



ПЕРВЫЙ ОТКРЫТЫЙ
РЕГИОНАЛЬНЫЙ КОНКУРС
УЧЕБНЫХ ПРЕЗЕНТАЦИЙ
«МИР ХИМИИ-2016»



Номинация – 19
«Химия и другие науки»

Рубрика – 19.11

Авторы: Якименко М.А. (г. Тверь),
Астахова А.С. (г. Тверь),
Привалова Е. (г. Тверь)

МАТЕМАТИКА И ХИМИЯ



Оглавление

Введение

Глава 1. Роль математики в химии. Ограничения, накладываемые химией на решение математических задач

Глава 2. Математические методы решения задач с химическим содержанием

2.1 Арифметический метод

2.2. Алгебраический метод

2.3. Функционально-графический метод

Глава 3. Геометрия в химии

Глава 4. Симметрия в химии

Глава 5. Графическое представление молекул и их свойств.

Теория графов в химии

Заключение

Список использованных источников



Введение

Уже более двухсот лет прошло с тех пор, как химия перестала быть описательной наукой. После того, как гениальный *М.В. Ломоносов* ввел в химическую практику весы, знание математики стало необходимо для каждого химика. Еще в 1741 году *М.В. Ломоносов* писал: “...если математики из сопоставления нескольких линий выводят очень многие истины, то и для химиков я не вижу никакой иной причины, вследствие которой они не могли бы вывести больше закономерностей из такого обилия имеющихся опытов, кроме незнания математики”.



Глава 1. Роль математики в химии. Ограничения, накладываемые химией на решение математических задач

«Математика для химиков – это, в первую очередь, полезный инструмент решения многих химических задач. Очень трудно найти какой-либо раздел математики, который совсем не используется в химии». [1] Функциональный анализ и теория групп широко применяются в квантовой химии, теория вероятностей, методы топологии и дифференциальной геометрии составляет основу термодинамики, теория графов используется в органической химии для предсказания свойств органических молекул, дифференциальные уравнения – основа химической кинетики и т.д.

Остановимся подробнее на применении математики в химии.



Пример 1

Число атомов в молекулах должно быть положительным целым числом. Рассмотрим уравнение $12x+y=16$. Для математика это уравнение описывает прямую. Оно имеет бесконечно много решений. Для химика выражение $12x+y$ описывает молекулярную массу углеводорода C_xH_y ($Ar(C) = 12$ г/моль; $Ar(H) = 1$ г/моль). Молекулярную массу 16 имеет единственный углеводород, первый член гомологического ряда алканов – метан (CH_4), поэтому только одно решение данного уравнения обладает химическим смыслом: $x=1, y=4$.



Пример 2

Скорость химической реакции – это изменение количества вещества в единицу времени: для гомогенных процессов – в единице объема, для гетерогенных процессов – на единице поверхности раздела фаз. Математическая запись этого определения может быть записана в виде:

$$v_r = \pm \frac{dN}{Vdt} \text{ или } v_r = \pm \frac{dN}{sdt},$$

где N – количество вещества; t – время; V – объем; s – поверхность раздела фаз.

Пример 3

Физические величины, используемые для описания химических веществ и реакций, могут принимать только неотрицательные значения: масса, объём, концентрация, скорость реакции др.

Задача на расчёт состава равновесной смеси
Смесь азота и водорода в соотношении 1:3 нагрели до установления равновесия. Рассчитайте, какая доля исходных веществ превратилась в аммиак, если константа равновесия при конечной температуре смеси и давлении 100 атм. равна $5 \cdot 10^{-6}$.

Решение: Запишем уравнения реакции: $N_2 + 3H_2 = 2NH_3$. Составим таблицу, в которой указаны количества веществ до взаимодействия, количество вступивших в реакцию, и образовавшихся в ходе нее. Пусть x – доля прореагировавшего азота. Тогда неизвестное x можно определить из уравнения, выражающего константу равновесия через давления, находящихся в смеси:

Количество веществ (моль)	N_2	H_2	NH_3	Всего
Исходный состав	1	3	0	4
Вступило в реакцию	x	$3x$	$2x$	
Конечный (равновесный) состав	$1-x$	$3-3x$	$2x$	$4-2x$

$$K = \frac{P_{NH_3}^2}{P_{N_2} P_{H_2}^3} = \frac{\left(\frac{2x}{4-2x} P\right)^2}{\frac{1-x}{4-2x} P \cdot \left(\frac{3-3x}{4-2x} P\right)^3} = 5.0 \cdot 10^{-6}$$

При $p = 100$ атм. данное уравнение четвертой степени относительно x имеет **4 действительных корня**:

$$x_1 = -0.187; \quad \mathbf{x_2 = 0,120;} \quad x_3 = 1,880; \quad x_4 = 2,187.$$

Условию положительности концентраций удовлетворяет только x_2 (только один корень обладает химическим смыслом).

Пример 4

В химии нет иррациональных чисел. При математических расчетах в химии используют целые числа или дробные, но полученные с конечной точностью (числа π и e в расчетах округляют до 3,14 и 2,72 соответственно).

Пример 5

В химии нет понятия «бесконечность». Конечно, число атомов в наблюдаемой части Вселенной очень велико, но в природе нет бесконечно больших и бесконечно малых величин. Так общее число атомов различных химических элементов во Вселенной оценивается как 10^{80} , на Земле – 10^{50} , а в человеческом организме на четыре порядка больше, чем значение постоянной Авогадро ($6,02 \cdot 10^{23}$ частиц/моль) – 10^{27} .

Вывод: *роль математики в химии велика (многие математические законы и формулы используются для решения химических задач, но в тоже время, химия накладывает ограничения на решение математических уравнений, так как они должны иметь химический смысл).*



Глава 2. Математические методы решения задач с химическим содержанием

- *арифметический метод* (составление пропорций по условию задачи)
- *алгебраический метод* (составление системы уравнений по условию задачи и решение полученного уравнения)
- *функционально-графический метод* (перевод условия задачи на язык функций и использовании свойств функций и их графиков для решения задачи)

Рассмотрим применение этих методов при решении химических задач.



