

# 1. Предельные величины и эластичность в экономике

## Предельные издержки.

Пусть  $Q$  – объем произведенной продукции.  
 $C(Q)$  – издержки производства.

$$MC(Q) = C'(Q) = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q}$$

называется предельными издержками.

## Предельные издержки.

$$MC(Q) = C'(Q) \approx \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{C(Q + \Delta Q) - C(Q)}{\Delta Q},$$

если  $\Delta Q$  мало.

Если  $\Delta Q = 1$ , то

$$MC(Q) \approx C(Q + 1) - C(Q)$$

Предельные издержки показывают дополнительные затраты на производство дополнительной единицы продукции.

Предельный доход (предельная выручка).

Пусть  $Q$  – объем произведенной продукции.

$R(Q)$  – доход от ее реализации.

$$MR(Q) = R'(Q) = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta Q}$$

называется предельным доходом.

Предельный доход (предельная выручка).

$$MR(Q) = R'(Q) \approx \frac{\Delta R}{\Delta Q} = \frac{R(Q + \Delta Q) - R(Q)}{\Delta Q},$$

если  $\Delta Q$  мало.

Если  $\Delta Q = 1$ , то

$$MR(Q) \approx R(Q + 1) - R(Q)$$

Предельный доход показывает дополнительный доход от реализации дополнительной единицы продукции.

## Предельный доход (предельная выручка).

Пример 1. Производитель продает продукт на рынке совершенной конкуренции. Рыночная цена равна 5 ден.ед.

- 1) Найти функцию выручки  $R(Q)$  и построить график
- 2) Найти функцию предельной выручки  $MR(Q)$  и построить график

## Предельный доход (предельная выручка).

Пример 2. Производитель продает продукт на монопольном рынке.

$$P(Q) = 100 - Q \quad \text{функция спроса}$$

- 1) Найти функцию выручки  $R(Q)$  и построить график
- 2) Найти функцию предельной выручки  $MR(Q)$  и построить график

## Эластичность в экономике.

$$E_x(y) = y'(x) \cdot \frac{x}{y}$$

Эластичность показывает на сколько процентов изменится функция при изменении аргумента на 1%.

## Эластичность в экономике.

а) Пусть  $Q(P)$  – функция спроса от цены.

$$E_P(Q) = Q' \cdot \frac{P}{Q} \quad - \text{ эластичность спроса по цене.}$$

- показывает на сколько процентов изменится спрос при увеличении цены на 1%.

$$E_P(Q) < 0$$



## 2. Эластичность в экономике.

Пример 1  $Q(P) = -0,05P + 10$  – функция спроса на некоторый продукт.

- 1) Найти эластичность спроса по цене для  $P=20$  ден.ед.,  $P=100$  ден.ед.,  $P=150$  ден.ед.
- 2) Дать экономическую интерпретацию
- 3) Построить график эластичности в зависимости от цены (EXCEL).

## 2. Эластичность в экономике.

Пример 2 Функция спроса задана формулой  $Q(p) = 2 / p$

- 1) Какова эластичность спроса в точке  $p = 2$ .
- 2) Дать экономическую интерпретацию
- 3) Построить график эластичности в зависимости от цены (EXCEL).

## Эластичность в экономике.

Если  $E_P(Q) < -1$ , то спрос называют эластичным.

Если  $E_P(Q) \in (-1, 0)$ , то спрос называют неэластичным.

Если  $E_P(Q) = -1$ , то спрос называют спросом с единичной эластичностью.

Если  $E_P(Q) = 0$ , то спрос называют совершенно неэластичным.

## 2. Эластичность в экономике.

б) Пусть  $Q(I)$  – функция спроса от дохода.

$$E_I(Q) = Q' \cdot \frac{I}{Q} \quad - \text{ эластичность спроса по доходу.}$$

- показывает на сколько процентов изменится спрос при увеличении дохода на 1%.

$$E_I(Q) > 0$$

## Эластичность в экономике.

в) Пусть  $Q(P)$  – функция предложения от цены.

$$E_P(Q) = Q' \cdot \frac{P}{Q} \quad \begin{array}{l} \text{-эластичность предложения} \\ \text{по цене.} \end{array}$$

- показывает на сколько процентов изменится предложение при увеличении цены на 1%.

$$E_P(Q) > 0$$

## Соотношение эластичности спроса и предельного дохода.

Пусть  $Q(P)$  – функция спроса на некоторый товар;

$R(P) = P \cdot Q(P)$  – функция дохода от реализации товара;

$MR(P) = R'(P)$  - предельный доход.

