

**Понятие
производной.
Урок лекция на 2
часа.**

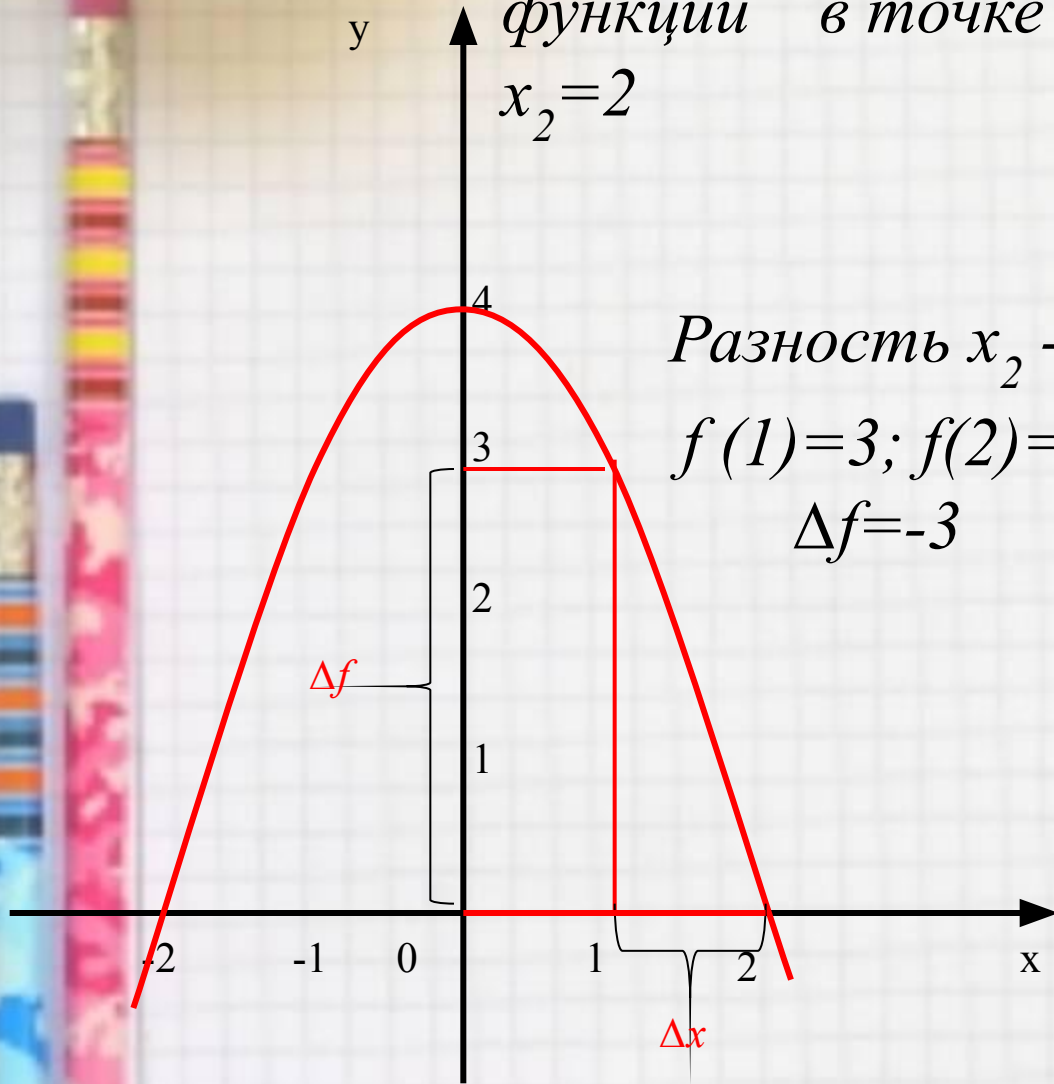
Содержание

1. Приращение функции
2. Геометрический смысл приращения функции
3. Понятие производной.
4. Алгоритм нахождения производной Алгоритм нахождения производной.
5. Примеры.

