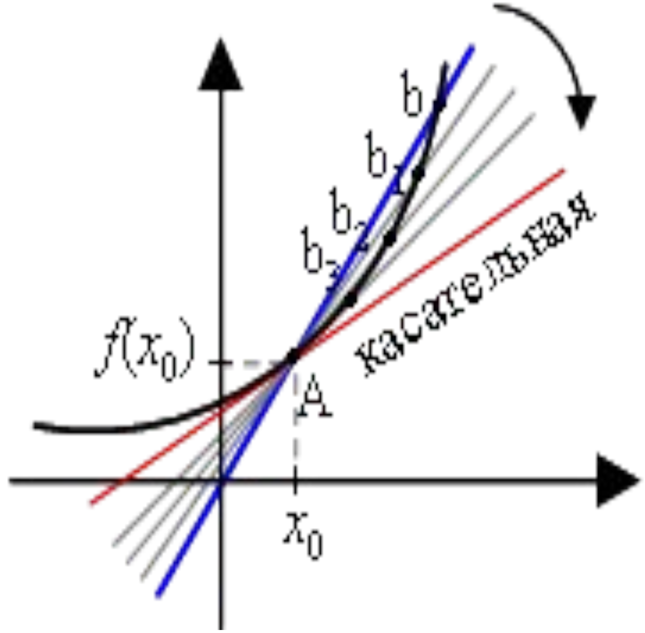
Тема:
Касательная к графику функции

11 класс

Учитель :Гагиева А.О.
МКОУ СОШ с. Новый Батако



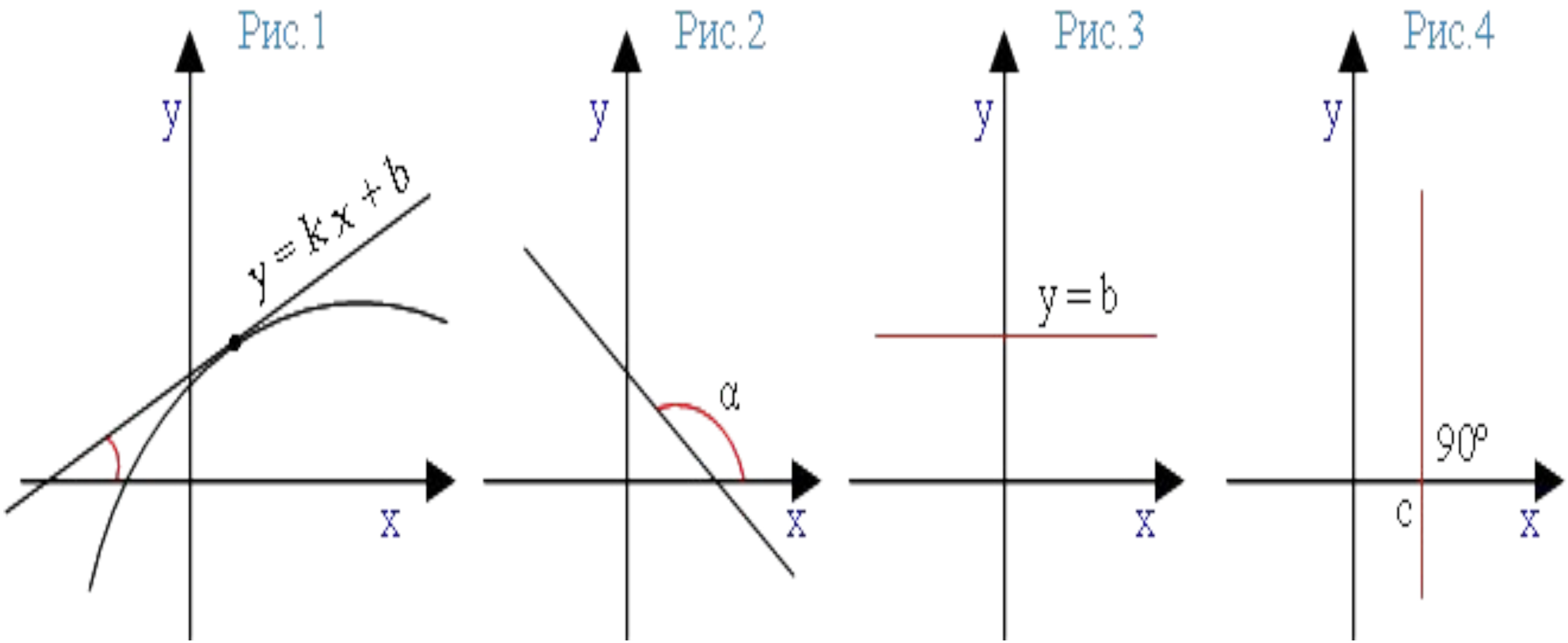
- **Касательная –** это прямая, проходящая через точку кривой и совпадающая с ней в этой точке с точностью до первого порядка (рис.).
- Другое определение: это предельное положение секущей при $\Delta x \to 0$.
- Пояснение: Возьмем прямую, пересекающую кривую в двух точках: A и b (см.рисунок). Это секущая. Будем поворачивать ее по часовой стрелке до тех пор, пока она не обретет только одну общую точку с кривой. Так мы получим касательную.