2.1. Арифметический метод

Задача:

Какова процентная концентрация раствора, полученного растворением 5 г поваренной соли в 45 г воды?

Дано:

$$m(\text{NaCl}) = 5 \text{ г}$$

$$m(\text{H}_2\text{O}) = 45 \text{ г}$$

$\omega(\text{р-ра}) - ?$

Решение:

$$m(\text{NaCl}) = 5 \text{ г} - x \%$$

$$m(\text{H}_2\text{O}) = 45 \text{ г}$$

$$m(\text{р-ра}) = ? - 100 \%$$

$$1) m(\text{р-ра}) = m(\text{NaCl}) + m(\text{H}_2\text{O}) = 5 + 45 = 50 \text{ г}$$

$$50 \text{ г} - 100 \%$$

$$5 \text{ г} - x \%$$

$$2) \frac{50}{5} = \frac{100}{x}$$

$$x = \frac{5 \cdot 100}{50} = 10\%$$

Ответ: $\omega(\text{р-ра}) = 10\%$



2.2. Алгебраический метод

Задача:

При полном сгорании смеси метилового и этилового спиртов массой 1,74 г израсходован объемом 2,016 л кислорода.

Определить массовый состав исходной смеси спиртов.

Дано:

$$M(\text{смеси}) = 1,74 \text{ г}$$

$$V(\text{O}_2) = 2,016 \text{ л}$$

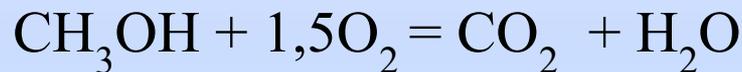
$$\omega(\text{CH}_3\text{OH}) - ?$$

$$\omega(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) - ?$$

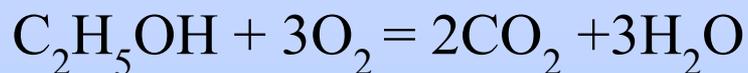
$$n(\text{O}_2) = 0,09 \text{ моль}$$

Решение:

$$x \quad 1,5x$$



$$y \quad 3y$$



Пусть $n(\text{CH}_3\text{OH}) = x$ моль, а

$n(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) = y$ моль



$$0,09 = 1,5x + 3y$$

$$\begin{array}{l} m(\text{CH}_3\text{OH}) = 32 \cdot x = 32x \\ m(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) = 46 \cdot y = 46y \end{array} \left[\begin{array}{l} 0,09 = 1,5x + 3y \\ 1,74 = 32x + 46y \end{array} \right.$$

$$m(\text{CH}_3\text{OH}) + m(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) = 1,74 \text{ г}$$

$$x = 0,04 \text{ моль}$$

$$y = 0,01 \text{ моль}$$

$$m(\text{CH}_3\text{OH}) = 32 \text{ г/моль} \cdot 0,04 \text{ моль} = 1,28 \text{ г}$$

$$W(\text{CH}_3\text{OH}) = 1,28 \text{ г} / 1,74 \text{ г} = 73,6\%$$

$$m(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) = 46 \text{ г/моль} \cdot 0,01 \text{ моль} = 0,46 \text{ г}$$

$$\omega(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) = 0,46 \text{ г} / 1,74 \text{ г} = 26,4\%$$

Ответ: $\omega(\text{CH}_3\text{OH}) = 73,6\%$

$\omega(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}) = 26,4\%$



2.3. Функционально-графический метод

Задача:

Вычислить массу сульфита натрия, необходимого для реакции с серной кислотой, чтобы получить 16 г оксида серы (IV).

Дано:

$$m(\text{SO}_2) = 16 \text{ г}$$

$$m(\text{Na}_2\text{SO}_4) - ?$$

Решение:

x г

16 г



126 г

64 г

$$\frac{x}{126} = \frac{16}{64}$$

$$x = \frac{126 \cdot 16}{64} = 31,5 \text{ г}$$

Ответ: $m(\text{Na}_2\text{SO}_4) = 31,5 \text{ г}$

Зависимость переменной $m(\text{Na}_2\text{SO}_3)$ от переменной $m(\text{SO}_2)$ является функцией и выражается формулой $y = kx$ линейной функции, т.к. каждому значению $m(\text{SO}_2)$ соответствует единственное значение $m(\text{Na}_2\text{SO}_3)$. Для нашего примера это $m(\text{Na}_2\text{SO}_3) = k \cdot m(\text{SO}_2)$.



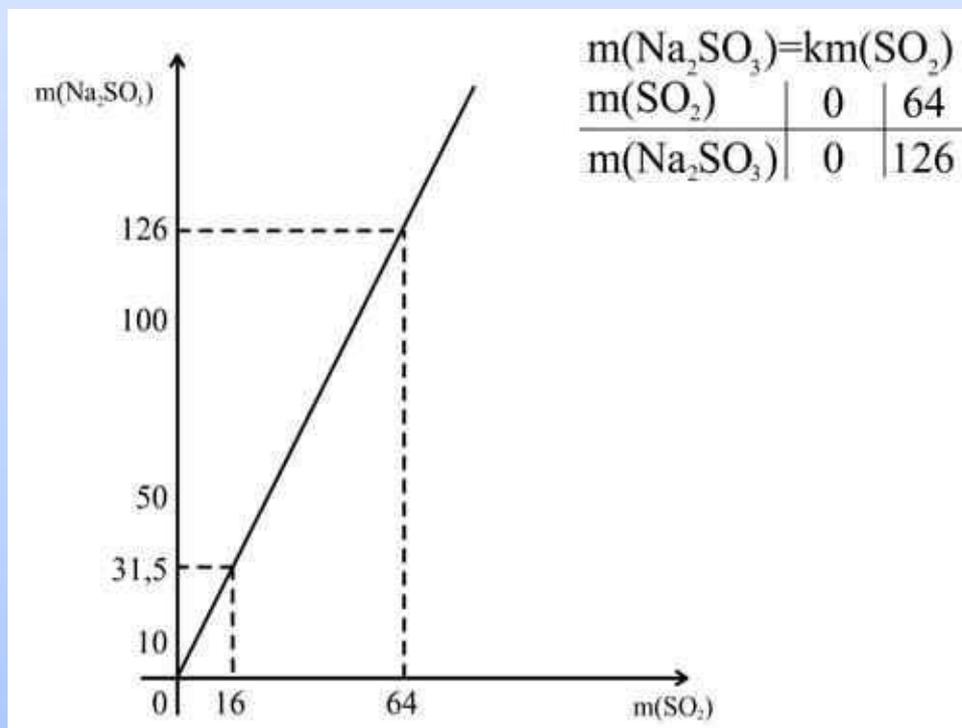
Коэффициент пропорциональности – отношение величины молярной массы Na_2SO_3 к величине молярной массы SO_2 , т.е. $k=126:64=1,97$. Для построения графика прямой пропорциональности составляем таблицу значений функции $m(\text{Na}_2\text{SO}_3) = k \cdot m(\text{SO}_2)$.

