



Задания С1 ЕГЭ по математике

- $\cos\left(\frac{3}{2}\pi + 2x\right) = \cos x; \left[\frac{5}{2}\pi; 4\pi\right],$
- $6 \cos^2 x - 7 \cos x - 5 = 0; \quad [-\pi; 2\pi],$
- $3 \sin 2x - 4 \cos x + 3 \sin x - 2 = 0; \left[-\pi; \frac{3}{2}\pi\right],$
- $\cos 2x - \cos(2\pi - x) = 0; \quad \left[0; \frac{5}{2}\pi\right],$
- $4 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 12 \sin x + 5 = 0; \quad [-\pi; 2\pi]$
- $6 \sin^2 x + \cos x - 5 = 0; \quad [2\pi; 3\pi],$
- $2 \sin 2x + \cos x + 4 \sin x + 1 = 0; \quad \left[\frac{5}{2}\pi; \frac{7}{2}\pi\right],$
- $2 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0; \quad \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right],$
- $\frac{1}{\cos x - 1} + \frac{1}{\cos x + 1} = 2 \operatorname{ctg}^2 x; \quad \left[-\frac{\pi}{2}; 8\right]$
- $2 \cos^2 x + \sin(\pi + x) - 1 = 0; \quad [-4\pi; -3\pi]$
- $\cos 6x - \cos 3x = 0; \quad [0; \pi]$
- $\frac{3}{2} \operatorname{tg} x \sin 2x - 2 \cos 2x = 8 \sin x - 5; \quad \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
- $\sin 2x = \cos x; \quad \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$
- $\cos 2x - \cos x + 1 = 0; \quad [-\pi; \pi]$
- $\sin x + \operatorname{tg} x = \sin 2x; \quad [0; 3\pi]$
- $\cos 2x = 1 + \sin 2x; \quad [-2\pi; 2\pi]$
- $\sin x + 2 \cos^2 x = \cos x + \sin 2x; \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$
- $\cos x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 - 1; \quad \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$
- $2 \sin 2x = 4 \cos x - \sin x + 1; \quad \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$
- $3 \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + 5 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0; \quad [-3\pi; -2\pi]$
- $2 \cos^2 x + (2 - \sqrt{2}) \sin x + \sqrt{2} - 2 = 0; \quad [-3\pi; -2\pi]$
- $\frac{3}{2} \operatorname{tg} x \sin 2x - 2 \cos^2 x = 8 \sin x - 5; \quad \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$
- $2 \cos^2 x - \cos 2x = 2 \sin^2 x - \sin 2x; \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- $\cos x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2 - 1; \quad \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

23.03.2012

Решение
тригонометрических
уравнений
с отбором корней
на заданном промежутке

Тригонометрические
формулы

Способы отбора корней

Формулы корней
простейших
тригонометрических
уравнений

Методы решения
тригонометрических
уравнений

Решение
тригонометрических
уравнений с отбором
корней на заданном
промежутке

Тригонометрические формулы

$\arccos(-0,5)$	$\sin(0,5$ $\pi+x)$	$\arcsin(-0,5)$
$\sin 6x$	$\cos^2 x - 1$	$\cos(1,5\pi - x)$
$\cos(-4$ $\pi/3)$	$\operatorname{Tg}^2(1,5$ $\pi+x)$	$3\sin^2 4x + 3\cos^2 4x$
$2\operatorname{tg} 405^\circ$	$\sin 150^\circ$	<u>вперед</u> $\cos^2 x - \sin^2 x$

Методы решений тригонометрических уравнений

Основные методы:

- замена переменной,
- разложение на множители,
- однородные уравнения,

прикладные методы:

- по формулам преобразования суммы в произведение
и произведения в сумму,
- по формулам понижения степени,
- универсальная тригонометрическая подстановка
- введение вспомогательного угла,
- умножение на некоторую тригонометрическую

функцию

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

Формулы корней тригонометрических уравнений		
$\sin x = a,$ $X = (-1)^n \arcsin a + \Pi n$ $n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = a,$ $X = \pm \arccos a + 2\Pi n$ $n \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{tg} x = a,$ $x = \operatorname{arctg} a + \Pi n$ $n \in \mathbf{Z}$
Частные	случаи решения	уравнений
$\sin x = 0$ $X = \Pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = 0$ $X = \Pi/2 + \Pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{tg} x = 0$ $X = \Pi n, n \in \mathbf{Z}$
$\sin x = 1,$ $X = \Pi/2 + 2 \Pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = 1,$ $X = 2\Pi n, n \in \mathbf{Z}$	
$\sin x = -1,$ $X = -\Pi/2 + 2\Pi n, n \in \mathbf{Z}$	$\cos x = -1,$ $X = \Pi + 2 \Pi n, n \in \mathbf{Z}$	