Приращение функции

A top-down view of a desk with various school supplies. In the center is a sheet of white graph paper with a black grid. To the left, there are several pens and pencils: a blue pen, a pink and yellow patterned pencil, and a blue and orange patterned pencil. To the right, there is a red pencil sharpener, a blue and white patterned spiral notebook, a yellow sticky note, and a brown pencil. The background is a light-colored wooden desk.

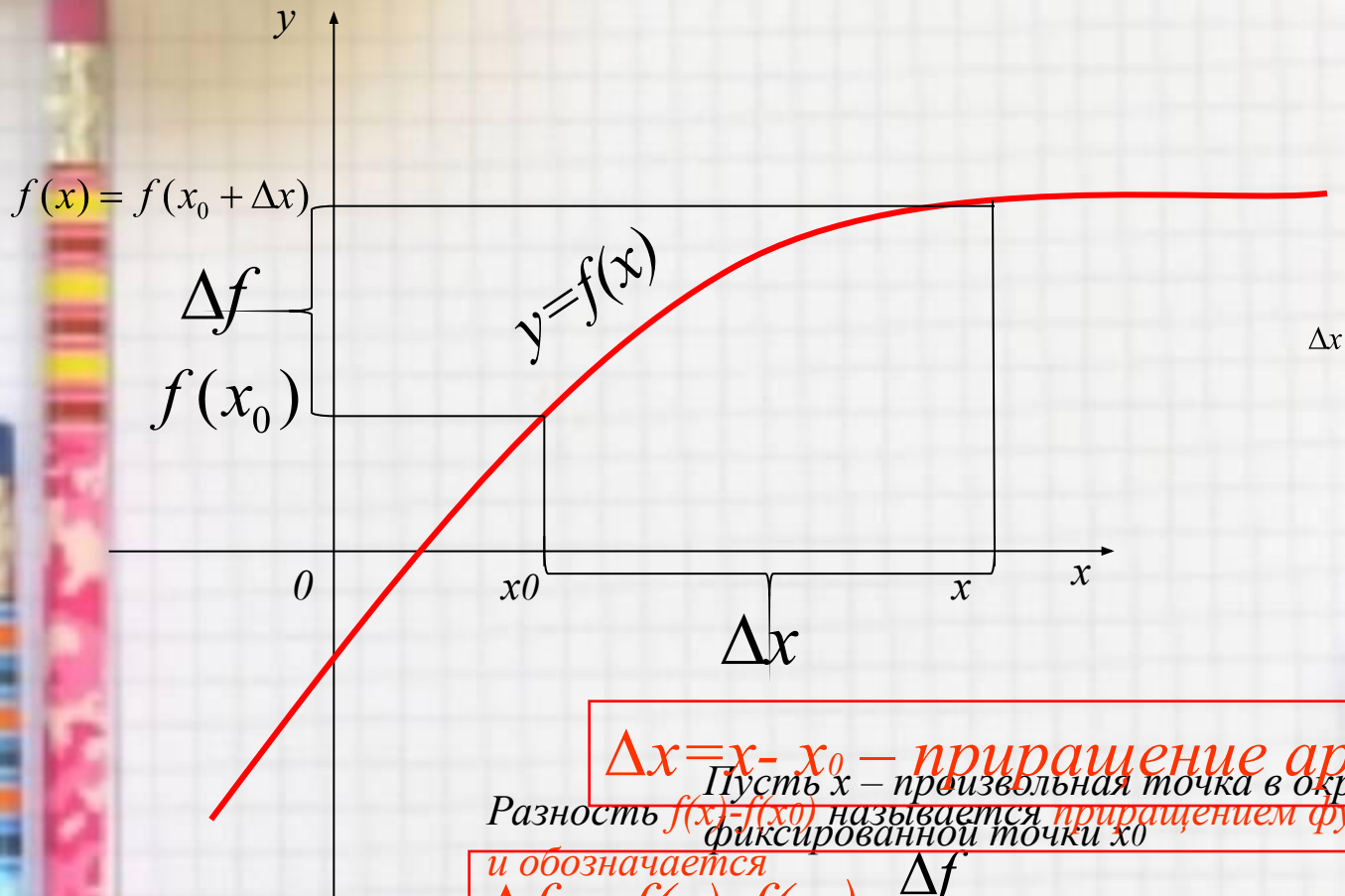
Дан график функции $y=4-x^2$
По графику найти значение
функции в точке $x_1=1$ и
 $x_2=2$



