| dx = \frac{1}{5} \cdot 5 dx = \frac{1}{5} d(5x-2) \right| =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \int \underbrace{(5x-2)}_u^{-2} \underbrace{d(5x-2)}_{du} = \frac{1}{5} \cdot \frac{(5x-2)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{5 \cdot (5x-2)} + C$$

$$\int \sin^2 x \cdot \underbrace{\cos x}_{d(\sin x)} dx = \int \underbrace{\sin^2 x}_{u^2} \cdot \underbrace{d(\sin x)}_{du} = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Пример 2.6 Применяя формулу, найти следующие интегралы:

Решение.

$$1). \quad \int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \ln|x+1| + C.$$

$$2). \quad \int \frac{2x dx}{x^2+1} = \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \ln(x^2+1) + C.$$

$$3). \quad \int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) + C.$$

$$4). \quad \int \frac{4x^2}{8x^3+19} dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{6 \cdot 4x^2}{8x^3+19} dx = \frac{1}{6} \cdot \int \frac{d(8x^3+19)}{8x^3+19} = \frac{1}{6} \cdot \ln|8x^3+19|$$

$$5). \quad \int \frac{\sin x}{1+\cos x} dx = \int \frac{-d(\cos x+1)}{1+\cos x} = -\ln(1+\cos x) + C.$$

$$6). \quad \int \frac{e^x dx}{5+e^x} = \int \frac{d(e^x+5)}{e^x+5} = \ln(e^x+5) + C.$$

Пример 2.7 Применяя формулу, найти следующие интегралы:

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

Решение.

1).
$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C.$$

2).
$$\int 3^{2x} dx = \left| \begin{array}{l} \text{представим } dx \text{ в виде} \\ dx = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot d(2x) \end{array} \right| = \frac{1}{2} \cdot \int 3^{\overset{u}{2x}} d(\overset{u}{2x}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2x}}{\ln 3} + C.$$

3).
$$\int 2^{5x+4} dx = \left| \begin{array}{l} \text{представим } dx \text{ в виде} \\ dx = \frac{1}{5} \cdot 5 \cdot dx = \frac{1}{5} \cdot d(5x+4) \end{array} \right| = \frac{1}{5} \cdot \int 2^{\overset{u}{5x+4}} \cdot d(\overset{u}{5x+4}) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{5x+4}}{\ln 2} + C.$$

4).
$$\int e^{\overset{u}{\sin x}} \cdot \underset{d(\sin x)}{\overset{u}{\cos x}} dx = \int e^{\overset{u}{\sin x}} \cdot d(\overset{u}{\sin x}) = e^{\sin x} + C.$$

5).
$$\int \frac{e^{\overset{u}{\operatorname{tg} x}} dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = \left| \frac{dx}{\operatorname{Cos}^2 x} = d(\operatorname{tg} x) \right| = \int e^{\overset{u}{\operatorname{tg} x}} \cdot d(\overset{u}{\operatorname{tg} x}) = e^{\operatorname{tg} x} + C.$$

Рассмотрим примеры на внесение функции под знак дифференциала с использованием других табличных интегралов.

Пример 2.8 Найти интегралы:

Решение.

1).

$$\int \frac{dx}{(1+x^2) \cdot \arctg x} = \left| \frac{dx}{1+x^2} = d(\arctg x) \right| = \int \frac{d(\arctg x)}{\arctg x} = \ln |\arctg x| + C$$

2).

$$\int \frac{\arcsin^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) \right| = \int (\arcsin x)^2 \cdot d(\arcsin x) = \frac{\arcsin^3 x}{3} + C.$$

3).

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \cdot \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cdot 2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} =$$

умножили и разделили знаменатель

$$= \left| \text{на } \cos \frac{x}{2}, \frac{dx}{2 \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} = d(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) \right| = \int \frac{d(\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$$

4).

$$\int \sin 5x dx = \left| dx = \frac{1}{5} \cdot 5 dx = \frac{1}{5} d(5x) \right| = \frac{1}{5} \cdot \int \sin \frac{5x}{5} d\left(\frac{5x}{5}\right) = -\frac{1}{5} \cos 5x + C$$

5).

$$\int \cos(3x-7) dx = \left| dx = \frac{1}{3} \cdot 3 dx = \frac{1}{3} d(3x-7) \right| = \frac{1}{3} \cdot \int \cos \frac{(3x-7)}{3} d\left(\frac{3x-7}{3}\right) = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x-7) + C.$$

$$1). \int \operatorname{tg} 2x \, dx = \int \frac{\sin 2x \, dx}{\cos 2x} = -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{d(\cos 2x)}{\cos 2x} = -\frac{1}{2} \cdot \ln |\cos 2x| + C.$$

$$2). \int \frac{2x \, dx}{9 + x^4} = \int \frac{\overset{u}{d(x^2)}}{3^2 + (\overset{u}{x^2})^2} = \left| \int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C \right| = \frac{1}{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^2}{3} +$$

$$3). \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \left| x \, dx = -\frac{1}{2} d(1 - x^2) \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{\overset{u}{d(1 - x^2)}}{\overset{u}{\sqrt{1 - x^2}}} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 - x^2} + C = -\sqrt{1 - x^2} + C.$$