Целое уравнение и его корни

Линейное уравнение

$$ax + b = 0$$

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Целое уравнение?

Целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая и правая части которого — целые выражения.

$$\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{1}{2}x = -4$$

$$x^3 - x^2 + \frac{1}{x} = 2 - 7x^4$$

$$\frac{x^8}{3 - x} = x^6 + 12x(x^4 - 7)$$

$$(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 10$$

$$\frac{x + 5}{x^2} - x^9 = 1 - x$$

$$x^2(x^2 - 2) = 8$$

$$\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{1}{2}x = -4$$

$$(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 10$$

$$x^2(x^2 - 2) = 8$$

$$x^3 - 8x^2 - x = -8$$

$$x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$$

$$(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 10$$

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 2x - 2 = 10$$

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x^3 + 4x^2 + 4x - x^2 - 2x - 2 - 10 = 0$$

$$x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 12 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{1}{2}x = -4$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0}$$

$$(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 10$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 12 = 0}$$

$$x^2(x^2 - 2) = 8$$

$$x^4 - 2x^2 = 8$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{x^4 - 2x^2 - 8 = 0}$$

$$\boxed{P(x) = 0}$$

$P(x)$ – многочлен стандартного вида

Степень многочлена $P(x)$ называют степенью уравнения $P(x) = 0$.

Определить степень уравнений:

1) $x^8 + \frac{1}{2}x^3 + 9 = 0$

Ответ: 8.

2) $0{,}3x^7 + 1 = 0$

Ответ: 7.

3) $x^5 + x^8(x^3 - 2) = 0$

$x^5 + x^{11} - 2x^8 = 0$

$x^{11} - 2x^8 + x^5 = 0$

Ответ: 11.

4) $(x^3 - 2)(x^3 + 2) = 0$

$x^6 - 4 = 0$

Ответ: 6.

Степень уравнения		Количество корней
…		

$$a \neq 0$$

Решить уравнение $\frac{1}{2}x^3 - 4x^2 - \frac{1}{2}x = -4.$

$x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0$

$x^2(x - 8) - (x - 8) = 0$

$(x - 8)(x^2 - 1) = 0$

$(x - 8)(x - 1)(x + 1) = 0$

$x - 8 = 0 \qquad x - 1 = 0 \qquad x + 1 = 0$

$x = 8 \qquad x = 1 \qquad x = -1$

Ответ: $8, 1, -1$.

Решить уравнение $(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 10$.

$(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 10$

$\underline{x^2 + 2x = y}$

$(y - 1)(y + 2) = 10$

$y^2 + y - 12 = 0$

$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12) = 49 > 0$

По т. Виета: $\begin{cases} y_1 + y_2 = -1, \\ y_1 \cdot y_2 = -12. \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 = -4, \\ y_2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = -4, \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases}$

$x^2 + 2x = -4$

$x^2 + 2x + 4 = 0$

$(x + 2)^2 = 0$

$x = -2$

$x^2 + 2x = 3$

$x^2 + 2x - 3 = 0$

$D = 16 > 0$

$x_1 = -3 \quad x_2 = 1$

Ответ: $-2, -3, 1$.

Биквадратное уравнение

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$$

$$a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$$

1. Ввести новую переменную $x^2 = y$.
2. Решить уравнения $ay^2 + by + c = 0$.
3. Выполнить обратную подстановку $y = x^2$.
4. Найти корни биквадратного уравнения.

Решить уравнение $x^2(x^2-2)=8$.

$x^4-2x^2-8=0$

$x^2=y \Rightarrow x^4=(x^2)^2=y^2$

$y^2-2y-8=0$

$D=36>0$

По т. Виета $\begin{cases} y_1+y_2=2, \\ y_1\cdot y_2=-8 \end{cases}$

$\begin{cases} y_1=4, \\ y_2=-2 \end{cases}$

Ответ: $2,-2$.

$\begin{cases} x^2=4, \\ x^2=-2 \end{cases}$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

$x^2=-2$

нет корней

Целым уравнением с одной переменной называется уравнение, левая и правая части которого — целые выражения.

Способы решения целых уравнений

- разложение многочлена на множители
- введение новой переменной

Биквадратное уравнение

$$\boxed{ax^4 + bx^2 + c = 0}$$

1. Ввести новую переменную $\boldsymbol{x^2 = y}$.
2. Решить уравнения $\boldsymbol{ay^2 + by + c = 0}$.
3. Выполнить обратную подстановку $\boldsymbol{y = x^2}$.
4. Найти корни биквадратного уравнения.