$MR(P) > 0$  или  $MR(P) < 0$  ?

Соотношение эластичности спроса и предельного дохода.

$$MR(P) = Q(P) \cdot (E_P(Q) + 1)$$

Если  $E_P(Q) < -1$ , т.е. спрос эластичен, то  $MR(P) < 0$ , т.е. увеличение цены приведет к уменьшению дохода.

## Соотношение эластичности спроса и предельного дохода.

$$MR(P) = Q(P) \cdot (E_P(Q) + 1)$$

Если  $E_P(Q) \in (-1, 0)$ , т.е. спрос неэластичен, то  $MR(P) > 0$ , т.е. увеличение цены приведет к увеличению дохода.



## Соотношение эластичности спроса и предельного дохода.

$$MR(P) = Q(P) \cdot (E_P(Q) + 1)$$

Если  $E_P(Q) = -1$ , т.е. спрос с единичной эластичностью, то  $MR(P) = 0$ , т.е. увеличение цены не изменит доход.

## Соотношение эластичности спроса и предельного дохода.

Вывод: С возрастанием цены для продукции с эластичным спросом суммарный доход уменьшается, а для товаров неэластичного спроса увеличивается.

## Соотношение эластичности спроса и предельного дохода.

Пример: Функция спроса на некоторый товар  $Q(P) = -2P + 12$  при  $P \leq 6$ ,  $Q(P) = 0$  при  $P > 6$ .

- 1) Составить функцию дохода  $R(P)$
- 2) Построить графики функции дохода  $R(P)$
- 3) Найти функцию предельного дохода  $MR(P)$
- 4) Построить график функции предельного дохода  $MR(P)$
- 5) Определить на графиках участки эластичного и неэластичного спроса.
- 6) Какие рекомендации по ценовой политике можно дать производителю, если в настоящий момент цена  $P = 2$  ден.ед.,  $P = 4$  ден.ед.

## 2. Задачи на Максимизацию прибыли

$$C(Q) = \frac{Q}{2} + \frac{Q^3}{8} \quad - \text{ функция издержек}$$

$$P(Q) = 8 - \frac{Q}{2} \quad - \text{ функция спроса}$$

- 1) Составить функцию прибыли  $\Pi(Q)$
- 2) Найти  $Q$ , при котором прибыль максимальна аналитически (без компьютера).
- 3) Изобразить график функции  $\Pi(Q)$  (Excel)
- 4) Найти  $Q$ , при котором прибыль максимальна с помощью Excel
- 5) Сравните результат аналитического решения и решения Excel

## 2. Задачи на Максимизацию прибыли

$$C(Q) = \frac{Q}{2} + \frac{Q^3}{8} \quad - \text{ функция издержек}$$

$$P(Q) = 8 - \frac{Q}{2} \quad - \text{ функция спроса}$$

I	J	K	L
	Q=	0	
	R(Q)=	0	

любое значение

формула для R(Q)

## 2. Задачи на максимизацию прибыли

I	J	K	L
	Q=		0
	R(Q)=		0

Сервис – Поиск решения

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

## 2. Задачи на максимизацию прибыли

G	H	I	J
	Q=	3,333333	
	R(Q)=	14,81481	

## 2. Задачи на максимизацию прибыли

$$C(Q) = 10 + Q + \frac{Q^2}{2} - \text{функция издержек}$$

$$P(Q) = 8 - \sqrt{Q} - \text{функция спроса}$$

- 1) Составить функцию прибыли  $\Pi(Q)$
- 2) Найти  $Q$ , при котором прибыль максимальна аналитически (без компьютера).
- 3) Изобразить график функции  $\Pi(Q)$  (Excel)
- 4) Найти  $Q$ , при котором прибыль максимальна с помощью Excel
- 5) Сравните результат аналитического решения и решения Excel



## **2. Задачи на Максимизацию прибыли**

4.181; 4.182; 4.184-4.186; 4.187-4.190; 4.193; 4.194

### 3. Задачи на максимизацию прибыли функций двух и более переменных

Пример 1 Фирма производит 2 товара и продает их по ценам 8 и 10 д.е. Функция издержек

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2$$

- 1) Составит функцию прибыли
- 2) Найти объемы производства, при которых прибыль максимальна аналитически.
- 3) Найти объемы производства, при которых прибыль максимальна с помощью Поиск решения Excel.