По уравнению реакции:

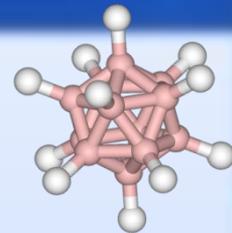
$$m(\text{SO}_2) = 1 \text{ моль} \cdot 64 \text{ г/моль} = 64 \text{ г}$$

$$m(\text{Na}_2\text{SO}_3) = 1 \text{ моль} \cdot 126 \text{ г/моль} = 126 \text{ г}$$

Графический способ решения задач оказывается более рациональным при решении задач на смеси, смешивание растворов и др.



Глава 3. Геометрия в ХИМИИ



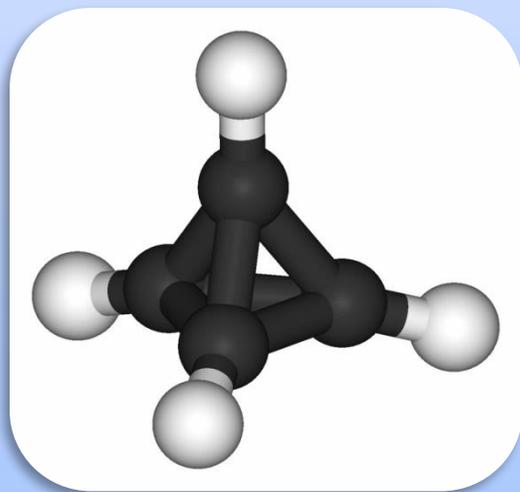
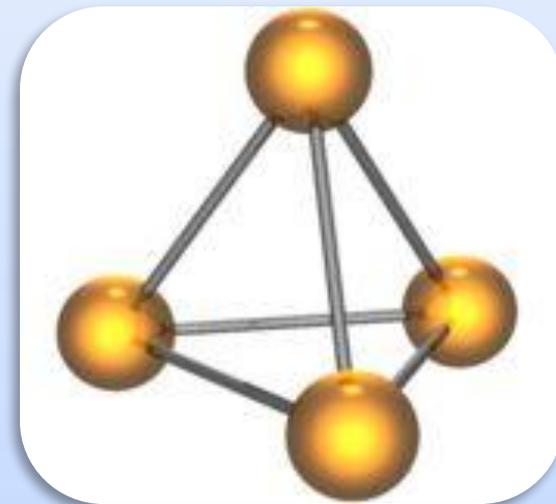
В современной химии для определения структуры молекул (их геометрического строения) используют разнообразные физические методы, наиболее распространённые из которых – инфракрасная спектроскопия (ИК), спектроскопия ядерного магнитного резонанса (ЯМР) и масс-спектрометрия (MS). Сочетание данных методов позволяет определить структуру даже очень сложных молекул.

Рассмотрим геометрию некоторых химических структур. Известно всего пять правильных многогранников – тетраэдр, куб, октаэдр, икосаэдр и додекаэдр. Они реализованы в химических структурах.



Пример 1

Тетраэдр. Молекула с такой геометрией существует в природе это – молекула белого фосфора (P_4). Каждая вершина связана с тремя другими (атомы фосфора в P_4 трёхвалентны).



Валентность III характерна для групп С–Н, поэтому можно представить себе углеводород, углеродный скелет которого имеет форму тетраэдра – тетраэдран.



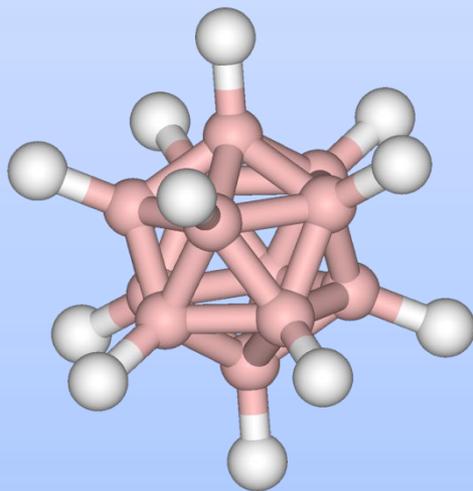
Пример 2

Углеводород в форме куба (формула C_8H_8) называется кубан.



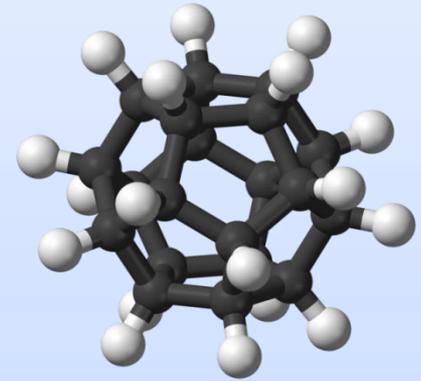
Пример 3

Органических молекул, имеющих форму икосаэдра, не существуют, так как углерод пятивалентным не бывает. Однако, известен отрицательный ион такой формы – додекаборан $B_{12}H_{12}^{2-}$.