Способы отбора корней тригонометрических уравнений на заданном промежутке

- **Арифметический способ**

Перебор значений целочисленного параметра n и вычисление корней

- **Алгебраический способ**

Перебор значений целочисленного параметра n и вычисление корней

- **Геометрический способ**

Изображение корней на тригонометрической окружности с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений

Арифметический способ

Перебор значений целочисленного параметра n и вычисление корней

1. Решить уравнение
2. Записать корни уравнения
3. Разделить виды решения для косинуса; подсчитать значения x при целых n до тех пор, пока значения x не выйдут за пределы данного отрезка.
4. Записать ответ.

$$\cos x = a, |a| \leq 1$$

$$\begin{cases} x = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

x	k	-2	-1	0	1	2	...
$\arccos a + 2\pi k$							
$-\arccos a + 2\pi k$							

$$\sin x = a, |a| \leq 1$$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in Z$$

x	k	-2	-1	0	1	2	...
$(-1)^k \arcsin a + \pi k$							

Алгебраический способ

Решение неравенства относительно неизвестного параметра n и вычисление корней

1. Записать двойное неравенство для неизвестного (x), соответствующее данному отрезку или условию; решить уравнение.
2. Для синуса и косинуса разбить решения на два.
3. Подставить в неравенство вместо неизвестного (x) найденные решения и решить его относительно n .
4. Учитывая, что n принадлежит Z , найти соответствующие неравенству значения n .
5. Подставить полученные

$$\cos x = a, |a| \leq 1, [c; d]$$

$$\begin{cases} x = \arccos a + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

$$c \leq \arccos a + 2\pi k \leq d$$

$$c \leq -\arccos a + 2\pi k \leq d$$

Т.к. $k \in Z$, то $k_1 = \dots; x_1 = \dots$
 $k_2 = \dots; x_2 = \dots$

$$\sin x = a, |a| \leq 1, [c; d]$$

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

$$c \leq \arcsin a + 2\pi k \leq d$$

$$c \leq \pi - \arcsin a + 2\pi k \leq d$$

Т.к. $k \in Z$, то $k_1 = \dots; x_1 = \dots$
 $k_2 = \dots; x_2 = \dots$

Геометрический способ

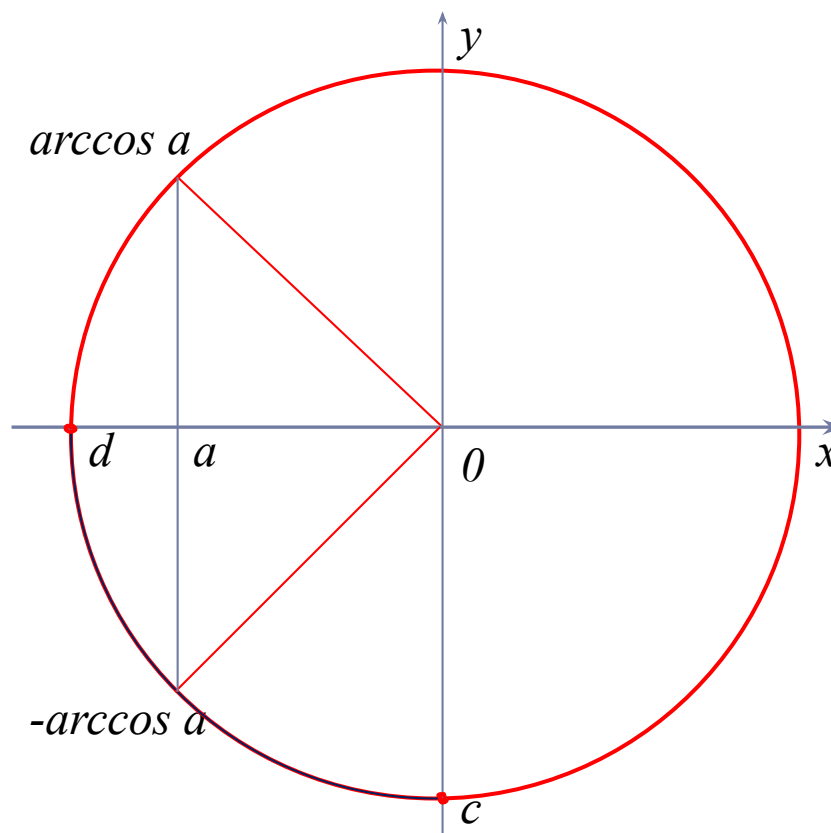
Изображение корней на тригонометрической окружности с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений

