

Функции $y = \sqrt[n]{x}$, их свойства и графики

Повторим:

Корнем n -ой степени из неотрицательного числа a ($n = 2, 3, 4, 5, \dots$) называют такое **неотрицательное** число, при возведении которого в степень n получается a .

Корнем нечетной степени n из отрицательного числа a ($n = 3, 5, 7, \dots$) называют такое **отрицательное** число, при возведении которого в степень n получается a .

$$\sqrt[n]{a}$$

a – подкоренное число, n – показатель корня

$[0; +\infty)$ $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$

$y = \sqrt[n]{x}$ - обратная для функции $y = x^n$

1. $D(y) = [0; +\infty)$

2. $E(y) = [0; +\infty)$

3. функция ни четная, ни нечетная

4. функция возрастает на $[0; +\infty)$

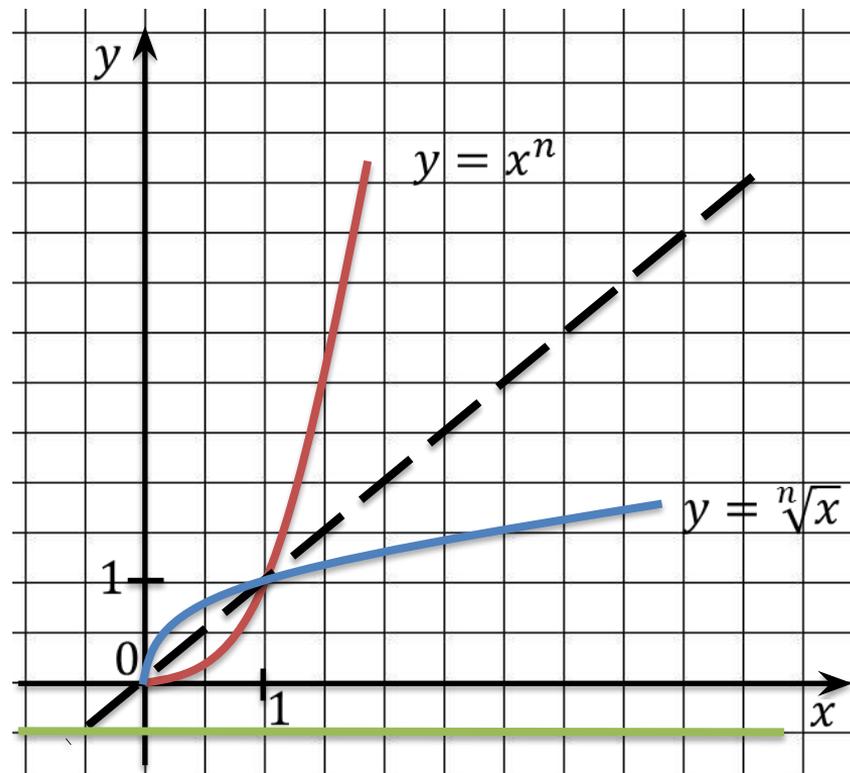
5. функция не ограничена сверху, но ограничена снизу

6. $y_{\text{наим}} = 0$

7. функция непрерывна на $[0; +\infty)$

8. функция выпукла вверх на $[0; +\infty)$

9. функция дифференцируема на $(0; +\infty)$
 $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$



Пример:

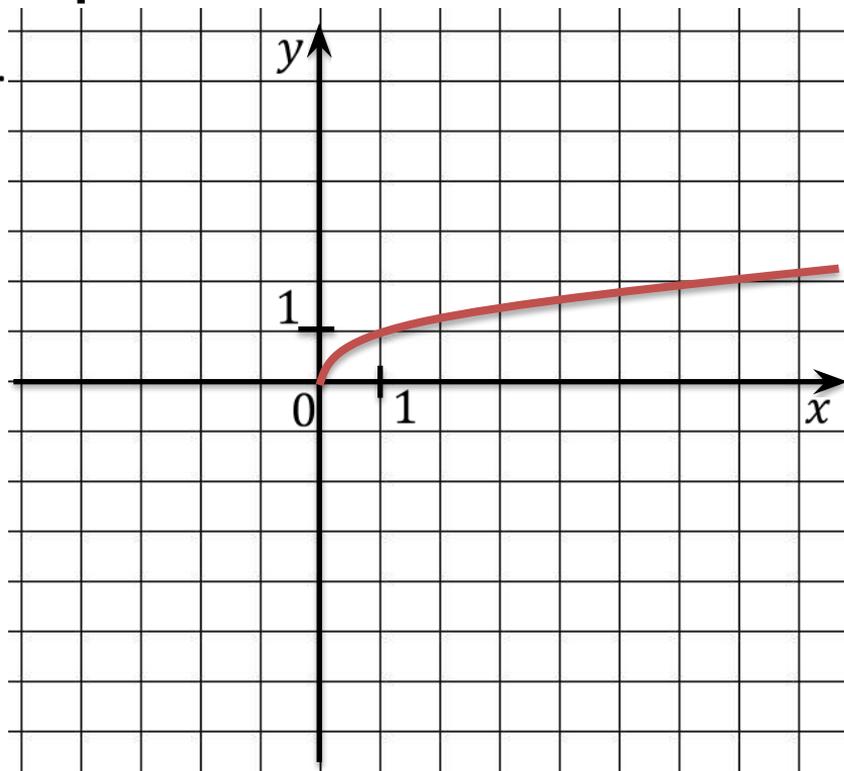
Построить график функции $y = \sqrt[4]{x+1} - 4$.

