

# Практикум по математике

---

Занятие №1

Действительные числа

# 1. Между любыми двумя действительными числами расположено бесконечно много рациональных чисел

**Пример 1.** Среди всех обыкновенных несократимых дробей  $\frac{m}{n}$ ,  $m, n \in \mathbb{N}$ , лежащих между дробями а)  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{2}{3}$ ; б)  $\frac{16}{21}$  и  $\frac{17}{21}$ ; в)  $\frac{5}{17}$  и  $\frac{1}{3}$ , найдите такую дробь, которая имеет наименьший знаменатель.

# Пример 1.

*Решение, а)* Пусть  $\frac{1}{2} < \frac{m}{n} < \frac{1}{3}$ . Тогда  $3n < 6m < 4n$ . Таким образом, на интервале  $(3n; 4n)$  требуется найти наименьшее кратное 6. При  $n=1; 2; 3; 4$  интервал  $(3n; 4n)$  не содержит кратных 6. При  $n=5$  интервал  $(3n; 4n)$  имеет вид  $(15; 20)$ , на котором лежит только одно число, кратное 6, а именно:  $18=6\cdot 3$ , т.е.  $m=3$ . Таким образом, условию задачи удовлетворяет дробь  $\frac{3}{5}$ .

# Проверь себя дома

Задания б) и в) решите самостоятельно. Вы получите

$$\text{б) } \frac{16}{21} < \frac{4}{5} < \frac{17}{21}; \quad \text{в) } \frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}.$$

**Пример 2.** При каком значении параметра  $a$  на интервале  $(5 - 2a; 2a + 7)$  лежит ровно 101 целое число?

*Решение.* При любом  $a$  серединой интервала  $(5 - 2a; 2a + 7)$  является число  $x_0 = \frac{(5 - 2a) + (2a + 7)}{2} = 6$ . Следовательно, чтобы на интервале  $(5 - 2a; 2a + 7)$  лежало ровно 101 целое число, необходимо и достаточно, чтобы в правой полукрестности точки 6 лежало ровно 50 натуральных чисел, что равносильно неравенству:

$$56 < 2a + 7 \leq 57 \Leftrightarrow 24,5 < a \leq 25.$$

Итак, условию задачи удовлетворяют только те  $a$ , для которых  $24,5 < a \leq 25$ .

## Для натуральных чисел справедлива основная теорема арифметики:

Каждое натуральное число  $n$ , большее 1, может быть представлено в виде произведения простых чисел, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей, т.е.

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k,$$

где  $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$  — простые числа. Напомним, что натуральное число  $p > 1$  называется **простым числом**, если оно имеет только два натуральных делителя: 1 и  $p$ . Натуральное число  $p > 1$ , не являющееся простым, называется **составным числом**. Множество простых чисел — бесконечное множество.

**Пример 3.** Решите уравнение  $x^2 - px + q = 0$ , где  $p, q$  — простые числа, если один корень этого уравнения также является простым числом.

*Решение.* Пусть  $x$  — простой корень данного уравнения. Тогда  $x \neq 0$  и данное уравнение равносильно уравнению  $x = p - \frac{q}{x}$ . Отсюда следует, что число  $\frac{q}{x}$  — целое. Значит, число  $x$  — делитель числа  $q$ . По условию  $x$  и  $q$  — простые числа, а число 1 не является простым числом. Следовательно,  $x = q$ . Подставляя  $x = q$  в данное уравнение, находим  $q = p - 1$ . Существует только два простых числа, разность между которыми равна 1. Это числа 3 и 2. Итак, данное уравнение имеет вид  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , а его корни 1 и 2.

На множестве  $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots\}$  целых чисел определена особая операция: деление с остатком. Справедлива теорема:

Для любых целых чисел  $a$  и  $b$  существуют единственные целое число  $c$  и целое неотрицательное число  $r$  такие, что  $a = bc + r$ , причем  $0 \leq r < |b|$ .

При  $r > 0$  число  $c$  называется неполным частным от деления  $a$  на  $b$ ; при  $r = 0$  число  $c$  есть частное от деления  $a$  на  $b$ ;  $b$  — делитель  $a$ ;  $a$  — кратное  $b$ . Говорят также, что число  $b$  делит число  $a$ . Записывают это так:  $b|a$  или, что то же самое, число  $a$  делится на  $b$ :  $a:b$ . Из определения делимости натуральных чисел следует, что если  $b|a$ , то  $1 \leq b \leq a$ . Поэтому число натуральных делителей натурального числа  $a$  конечно. Например, число 28 имеет ровно шесть натуральных делителей, а именно: 1; 2; 4; 7; 14; 28.



Пример 4. Определите последнюю цифру числа  $3^{4567}$ .

*Решение.* Посмотрим на неотрицательные целые степени числа 3:  $3^0=1$ ,  $3^1=3$ ,  $3^2=9$ ,  $3^3=27$ ,  $3^4=81$ ,  $3^5=243$ , ... Мы видим, что последние цифры этих степеней образуют периодическую последовательность цифр: 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; 1; 3; 9; 7; ... . Период этой последовательности равен 4. Поскольку  $4567=1141 \cdot 4 + 3$ , то последней цифрой данной степени является число 7.