Необходимое условие экстремума. Пусть  $(x_0, y_0)$  - точка экстремума функции  $z=f(x, y)$ . Тогда

$$\begin{cases} z'_x(x_0, y_0) = 0; \\ z'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

## Экстремум функции двух переменных.

Достаточное условие экстремума. Пусть  $(x_0, y_0)$  - критическая точка функции  $z=f(x, y)$ .

$$A = z''_{xx}(x_0, y_0); B = z''_{xy}(x_0, y_0); C = z''_{yy}(x_0, y_0); \Delta = AC - B^2$$

Тогда

- 1) Если  $\Delta > 0, A < 0$ , то  $(x_0, y_0)$  - точка максимума
- 2) Если  $\Delta > 0, A > 0$ , то  $(x_0, y_0)$  - точка минимума
- 3) Если  $\Delta < 0$ , то  $(x_0, y_0)$  не является точкой экстремума

# Экстремум функции двух переменных.

Пример 1 Фирма производит 2 товара и продает их по ценам 8 и 10 д.е. Функция издержек

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2$$

	A	B	C	D
1	Q1=	0	P1=	8
2	Q2=	0	P2=	10
3				
4	П=	0		
5				

формула для прибыли



# Экстремум функции двух переменных.

	A	B	C	D
1	Q1=	0	P1=	8
2	Q2=	0	P2=	10
3				
4	П=	0		
5				

**Поиск решения** [?] [X]

Установить целевую ячейку:  [X]

Равной:  максимальному значению  значению:   минимальному значению

Изменяя ячейки:  [X]

Ограничения:

# Экстремум функции двух переменных.

Пример 1 Фирма производит 2 товара и продает их по ценам 8 и 10 д.е. Функция издержек

$$C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2$$

	A	B	C	D
1	Q1=	1,999999	P1=	8
2	Q2=	3,999999	P2=	10
3				
4	П=	28		
5				
6				

# **3. Задачи на максимизацию прибыли функций двух и более переменных**

5.229-5.232



# 4. Экономические задачи на условный экстремум

Пример.  $Q(K,L)=KL$  – производственная функция. Единица капитала стоит 2 д.е., единица труда стоит также 2 д.е. На приобретение труда и капитала производитель может выделить 8 д.е.

Найти затраты труда и капитала, при которых объем выпуска максимален

- 1) решить задачу методом подстановки
- 2) решить задачу с помощью Поиск решения в Excel.

# 4. Экономические задачи на условный экстремум

Пример.  $Q(K,L)=KL$  – производственная функция. Единица капитала стоит 2 д.е., единица труда стоит также 2 д.е. На приобретение труда и капитала производитель может выделить 8 д.е.

A	B	C	D	E	F	G
K=	0	P <sub>k</sub> =	2		M=	8
L=	0	P <sub>l</sub> =	2			
Q=	0					
Ограничение		0				

Общая сумма

$=B1*B2 (K*L)$


цены единиц капитала и труда

$=D1*B1+D2*B2$  – расходы  $(K*P_K+L*P_L)$


# 4. Экономические задачи на условный экстремум

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	K=	0	Pk=	2		M=	8	
2	L=	0	Pl=	2				
3								
4	Q=	0						
5								
6	Ограничение		0					
7								

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:  

Равной:  максимальному значению  значению:   минимальному значению

Изменяя ячейки:  

Ограничения:

# 4. Экономические задачи на условный экстремум

	A	B	C	D	E	F	G
1	K=	0	Pk=	2		M=	8
2	L=	0	Pl=	2			
3							
4	Q=	0					
5							
6	Ограничение		0				
7							


**Добавление ограничения** ? X

Ссылка на ячейку:  =  Ограничение:


OK Отмена Добавить Справка


	A	B	C	D	E	F	G	H
1	K=	0	Pk=	2		M=	8	
2	L=	0	Pl=	2				
3								
4	Q=	0						
5								
6	Ограничение		0					
7								

**Поиск решения** ? X

Установить целевую ячейку:  

Равной:  максимальному значению  значению:   минимальному значению

Изменяя ячейки:  

Ограничения:  



# 4. Экономические задачи на условный экстремум

5.233-5.238