Разность $x_2 - x_1 = 2 - 1 = 1$; $\Delta x = 1$

$f(1) = 3$; $f(2) = 0$; $f(2) - f(1) = 0 - 3 = -3$
 $\Delta f = -3$

Пусть дана функция $y=f(x)$



$\Delta x = x - x_0$ — приращение аргумента

Пусть x — произвольная точка в окрестности
Разность $f(x) - f(x_0)$ называется приращением функции
фиксированной точки x_0

и обозначается

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ или
Разность $x - x_0$ называется

$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — приращение функции

$\Delta x = x - x_0$

$x = x_0 + \Delta x$

Пример 1:

Найти приращение аргумента и приращение функции в точке x_0 , если $f(x) = x^2$

$$x = 1,9 \quad x_0 = 2$$

Решение:

$$\Delta x = x - x_0;$$

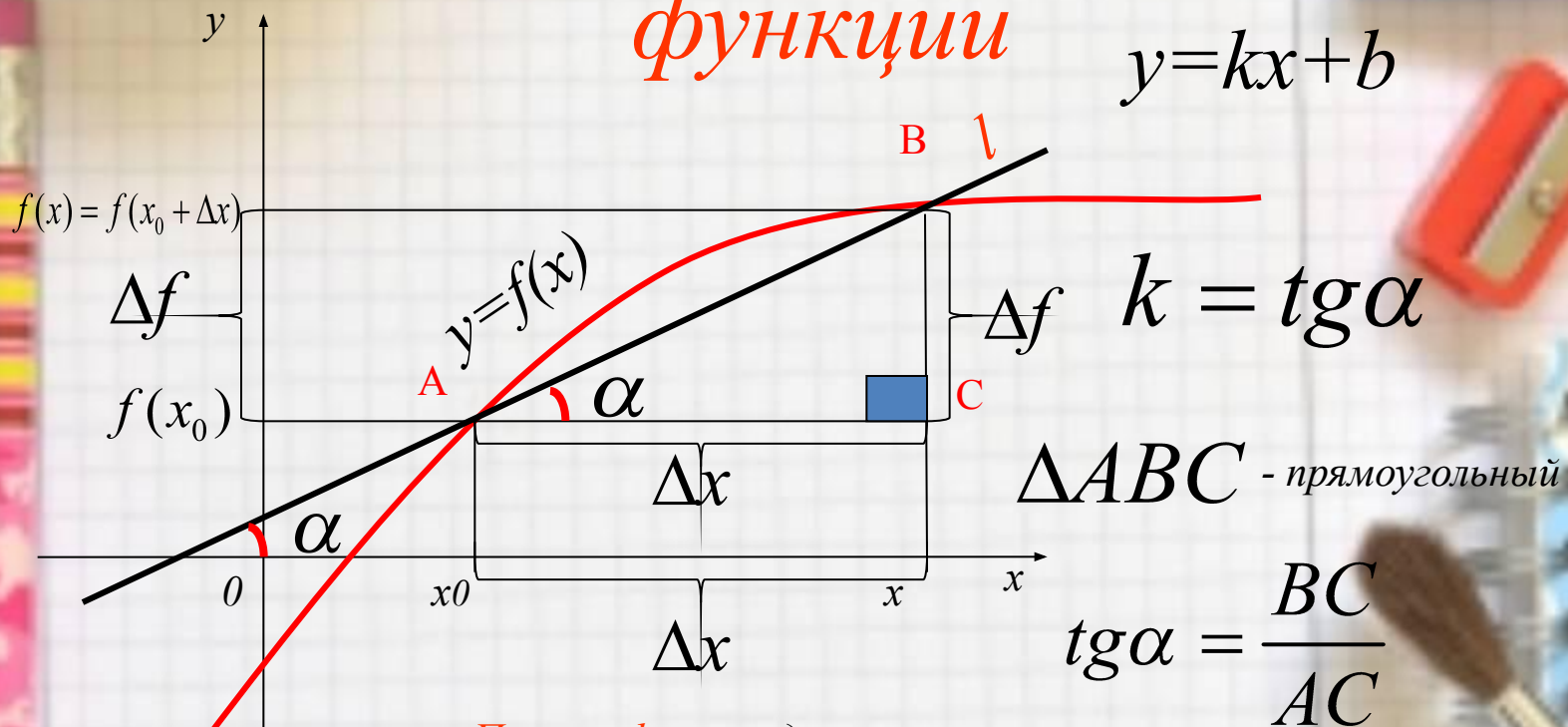
$$\Delta x = 1,9 - 2 = -0,1;$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0);$$