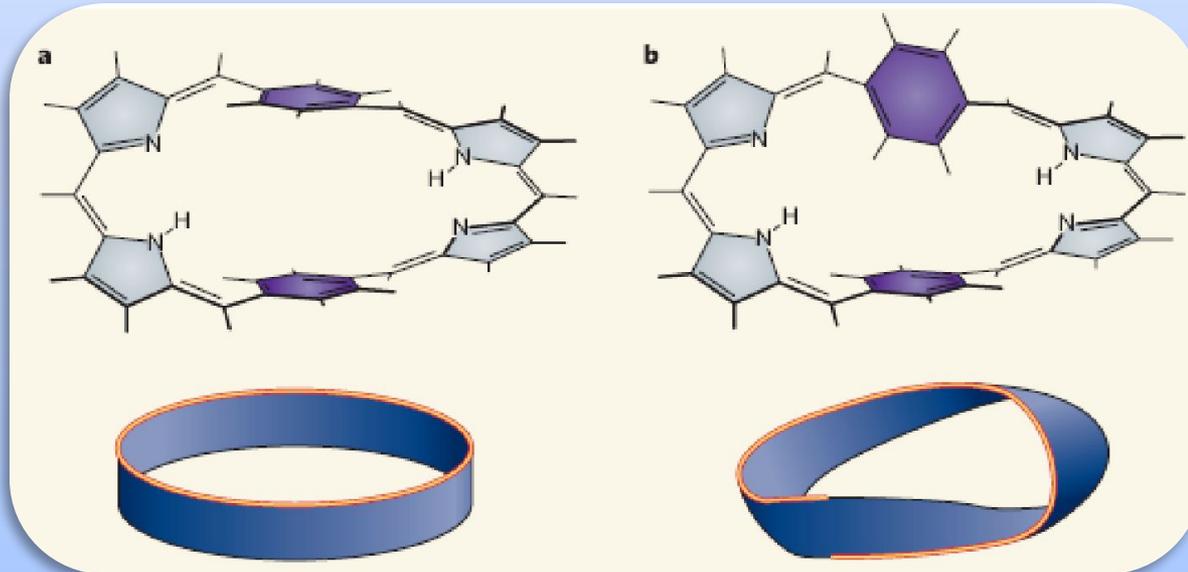


Пример 4

Углеводород с геометрической формой додекаэдра (додекаэдр – самый сложный из правильных многогранников) – додекаэдран $C_{20}H_{20}$. В этой молекуле два додекаэдра.



Пример 5



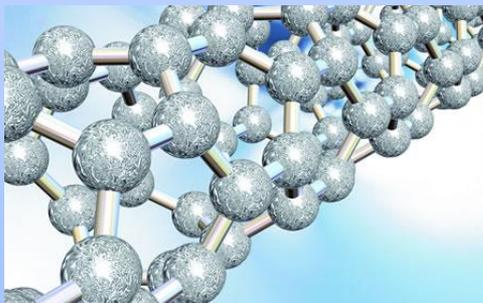
а) нормальная топология б) мебиусовская топология

Лист Мёбиуса – объект, который имеет только одностороннюю поверхность.



Расчётные методы геометрии активно используются химиками при анализе расположения атомных частиц в молекулах или упаковке отдельных частиц (молекул, атомов и ионов) в более крупных агрегатах (кристаллах, кластерах, мицеллах, наночастицах). В подобных задачах требуется умение решать плоские фигуры (треугольники и многоугольники) и знание выражений для объёмов различных тел (шаров, кубов, цилиндров), представляющих модели химических частиц.

Вывод: *геометрия в химии имеет большое значение: многие вещества обладают формой геометрических фигур.*



**Наночастицы
серебра**



Глава 4. Симметрия в ХИМИИ



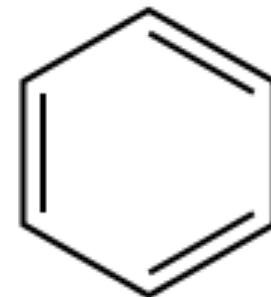
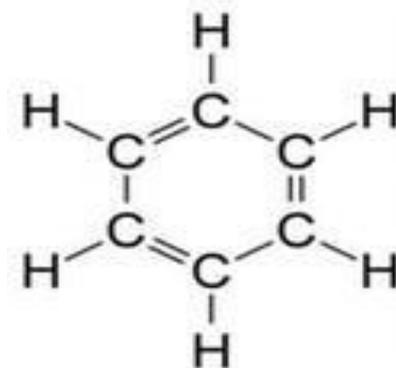
Симметрия – понятие, которое лежит в основе фундаментальных законов природы (например, закона сохранения энергии). Оно распространено в химии: практически все известные молекулы либо сами обладают симметрией какого-либо рода, либо содержат симметричные фрагменты.

Рассмотрим, каким образом была установлена **структурная формула бензола** (C_6H_6). Строение бензола долгое время оставалось загадкой для ученых, несмотря на то, что был известен качественный и количественный состав вещества. Даже после того, как было установлено, что углерод имеет валентность IV и может образовывать двойные и тройные связи, было непонятно, в какой последовательности соединены между собой атомы углерода.

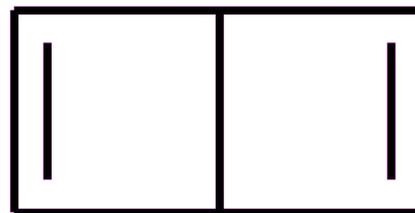
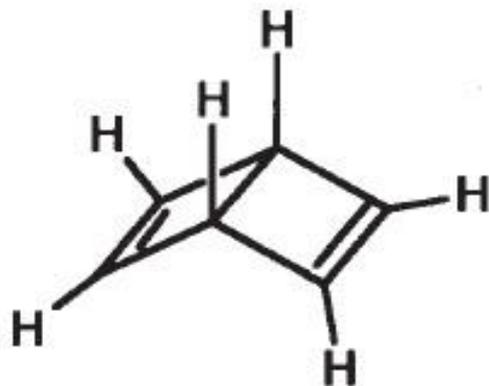
Фрагмент СН имеет валентность III, комбинировать шесть таких фрагментов друг с другом можно **шестью способами**.



