

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – это такая последовательность отличных от нуля чисел, которая получается в результате умножения каждого последующего члена на одно и то же число, не равное нулю.

Последовательность (b_n) – геометрическая прогрессия, если для любого натурального n выполняется условие $b_n \neq 0$ и $b_{n+1} = b_n \cdot q$, где q – некоторое число

Пример: (b_n) : 2, 6, 18, 54, 162,...

Здесь каждый член после первого в 3 раза больше предыдущего. То есть каждый последующий член является результатом умножения предыдущего члена на 3:

$$2 \cdot 3 = 6;$$

$$6 \cdot 3 = 18$$

$$18 \cdot 3 = 54$$

$$54 \cdot 3 = 162.$$

Знаменатель геометрической прогрессии – это число, равное отношению любого её члена, начиная со второго, к предыдущему члену прогрессии. Его обычно обозначают буквой q .

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Пример: (b_n) – геометрическая прогрессия. $b_1 = 1$, $q = 0,1$. Найдите несколько первых членов этой прогрессии.

$$b_2 = b_1 \cdot q = 1 \cdot 0,1 = 0,1$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = 0,01 \cdot 0,1 = 0,001$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = 0,001 \cdot 0,1 = 0,0001$$

(b_n) – геометрическая прогрессия. Зная b_1 и q , найдите последовательно первые пять членов этой прогрессии.

$$b_2 = b_1 \cdot q$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3$$

$$b_5 = b_4 \cdot q = b_1 \cdot q^3 \cdot q = b_1 \cdot q^4$$

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

формула n -го члена геометрической

прогрессии

Пример 1: В геометрической прогрессии, $b_1 = 2$, а знаменатель $q = 1,5$. Найти 4-й член этой прогрессии.

Дано:

$$b_1 = 2$$

$$q = 1,5$$

$$n = 4$$

Найти: b_4 - ?

Решение.

Применяем формулу $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, вставляя в нее соответствующие значения:

$$b_4 = 2 \cdot 1,5^{4-1} = 2 \cdot 1,5^3 = 2 \cdot 3,375 = 6,75.$$

Ответ: 6,75.

Пример 2: Найти пятый член геометрической прогрессии, если первый и третий члены равны соответственно 12 и 192.

Дано: $b_1 = 12$, $b_3 = 192$

Найти: b_5 - ?

Решение.

1) Найдем знаменатель геометрической прогрессии.

В качестве первого шага с помощью формулы n -го члена запишем

формулу для b_3 : $b_3 = b_1 \cdot q^{3-1} = b_1 \cdot q^2$

Найдем знаменатель геометрической прогрессии:

$$q^2 = \frac{b_3}{b_1} = \frac{192}{12} = 16; \quad q = \sqrt{16} = 4; \text{ или } q = -\sqrt{16} = -4;$$

2) Найдем значение b_5 .

Если $q = 4$, то

$$b_5 = b_1 q^{5-1} = 12 \cdot 4^4 = 12 \cdot 256 = 3072.$$

При $q = -4$ результат будет тот же. Таким образом, задача имеет одно решение.

Ответ: 3072.

Свойства геометрической прогрессии

1) Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению двух соседних членов, стоящих перед ним и после него:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

Доказательство.

(b_n) – геометрическая прогрессия. $b_n = b_{n-1} \cdot q$, $b_{n+1} = b_n \cdot q$

т.к. все члены геометрической прогрессии отличны от нуля, то

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$, \quad b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$$

2) Верно и обратное утверждение: если в последовательности чисел квадрат любого ее члена, начиная со второго, равен произведению двух соседних членов, стоящих перед ним и после него, то эта последовательность является геометрической прогрессией

Пример:

Вернемся к геометрической прогрессии 2, 6, 18, 54, 162,...

Возьмем четвертый член и возведем его в квадрат: $54^2 = 2916$.

Теперь перемножим члены, стоящие слева и справа от числа 54: $18 \cdot 162 = 2916$.

Как видим, квадрат третьего члена равен произведению соседних второго и четвертого членов.