$$\Delta f = f(1,9) - f(2) = 1,9^2 - 2^2 = 3,61 - 4 = -0,39$$

Ответ : $\Delta x = -0,1; \Delta f = -0,39$

Геометрический смысл приращения функции



Прямая l , проходящая через любые две точки графика функции, называется *секущей* к графику функции.

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

-угловой коэффициент
секущей к графику
функции

Пример

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2; x_0 = 0; x = 1$$

Решение: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x};$

$$\Delta x = x - x_0; \quad \Delta f = f(x) - f(x_0);$$

$$\Delta x = 1 - 0 = 1; \quad \Delta f = f(1) - f(0) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \approx 0 \Rightarrow \alpha -$$

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}; \alpha - \text{острый}$

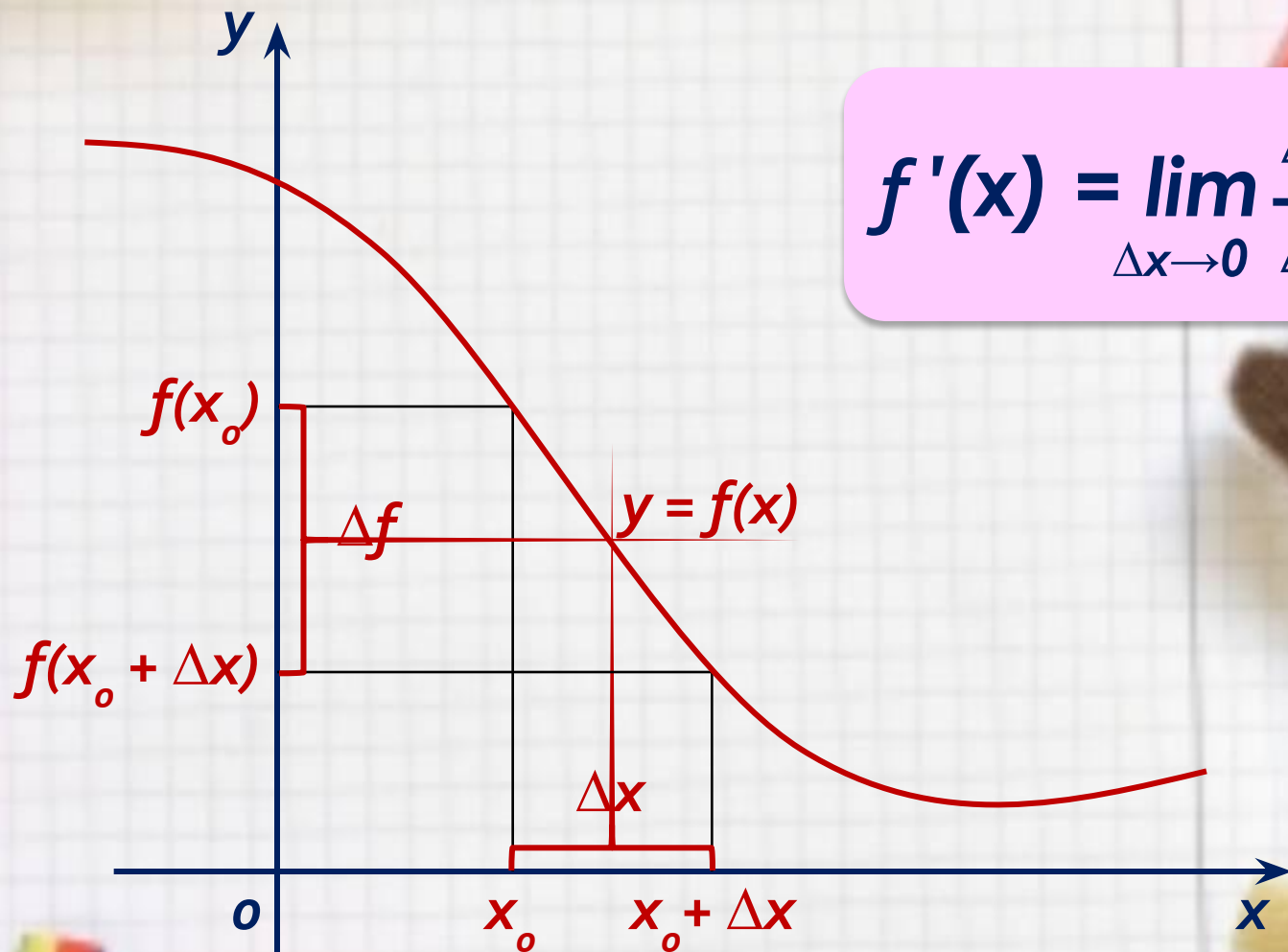
Понятие производной

Производной функции $y = f(x)$, заданной на некотором интервале $(a; b)$, в некоторой точке x этого интервала называют **предел** отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют **дифференцированием**

Понятие производной



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Алгоритм нахождения производной

1. Зафиксировать значение x_0 , найти $f(x_0)$.
2. Дать аргументу x_0 приращение Δx , перейти в новую точку $x_0 + \Delta x$, найти $f(x_0 + \Delta x)$.
3. Найти приращение функции: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
4. Составить отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$.
5. Вычислить $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.
6. Этот предел и есть $f'(x_0)$.

Примеры

1. Найти производную функции $y = kx + b$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = kx_0 + b$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = k(x_0 + \Delta x) + b$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k(x_0 + \Delta x) + b - (kx_0 + b) = \\ = kx_0 + k \cdot \Delta x + b - kx_0 - b = k \cdot \Delta x$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k \cdot \Delta x}{\Delta x} = k$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (k) = k$$

$$(kx + b)' = k$$

Примеры