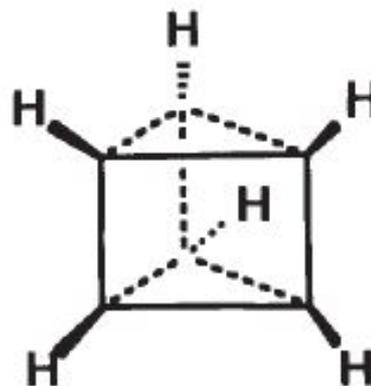
Способ 1. Основу формулы Кекуле бензола составляет правильный шестиугольник из атомов углерода, связанных между собой чередующимися одинарными и двойными связями.



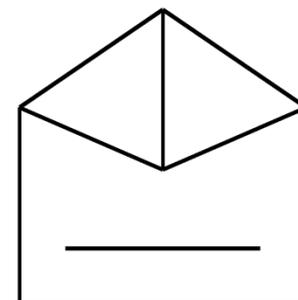
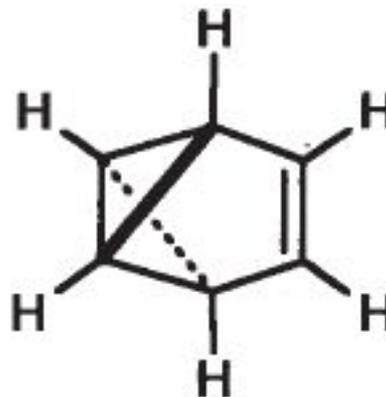
Способ 2. Дьюаровский бензол имеет бициклическую структуру, две двойные связи C=C.



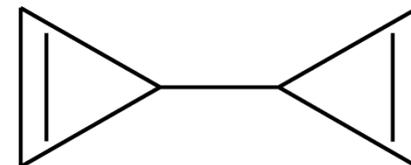
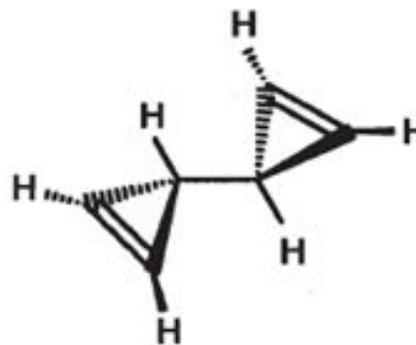
Способ 3. Бензол Ладенбурга в форме призмана (углеродный каркас имеет форму треугольной призмы, а все связи в молекуле – одинарные).



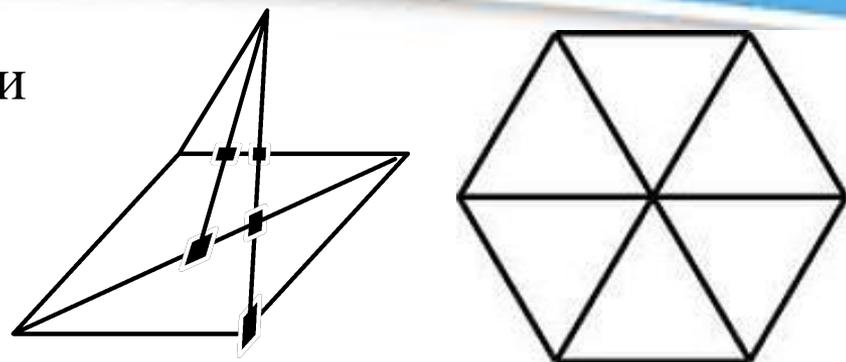
Способ 4. Бензвален содержит несколько углеродных циклов (один пятичленный и два трехчленных).



Способ 5. Бициклопропенил составлен из двух связанных между собой циклических фрагментов



Способ 6. В бензоле Клауса связи между атомами в центре молекулы не пересекаются.

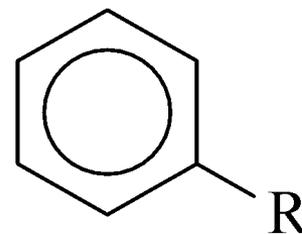
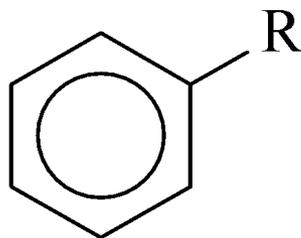
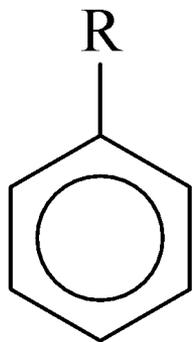


Из этих шести структур пять были получены в индивидуальном виде. Бензол Клауса не существует из-за пространственных ограничений.

Найдем число теоретически возможных производных бензола (R-заместитель). Экспериментально определено, что для каждого R существует только одно монозамещенное производное C_6H_5R и ровно три дизамещенных $C_6H_4R_2$. Единственной структурой, удовлетворяющей экспериментальным данным является кекулевский бензол.

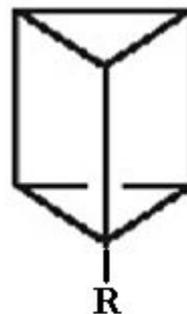
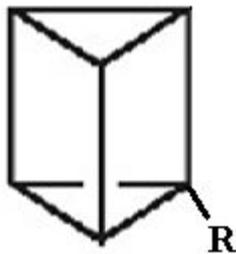
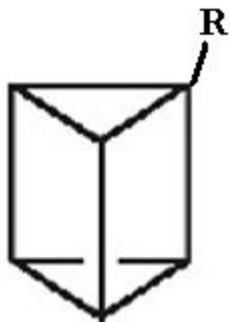
Монозамещение

- Кекулевский бензол:



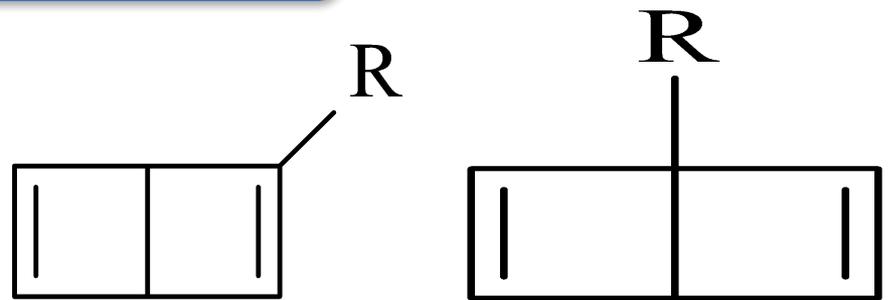
- Бензол Ладенбурга:

