

Лекция 4.

4. Системы дифференциальных уравнений.

4.1. Общие определения. Нормальные системы дифференциальных уравнений.

- Существуют процессы, где одной функции недостаточно для описания процесса. Далее t - независимая переменная;
 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ (или $x(t), y(t), z(t)$ если функций не больше трех) - неизвестные функции.

Определение. Системой дифференциальных уравнений называют совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимые переменные, искомые функции и их производные.

Многие системы дифференциальных уравнений можно привести к нормальной системе.

• **Пример.**
$$\begin{cases} x' + 2y' - x = 0, \\ x' - 3y' + y = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{1}{5}(3x - 2y + 2t), \\ y' = \frac{1}{5}(x + y - t). \end{cases}$$

- Некоторые системы дифференциальных уравнений нельзя привести к нормальной системе. Их рассматривать не будем.

• **Пример.**
$$\begin{cases} x' + y' - tx = 0, \\ x' + y' + y = 0. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений, содержащая производные высших порядков, может быть приведена к нормальной системе.

• **Пример.**
$$\begin{cases} x_1'' + tx_2 = 0, \\ x_2'' + 2x_1' - x_2 = 0. \end{cases}$$

• Введем дополнительные функции
$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4. \end{cases}$$

• Тогда
$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = -tx_2, \\ x_4' = x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

• Одно дифференциальное уравнение n - го порядка может быть сведено к нормальной системе дифференциальных уравнений.

• **Пример.** $x''' = f(t, x, x', x'').$
$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = f(t, x, y, z). \end{cases}$$

 $y = x', z = y' = x''.$

Нормальная система дифференциальных уравнений, обычно, может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен числу уравнений системы.

• **Пример**
$$\begin{cases} x' = y, & x'' = y' = z, \quad x''' = z' = x - y + z, \Rightarrow \\ y' = z, \\ z' = x - y + z. \end{cases} \Rightarrow x''' = x - x' + x''.$$

$$r^3 - r^2 + r - 1 = (r^2 + 1)(r - 1) = 0.$$

$$r_{1,2} = \pm i, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad s = 1. \quad r_3 = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad s = 1.$$

$$x = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

$$y = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t, \quad z = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t.$$

Обратный случай, когда система дифференциальных уравнений не может быть сведена к одному дифференциальному уравнению.

• Пример
$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = z, \\ z' = y. \end{cases}$$

• Первое уравнение не зависит от остальных.

$$x' = x, \quad y'' = z' = y.$$

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad z = y' = C_1 e^t - C_2 e^{-t}, \quad x = C_3 e^t.$$

Теорема.

- Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений непрерывны вместе со своими частными производными в окрестности значений $t_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$, то в достаточно малом интервале $[t_0 - h, t_0 + h]$ существует единственная система функций $x_1(t), \dots, x_n(t)$, являющаяся решением системы и удовлетворяющая начальным условиям.

Предположим, что корни действительные и простые.

Рассмотрим решение на примере системы трех уравнений.

Пусть корень равен r_1

$$\begin{cases} (a_{11} - r_1)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - r_1)k_2 + a_{23}k_3 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33} - r_1)k_3 = 0. \end{cases}$$

- Определитель системы равен нулю. Примем, что если r_1 - простой корень, то, по крайней мере, один из миноров 2-го порядка не равен нулю. Тогда одно из уравнений следует из остальных. Решение системы зависит от одной произвольной постоянной.

- Пусть первые два уравнения линейно независимы.

Тогда одно из решений будет

$$k_1^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{12} & C_1 \\ a_{22} - r_1 & C_2 \end{vmatrix}, \quad k_2^{(1)} = \begin{vmatrix} C_1 & a_{22} - r_1 \\ C_2 & a_{12} \end{vmatrix}, \quad k_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11} - r_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - r_1 \end{vmatrix}.$$

- Все остальные решения получаются умножением чисел $k_1^{(1)}$, $k_2^{(1)}$, $k_3^{(1)}$ на одну и ту же произвольную постоянную.