2. Найти производную функции $y = C$ ($C - const$) в точке x_0

1. $f(x_0) = C$

2. $f(x_0 + \Delta x) = C$

3. $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$

4. $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$

5. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$

$(C)' = 0$

Примеры

3. Найти производную функции $y = x^2$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = (x_0)^2$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2 = \\ = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

$$(x^2)' = 2x$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = \sqrt{x_0}$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = \sqrt{x_0 + \Delta x}$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} = \\ = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} =$$

$$= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

Примеры

4. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке x_0 .

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Примеры

5. Найти производную функции $y = 1/x$ в точке x_0

$$1. f(x_0) = \frac{1}{x_0}$$

$$2. f(x_0 + \Delta x) = \frac{1}{x_0 + \Delta x}$$

$$3. \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \\ = \frac{x_0 - (x_0 + \Delta x)}{x_0(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x(x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

Примеры

5. Найти производную функции $y = 1/x$ в точке x_0

$$4. \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x (x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x)} = \frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x}$$

$$5. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{-1}{x_0^2 + x_0 \cdot \Delta x} \right) = -\frac{1}{x_0^2}$$

$$\left(\frac{1}{x} \right)' = -\frac{1}{x^2}$$

Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	\sqrt{x}	$1/(2\sqrt{x})$
$kx + b$	k	e^x	e^x
x^2	$2x$	a^x	$a^x \ln a$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{tg} x$	$1/\cos^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$\operatorname{ctg} x$	$-1/\sin^2 x$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$1/x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$