Одно вещество



Монозамещение

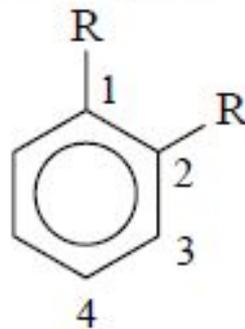
- Дьюаровский бензол:



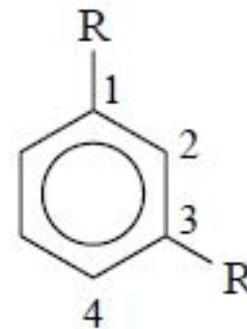
Изомеры

Дизамещение

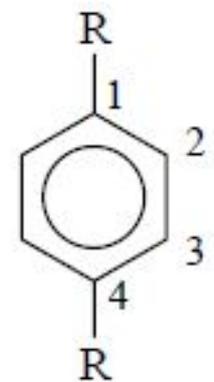
- Кекулевский бензол:



орто-изомер
(1,2-)



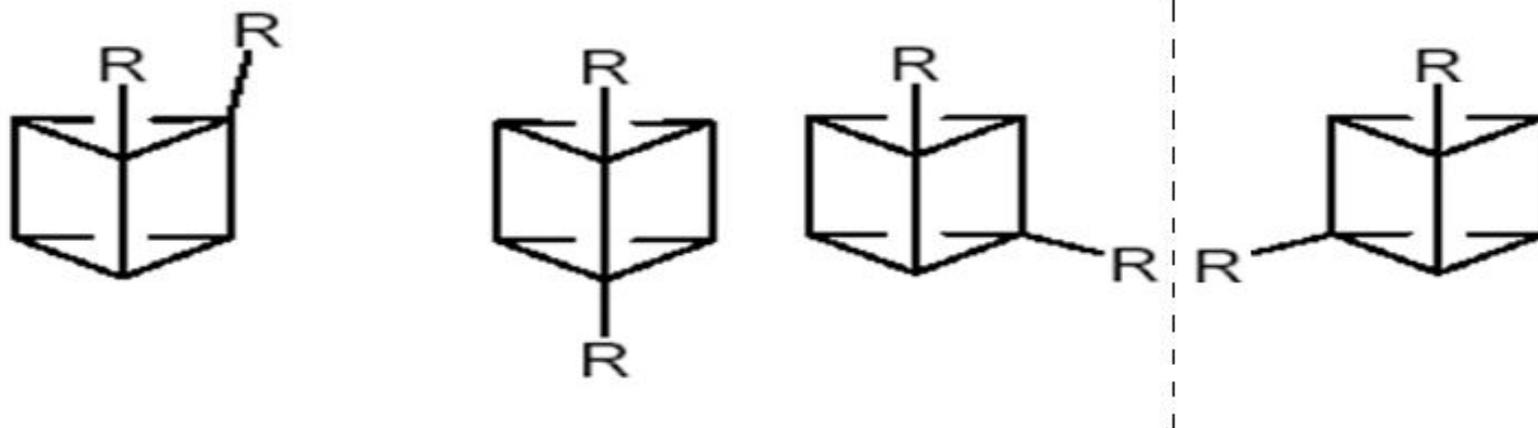
мета-изомер
(1,3-)



пара-изомер
(1,4-)

Дизамещение

• Бензол Ладенбурга:



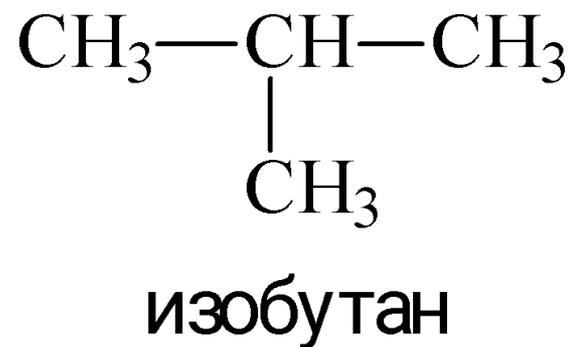
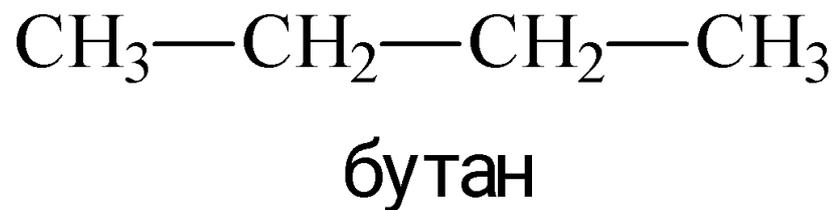
оптические изомеры

Вывод: *использование знаний о симметрии помогает устанавливать структуру вещества.*

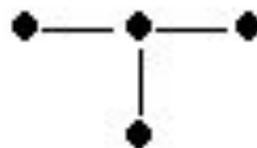


Глава 5. Графическое представление молекул и их свойств. Теория графов в химии

Изучение связи свойств веществ с их строением – одна из основных задач химии. Российский химик А.М. Бутлеров предсказал, что составу C_4H_{10} могут соответствовать два вещества, имеющие разное строение – бутан и изобутан, и подтвердил это, синтезировав изобутан.

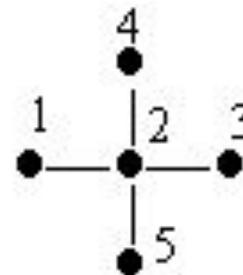
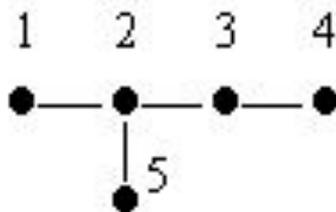
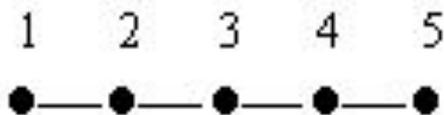


На идеи о том, что порядок соединения атомов имеет ключевое значение для свойств вещества основано представление молекул с помощью **графов**, в которых атомы играют роль вершин, а химические связи между ними – ребер, соединяющих вершины (атомы водорода в таких графах не указывается).