Поступая так со всеми корнями характеристического уравнения, найдем три системы функций, каждая из которых является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &k_1^{(1)} e^{r_1 t}, k_2^{(1)} e^{r_1 t}, k_3^{(1)} e^{r_1 t}; \\ &k_1^{(2)} e^{r_2 t}, k_2^{(2)} e^{r_2 t}, k_3^{(2)} e^{r_2 t}; \\ &k_1^{(3)} e^{r_3 t}, k_2^{(3)} e^{r_3 t}, k_3^{(3)} e^{r_3 t}. \end{aligned}$$

- Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 k_1^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_1^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_1^{(3)} e^{r_3 t}, \\ x_2 &= C_1 k_2^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_2^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_2^{(3)} e^{r_3 t}, \\ x_3 &= C_1 k_3^{(1)} e^{r_1 t} + C_2 k_3^{(2)} e^{r_2 t} + C_3 k_3^{(3)} e^{r_3 t}. \end{aligned}$$

Примеры

4. Найти решение задачи Коши для системы линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 7y \\ \frac{dy}{dt} = x - 4y \end{cases} \quad x(0) = -3, y(0) = -1$$

Решение: Перепишем системы в механических обозначениях:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 7y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$$

Характеристическое уравнение: $k^2 + 2k - 15 = 0 \Rightarrow k_1 = -5, k_2 = 3.$

Запишем общее решение: $x(t) = C_1 e^{-5t} + C_2 e^{3t}$

Выразив из 1-го уравнения y и подставив в него $x(t)$, получим решение $y(t)$

$$y(t) = \frac{\dot{x} - 2x}{7} = \frac{-5C_1 e^{-5t} + C_2 e^{3t} - 2C_1 e^{-5t} - 2C_2 e^{3t}}{7} = -C_1 e^{-5t} + \frac{C_2}{7} e^{3t}$$

Найдем из начальных условий C_1 и C_2 .

$$x(0) = -C_1 + C_2 = -3$$

$$y(0) = -C_1 + \frac{C_2}{7} = -1 \Rightarrow \frac{8}{7} C_2 = -4 \Rightarrow C_2 = -\frac{7}{2}, C_1 = 1 + \frac{C_2}{7} = \frac{1}{2}$$

Ответ:

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-5t} - \frac{7}{2} C_2 e^{3t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} e^{-5t} - \frac{1}{2} e^{3t}$$

5. Найти общее решение системы линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 2y - e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y \end{cases}$$

Перепишем систему в механических обозначениях:

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 2y - e^{2t} \\ \dot{y} = 3x + 6y \end{cases}$$

Решим систему методом исключения, для чего продифференцируем второе уравнение системы (как более простое).

$\ddot{y} = 3\dot{x} + 6\dot{y}$ (1) и выразим из него же x :

$$x = \frac{\dot{y} - 6y}{3} \quad (2)$$

Подставим в (1)

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= 3(5x + 2y - e^{2t}) + 6(3x + 6y) = 15x + 6y - 3e^{2t} + 18x + 36y = \\ &= 33x + 42y - 3e^{2t} \end{aligned}$$

Подставим вместо x выражение (2):

$$\ddot{y} = 11(\dot{y} - 6y) + 42y - 3e^{2t}$$

Раскроем скобки и перенесем: $\ddot{y} - 11\dot{y} + 24y = -3e^{2t}$

Решаем полученное линейное неоднородное дифференциальное уравнение:

Характеристическое уравнение

$$k^2 - 11k + 24 = 0, k_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 96}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2}, k_1 = 8, k_2 = 3$$

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{8t} + C_2 e^{3t}$$

Найдем $y_{\text{чн}}$ в виде: $y_{\text{чн}} = Ae^{2t}$

$$\begin{array}{l|l}
 24 & y_{\text{чн}} = Ae^{2t} & 24A - 22A + 4A = -3 \\
 -11 & y'_{\text{чн}} = 2Ae^{2t} & \\
 1 & y''_{\text{чн}} = 4Ae^{2t} & 6A = -3 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}
 \end{array}$$

$$y_{\text{оН}}(t) = C_1 e^{8t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$x(t) = \frac{\dot{y} - 6y}{3} = \frac{8C_1 e^{8t} + 3C_2 e^{3t} - e^{2t} - 6C_1 e^{8t} - 6C_2 e^{3t} + 3e^{2t}}{3} = \frac{2}{3} C_1 e^{8t} - C_2 e^{3t} + \frac{2}{3} e^{2t}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \begin{cases} x(t) = \frac{2}{3} C_1 e^{8t} - C_2 e^{3t} + \frac{2}{3} e^{2t} \\ y(t) = C_1 e^{8t} + C_2 e^{3t} - \frac{1}{2} e^{2t} \end{cases}$$