Строгое определение касательной:

- Касательная к графику функции f, дифференцируемой в точке x_o, - это прямая, проходящая через точку $(x_o; f(x_o))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_o)$.
- Угловой коэффициент имеет прямая вида $y = kx + b$. Коэффициент k и является **угловым коэффициентом** этой прямой.
- Угловой коэффициент равен тангенсу острого угла, образуемого этой прямой с осью абсцисс:

$$\boldsymbol{k = \mathrm{tg}\,\alpha}$$

Здесь угол α – это угол между прямой $y = kx + b$ и положительным (то есть против часовой стрелки) направлением оси абсцисс. Он называется **углом наклона прямой** (рис.1 и 2).



- Если угол наклона прямой $y = kx + b$ острый, то угловой коэффициент является положительным числом. График возрастает (рис.1).
- Если угол наклона прямой $y = kx + b$ тупой, то угловой коэффициент является отрицательным числом. График убывает (рис.2).
- Если прямая параллельна оси абсцисс, то угол наклона прямой равен нулю. В этом случае угловой коэффициент прямой тоже равен нулю (так как тангенс нуля есть ноль). Уравнение прямой будет иметь вид y = b (рис.3).
- Если угол наклона прямой равен 90° (π/2), то есть она перпендикулярна оси абсцисс, то прямая задается равенством $x = c$, где c – некоторое действительное число (рис.4).
-

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_o:

$$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$$

Алгоритм нахождения уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$:

- 1. Вычислить $f(x_o)$.
- 2. Вычислить производные $f'(x)$ и $f'(x_o)$.
- 3. Внести найденные числа x_o, $f(x_o)$, $f'(x_o)$ в уравнение касательной и решить его.

Пример. Найдем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ в точке с абсциссой 2.

Решение.

Следуем алгоритму.

- 1) Точка касания x_o равна 2. Вычислим $f(x_o)$:

$$f(x_o) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1$$

- 2) Находим $f'(x)$. Для этого применяем формулы дифференцирования, изложенные в предыдущем разделе. Согласно этим формулам, $x^2 = 2x$, а $x^3 = 3x^2$. Значит:

$$f'(x) = 3x^2 - 2 \cdot 2x = 3x^2 - 4x.$$

- Теперь, используя полученное значение $f'(x)$, вычислим $f'(x_o)$:

$$f'(x_o) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 12 - 8 = 4.$$

- 3) Итак, у нас есть все необходимые данные: $x_o = 2$, $f(x_o) = 1$, $f'(x_o) = 4$. Подставляем эти числа в уравнение касательной и находим окончательное решение:

$$y = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) = 1 + 4 \cdot (x - 2) = 1 + 4x - 8 = -7 + 4x = 4x - 7.$$

Ответ: $y = 4x - 7$.