Решение:

1. $y = \sqrt[4]{x}$

2. $y = \sqrt[4]{x+1}$

3. $y = \sqrt[4]{x+1} - 4$



Пример:

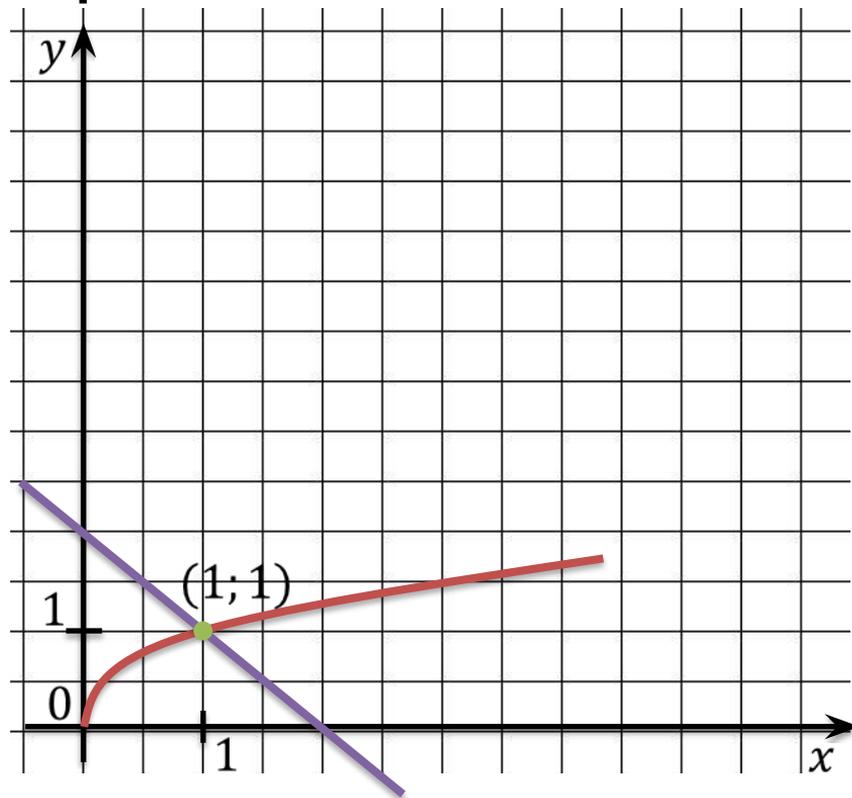
Решить уравнение $\sqrt[6]{x} = 2 - x$.

Решение:

$$y = \sqrt[6]{x} \text{ при } x = 1: y = \sqrt[6]{1} = 1$$

$$y = 2 - x \text{ при } x = 1: y = 2 - 1 = 1$$

Ответ: $x = 1$.