Графы – это математические объекты, которые можно характеризовать с помощью чисел. Отсюда появилась идея выражать строение молекул числами, которые связаны со структурой молекулярных графов (так называемых «топологических индексов»). Основой для построения многих индексов служит понятие **«матрица расстояний»** (так называют матрицу, элементы которой показывают число ребер, разделяющих соответствующие вершины молекулярного графа).

Составим матрицу для трех изомеров состава C_5H_{12} (изобразим их молекулярные графы):



Диагональные элементы *матрицы расстояний* для углеводородов равны 0. В первом графе вершина 1 связана с вершиной 2 одним ребром, поэтому элемент матрицы $d_{12} = 1$. Аналогично, $d_{13} = 2$, $d_{14} = 3$, $d_{15} = 4$. Первая строка в матрице расстояний нормального пентана имеет вид: (0 1 2 3 4).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Расстояние между вершинами не зависит от порядка их перечисления, поэтому матрицы расстояний симметричны относительно диагонали.

Первый топологический индекс, отражающий структуру молекулярного графа, был предложен в 1947 г. **Винером**. Он определяется как сумма диагональных элементов матрицы расстояний плюс полусумма ее недиагональных элементов:

$$W(G) = \sum_{i=1}^n d_{ii} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n d_{ij}$$

Для указанных выше графов, соответствующих формуле C_5H_{12} , индекс Винера принимает значения 20, 18 и 16. С увеличением длины углеродного скелета **индекс Винера** растет, так как в матрице расстояний становится больше элементов.

Другой тип индексов – *индекс Рандича* – основан не на расстояниях между вершинами, а на числе ближайших соседей для каждой вершины. Рассчитаем данный индекс по формуле:

$$\chi(G) = \sum_{\text{всем ребрам}} \frac{1}{\sqrt{v_i v_j}}$$

где v_i – степень i -й вершины, то есть число ребер, от нее отходящих. Для других графов индекс Рандича равен:

$$\chi(G_1) = \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2}} + \frac{1}{\sqrt{v_2 v_3}} + \frac{1}{\sqrt{v_3 v_4}} + \frac{1}{\sqrt{v_4 v_5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} = 2.414$$

$$\chi(G_2) = \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2}} + \frac{1}{\sqrt{v_2 v_3}} + \frac{1}{\sqrt{v_3 v_4}} + \frac{1}{\sqrt{v_2 v_5}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 2.270$$

$$\chi(G_3) = \frac{1}{\sqrt{v_1 v_2}} + \frac{1}{\sqrt{v_2 v_3}} + \frac{1}{\sqrt{v_2 v_4}} + \frac{1}{\sqrt{v_2 v_5}} = 4 \frac{1}{\sqrt{4}} = 2.000$$

Этот индекс уменьшается с увеличением степени разветвленности углеродного скелета (используют для описания физических свойств алканов).

В матрице расстояний диагональные элементы можно определить через заряд ядра Z_i (для углерода $Z = 6$):

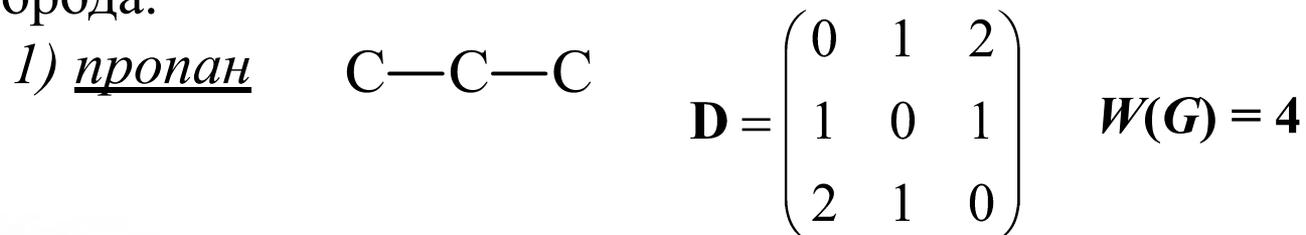
$$d_{ii} = 1 - \frac{6}{Z_i}$$

Недиагональные элементы определяются суммированием по ребрам, причем каждому ребру, соединяющему атомы с зарядами Z_i и Z_j , присваивается вес

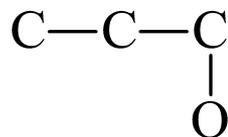
$$k = \frac{1}{b} \frac{36}{Z_i Z_j},$$

где b равно порядку связи между атомами (1 для одинарной связи, 2 для двойной, 3 для тройной). Для обычных одинарных связей углерод – углерод, $k = 1$.

Рассчитаем **индексы Винера** пропана C_3H_8 и пропилового спирта C_3H_7OH . В молекулярных графах укажем все атомы, кроме атомов водорода.



2) в молекуле пропилового спирта кислород связан с крайним атомом углерода:



Для одинарной связи C–O весовой коэффициент равен $36/(6 \cdot 8) = 0,75$. Диагональный элемент матрицы, отвечающий кислороду:
 $d_{44} = 1 - 6/8 = 0,25$.