На окружности

1. Решить уравнение.
2. Обвести дугу, соответствующую данному отрезку на окружности.
3. Разделить виды решений для синуса и косинуса.
4. Нанести решения уравнения на окружность.
5. Выбрать решения, попавшие на обведенную дугу.

$$\cos x = a, |a| \leq 1, [c; d]$$

$$\begin{cases} x = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Геометрический способ

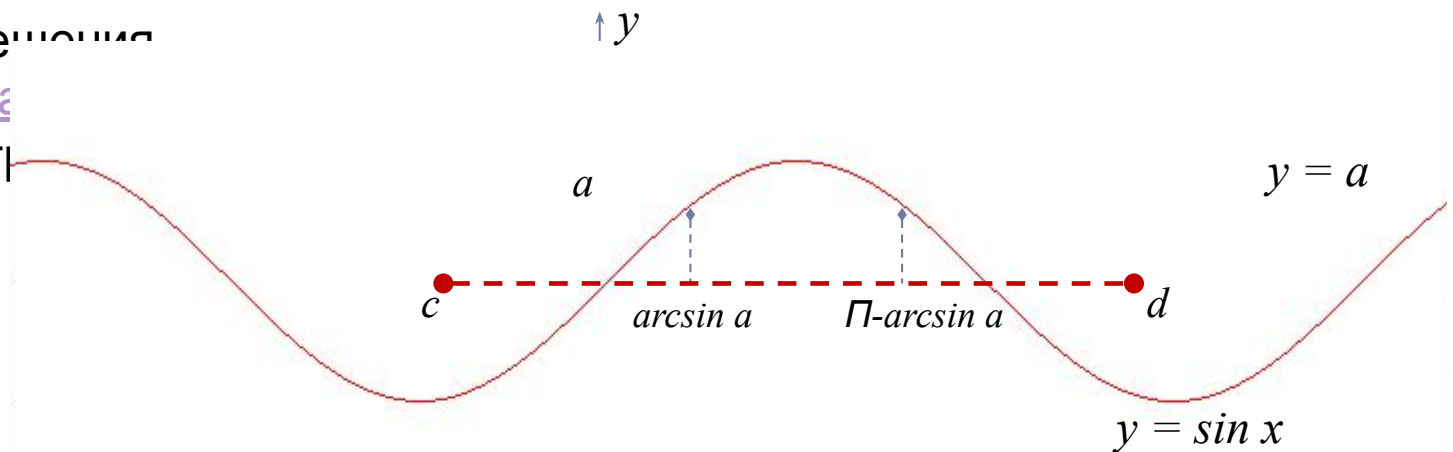
Изображение корней на графике с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений

На графике

1. Решить уравнение.
2. Построить график данной функции, прямую $y = a$, на оси x отметить данный отрезок.
3. Найти точки пересечения графиков.
4. Выбрать решения принадлежащие данному от