$y = \sqrt[n]{x}$, n – нечетное

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$

2. $E(y) = (-\infty; +\infty)$

3. функция нечетная $\sqrt[n]{x} = -f(x)$

4. функция возрастает на $(-\infty; +\infty)$

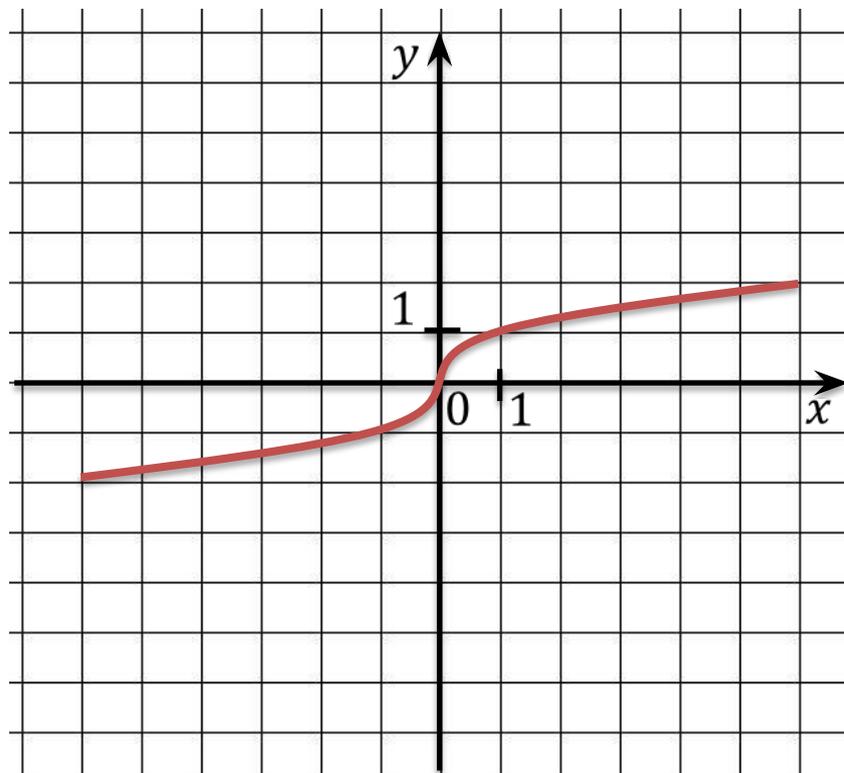
5. функция не ограничена ни сверху, ни снизу

6. функция не имеет ни $y_{\text{наим}}$, ни $y_{\text{наиб}}$

7. функция непрерывна на $(-\infty; +\infty)$

8. функция выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и выпукла вверх на $(0; +\infty)$

9. функция дифференцируема на $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$



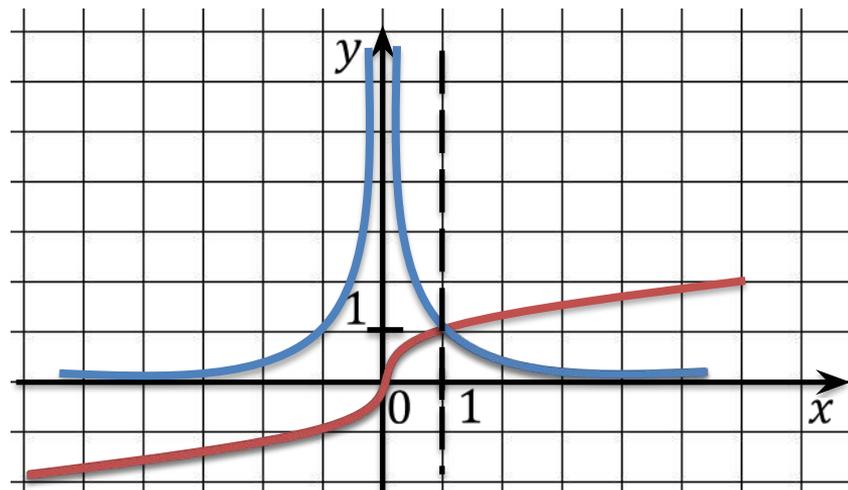
Пример:

Построить и прочесть график функции, если:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{1}{x^2}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Решение:

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$
2. $E(f) = (-\infty; 1]$
3. функция является ни четной, ни нечетной
4. функция убывает на $[1; +\infty)$, функция возрастает на $(-\infty; 1]$
5. функция не ограничена снизу, но ограничена сверху
6. $y_{\text{наиб}} = 1$
7. функция непрерывна
8. функция выпукла вверх на $(0; 1)$ и выпукла вниз на $(-\infty; 0)$ и $(1; +\infty)$



Пример:

Найти область определения функции $y = \sqrt[4]{4x - 8}$.

Решение:

$$4x - 8 \geq 0$$

$$x - 2 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$D(f) = [2; +\infty)$$

Ответ: $D(f) = [2; +\infty)$

Пример:

Найти область определения функции $y = \sqrt{2x + 2} - \sqrt[6]{16 - x^2}$.

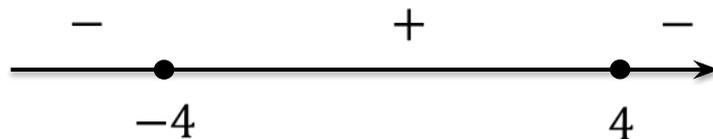
Решение:

$$\begin{cases} 2x + 2 \geq 0 \\ 16 - x^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$2x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

$$16 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (4 - x)(4 + x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-4; 4]$$

$$D(f) = [-1; 4]$$



Ответ: $D(f) = [-1; 4]$