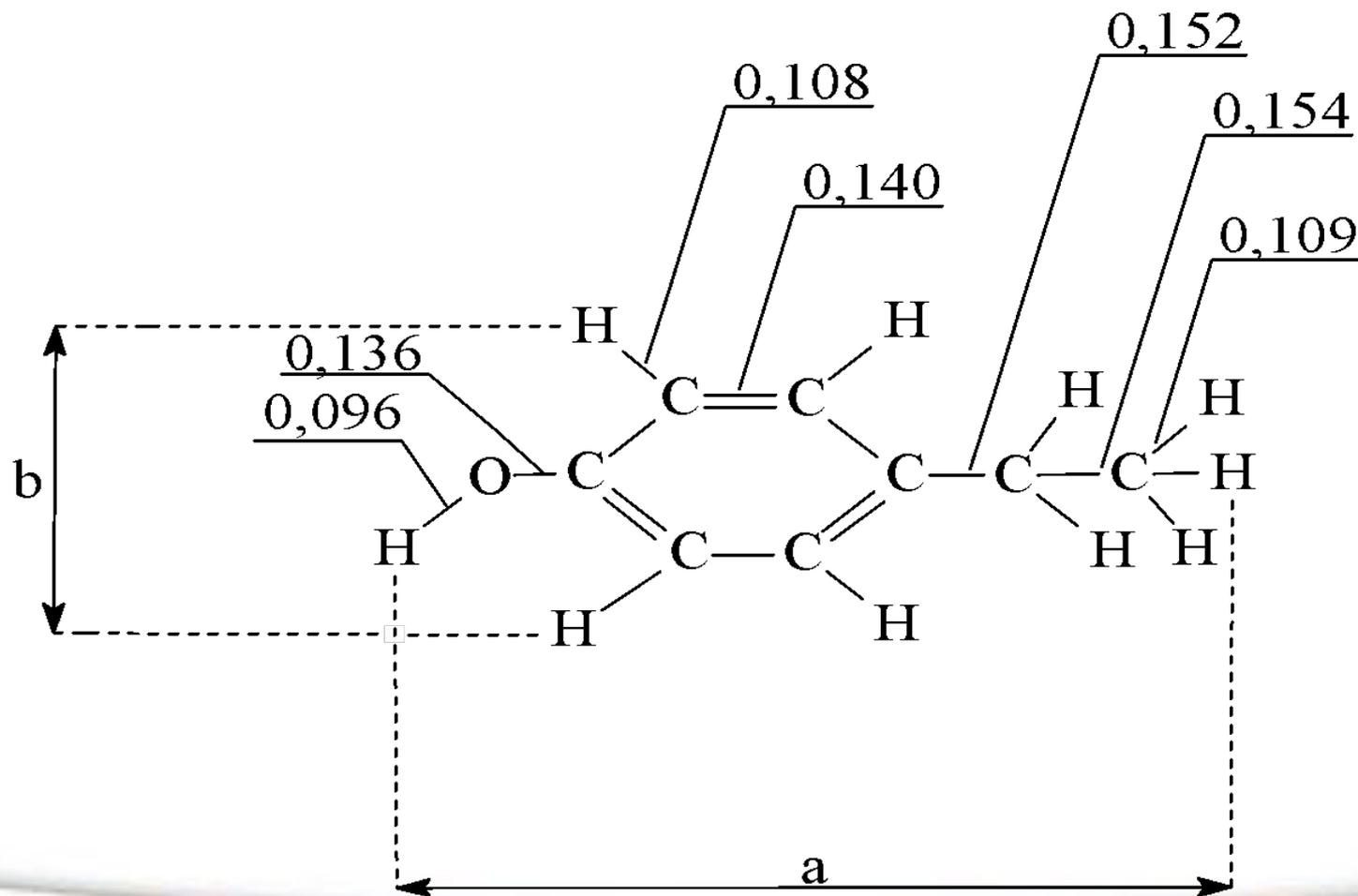
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2.75 \\ 1 & 0 & 1 & 1.75 \\ 2 & 1 & 0 & 0.75 \\ 2.75 & 1.75 & 0.75 & 0.25 \end{pmatrix} \quad W(\mathbf{G}) = 9,5$$

Вывод: с помощью графов можно представить строение молекул органических веществ, их изомеров; расчет топологических индексов позволяет прогнозировать физико-химические свойства веществ, количественно отражать одну из основных идей химии – «Структура определяет свойства».

Задача:

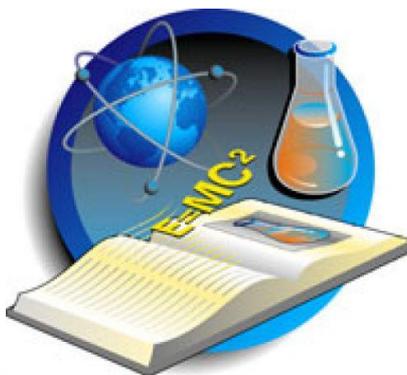
Рассчитайте параметры молекулы *пара*-этилфенола (а, в), исходя из значений длин связей (нм), учитывая вид гибридизации атомов.

Справочник химика /под ред. Б.П. Никольского. – М-Л.: Химия, 1982, Т.1, С. 352-353.



$$\begin{aligned}
 a = & l(O - H) \cdot \sin(109,5^\circ - 90^\circ) + l(O - C_{\text{аром}}) + 2l(C_{\text{аром}} - C_{\text{аром}}) + l(C_{\text{аром}} - C_{\text{алкан}}) + \\
 & + l(C_{\text{алкан}} - C_{\text{алкан}}) + \frac{2l(C_{\text{алкан}} - H) \cdot \sin\left(\frac{109,5^\circ}{2}\right)}{\sqrt{3}} = 0,856 \text{ нм}
 \end{aligned}$$

$$b = 2l(C_{\text{аром}} - C_{\text{аром}}) \cdot \sin 60^\circ + 2l(C_{\text{аром}} - H) \cdot \sin 60^\circ = 0,430 \text{ нм}$$



Заключение

В данной работе были рассмотрели примеры, показывающие, как некоторые математические понятия используется в химии.

«...История науки говорит о том, что на границах различных областей знания могут происходить очень интересные события. И хотя химики и математики мыслят совсем по-разному, те случаи, когда им удается взаимодействовать, приводят к появлению красивых и нетривиальных результатов и способствуют обогащению обеих наук».



*В.В. Еремин,
доктор наук, профессор МГУ им. М.
В. Ломоносова*



Список использованных источников

1. Ерёмин В.В. Математика в химии. – М.: МЦНМО, 2011. – 64 с.
2. <http://www.scienceforum.ru/2014/454/346>
3. <http://nsportal.ru/shkola/khimiya/library/2013/03/10/mezhpredmetnye-svyazi-khimii-i-matematiki>