$$\sin x = a, |a| \leq 1, [c; d]$$

$$\begin{cases} x = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Ответы

1	1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ 2) $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{17\pi}{6}$	9	1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; 2) $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{2}$;	17	1) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ 2) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$
2	1) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ 2) $\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$	10	1) $-\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}$; 2) $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{23\pi}{6}$;	18	1) $-\frac{\pi}{2} + \pi k$; 2) $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$
3	1) $(-1)^k \arcsin \frac{2}{3} + \pi k$ $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ 2) $\pm \frac{2\pi}{3}$; $\pi - \arcsin \frac{2}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; $\arcsin \frac{2}{3}$	11	1) $2\pi k$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ 2) 0 ; $\frac{2\pi}{3}$	19	1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\pm (\pi - \arccos \frac{1}{4}) + 2\pi k$ 2) $\frac{\pi}{2}$; $(\pi \pm \arccos \frac{1}{4})$
4	1) $\frac{2\pi k}{3}$ 2) 0 ; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$; 2π .	12	1) $(-1)^k \arcsin \frac{4}{5} + 2\pi k$ 2) $\pi - \arcsin \frac{4}{5}$	20	1) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$; $-\arctg \frac{2}{3} + \pi k$ 2) $-\frac{9\pi}{4}$; $-2\pi - \arctg \frac{2}{3}$
5	1) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$. 2) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5\pi}{6}$.	13	1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$. 2) $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$.	21	1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k$ 2) $-\frac{11\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$
6	1) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\pm (\pi - \arccos \frac{1}{3}) + 2\pi k$ 2) $3\pi - \arccos \frac{1}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$	14	1) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ 2) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{3}$	22	1) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $(-1)^k \arcsin 0,6 + \pi k$ 2) $\frac{\pi}{2}$; $\pi - \arcsin 0,6$
7	1) $-\arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k$; $\pi + \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k$; $\pi + 2\pi k$ 2) 3π ; $3\pi + \arcsin \frac{1}{4}$.	15	1) πk ; $2\pi k$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ 2) 0 ; π ; 2π ; 3π ; $\frac{8\pi}{3}$; $\frac{4\pi}{3}$	23	1) $\arctg(1 + \sqrt{2}) + \pi k$; $\arctg(\sqrt{2} - 1) + \pi k$ 2) $\arctg(1 + \sqrt{2})$; $-\arctg(\sqrt{2} - 1)$.
8	1) $-\arctg \frac{3}{2} + \pi k$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$ 2) $\pi - \arctg \frac{3}{2}$; $\frac{5}{4}\pi$.	16	1) πk ; $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ 2) -2π ; $-\pi$; 0 ; π ; 2π ; $-\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $-\frac{5\pi}{4}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$.	24	1) $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ 2) $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{3\pi}{4}$

Пример 3. Найти все корни уравнения
которые удовлетворяют условию

$$10 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{2} + 2x\right) + 3,$$
$$x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{19\pi}{12}\right].$$

Решение.

$$10 \sin^2 x = -\cos 2x + 3;$$

$$10 \sin^2 x = 2 \sin^2 x - 1 + 3,$$

$$8 \sin^2 x = 2;$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{4};$$

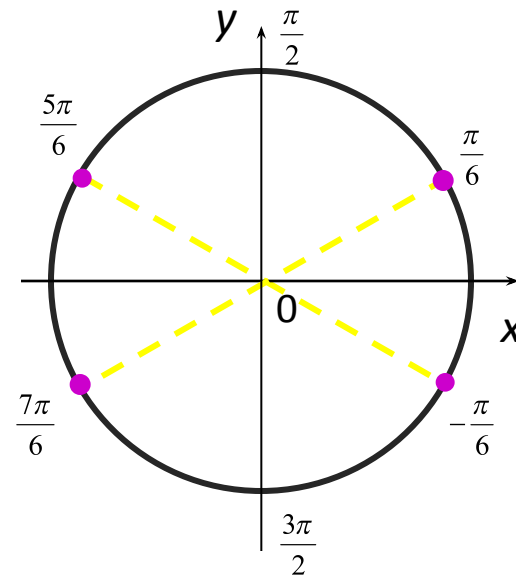
$$\sin x = \pm \frac{1}{2};$$

$$\left[x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \right.$$

$$\left. x = (-1)^m \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi m, m \in \mathbb{Z}; \right.$$

С помощью числовой окружности получим:

$$x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$



Выберем корни, удовлетворяющие условию

задачи.

Из первой
серии:

$$-\frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{19\pi}{12}, n \in \mathbb{Z};$$

$$-8\pi \leq 2\pi + 12\pi n \leq 19\pi, n \in \mathbb{Z};$$

$$-10 \leq 12n \leq 17, n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно $n=0$ или $n=1$, то

есть

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{7\pi}{6}. \end{array} \right.$$

Из второй
серии:

$$-\frac{2\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{19\pi}{12}, n \in \mathbb{Z};$$

$$-8\pi \leq -2\pi + 12\pi n \leq 19\pi, n \in \mathbb{Z};$$


$$-6 \leq 12n \leq 21, n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно $n=0$ или $n=1$, то

есть

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6}, \\ x = \frac{5\pi}{6}. \end{array} \right.$$

Ответ: $\left\{ \pm \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$.



Самый лучший способ
для достижения правильного
и быстрого результата
это тот, который лучше всего
усвоен
конкретным учеником.