



Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = 0$$

где $p(x)$, $q(x)$ – известные функции.

Общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \quad (2)$$

где c_1, c_2 – произвольные постоянные, $y_1(x), y_2(x)$ – два линейно независимых решения уравнения (1), т.е. функции, вронскиан которых

отличен от нуля: $W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$.

Если $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ – начальные условия, то фиксированные значения постоянных c_1 и c_2 для частного решения определяются системой

$$\begin{cases} y_0 = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \\ y'_0 = c_1 \cdot y'_1(x) + c_2 \cdot y'_2(x) \end{cases} \Rightarrow c_1^0; c_2^0$$

Частное решение имеет вид:

$$y(x) = c_1^0 \cdot y_1(x) + c_2^0 \cdot y_2(x) \quad (3)$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \quad (4)$$

где $p = \text{const}$, $q = \text{const}$


$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0 \quad (4)$$

Если обозначить $y' = k$, $y'' = k^2$,
то характеристическое уравнение д.у. (4) имеет вид

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (5)$$

и общее решение определяется одной из формул

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (5)$$

№	Общее решение ЛОДУ (4)	Корни характеристического уравнения
1	$y = c_1 \cdot e^{k_1 x} + c_2 \cdot e^{k_2 x}$	k_1, k_2 – различные действительные корни уравнения (5)
2	$y = c_1 \cdot e^{kx} + c_2 \cdot x \cdot e^{kx} = e^{kx} (c_1 + xc_2)$	$k_1 = k_2 = k, D = 0$ – равные действительные корни уравнения (5)
3	$y = e^{\alpha x} (c_1 \cdot \cos \beta x + c_2 \cdot \sin \beta x)$	$k_1, k_2 = \alpha \pm \beta i$, где $\beta \neq 0$ – сопряженные комплексные корни (5), $D < 0$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейные неоднородные д.у. второго порядка имеют вид

$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x) \quad (6)$$

Соответствующее ему однородное уравнение получается заменой $f(x)$ нулем.


$$y'' + p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y = f(x) \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6) определяется как сумма частного решения данного неоднородного уравнения ($y_{\text{част}}$) и общего решения, соответствующего ему однородного уравнения ($y_{\text{одн}}$):

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{част}} \quad (7)$$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения 2 порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \quad (8)$$

Форму частного решения с неопределенными коэффициентами для уравнения (8) можно найти по виду функции $f(x)$. Затем подставить его в уравнение (8) и найти коэффициенты

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \quad (8)$$

№	Вид функции $f(x)$	Ожидаемая формула частного решения
I	$f(x) = P_n(x)$ – многочлен степени n с действительными коэффициентами	$y_{\text{част}} = x^r \cdot Q_n(x)$ $r = 0$, если среди корней характеристического уравнения нет нулей $r = 1$, если один из корней хар. ур-ия равен нулю $r = 2$, если оба корня хар. ур-ия нули

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \quad (8)$$

II	$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$	$y_{\text{част}} = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$ $r = 0$, если число α не является корнем хар. ур-ия $r = 1$, если один из корней хар. ур-ия равен α $r = 2$, если оба корня хар. ур-ия равны α
----	------------------------------------	--

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \quad (8)$$

III	$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x],$ где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m	а) $y_{\text{част}} = e^{\alpha x} \cdot [M_l(x) \cos \beta x + N_l(x) \sin \beta x]$, если числа $(\alpha \pm \beta i)$ не являются корнями характеристического уравнения б) $y_{\text{част}} = x e^{\alpha x} \cdot [M_l(x) \cos \beta x + N_l(x) \sin \beta x]$, если $(\alpha \pm \beta i)$ – корни характеристического уравнения, $l = \max\{n, m\}$
-----	---	--


$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x) \quad (8)$$

IV	$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)$	$y_{\text{част}} = y_{\text{част1}} + y_{\text{част2}} + y_{\text{част3}}$
----	-----------------------------------	--

