«Подготовка к ЕГЭ: функции и их свойства»

Эта тематика очень широко представлена как в части 1, так и в части 2 вариантов ЕГЭ предыдущих лет: от трёх до пяти заданий. Даже некоторые задания на преобразование выражений или решение уравнений сформулированы так, что в условии есть слово «функция». Некоторые типы задач стабильно присутствуют в вариантах ЕГЭ, некоторые – несколько реже.

Одно задание – «картинка»: по графику производной функции следует получить информацию о самой функции. Это простая («полуустная») задача. Она есть абсолютно во всех вариантах, и нет оснований предполагать, что её не будет в вариантах ЕГЭ в дальнейшем. Весьма распространены задачи на множество значений и, несколько реже, на область определения функций.

Как правило, есть задание, связанное с простейшим исследованием свойств функции: возрастание, точки экстремума, ограниченность и т.п. Характерной особенностью является возможность решения таких задач без использования производной.

- В заданиях на нахождение области определения функции, заданной аналитически, чаще всего встречаются композиции функции вида y=f(t), где t=g(x). Область определения функций y можно найти как пересечение областей определения функций f(x) и g(x). **Например**, **задание** 1: найти область определения функции $y = \log_2(4 - x^2)$ **Решение**: областью определения функции

$$y = \log_2 t$$

- является промежуток $(0;+\infty)$, поэтому область определения функции $y = \log_2(4 - x^2)$ можно найти из неравенства $4 - x^2 > 0,$ -2 < x < 2.
- Ответ: (-2; 2).

Существует несколько приёмов нахождения множеств значений функций, заданных аналитически. Рассмотрим их на примерах.

Приём 1. ***Нахождение множества значений функции по её графику.***

Для этого надо спроектировать все точки графика на ось Оу. Полученный промежуток и будет множеством значений функции.

Приём 2. ***Нахождение множества значений функции с помощью производной.***

Приём 3. ***Последовательное нахождение множества значений функций, входящих в данную композицию функций (приём пошагового нахождения множества значений функции).*** Например,

Задание 2 (С2): ***найти множество значений функции***

$$y = \log_{0,1}\left(\frac{300}{1+\lg(100+x^2)}\right)$$

Решение: 1). $E(x^2) = [0;+\infty) \Rightarrow E(100 + x^2) = [100;+\infty).$

2). Так как функция y=lg t непрерывная и при неограниченном увеличении аргумента неограниченно возрастает, то

$$E(\lg(100 + x^2)) = (\lg 100;+\infty) = [2;+\infty).$$

Значит, $E(1 + \lg(100 + x^2)) = [3;+\infty).$

3). Так как функция $y = \frac{1}{t}$ - непрерывна и убывает на промежутке $[3;+\infty)$ то

$$E\left(\frac{300}{1+\lg(100+x^2)}\right) = (0;100]$$

4). Функция $y=\log_{0,1} x$- непрерывна, убывает на промежутке $(0;+\infty)$ и принимает все значения из интервала $(-\infty;+\infty)$, значит, на промежутке $(0;100]$ она имеет наименьшее значение , равное $\log_{0,1}100=-2$

Следовательно, $E(y)=\left[\log_{0,1}100;+\infty\right)=\left[-2;+\infty\right).$

Ответ: $\left[-2;+\infty\right)$

- **Приём 4.** ***Выражение х через у.*** **Заменяем нахождение множества значений данной функции нахождением области определения функции, обратной к данной.** Например,
- **задание 3:** ***найти множество значений***
- ***функции***

$$y = \frac{x^2+2}{x^2+3}$$

- Решение: выразим х через у:

$$x^2 y + 3y = x^2 + 2 \qquad x^2(y-1) = 2 - 3y$$

у

- *1-й случай*. Если у-1=0, то уравнение не принимает значения, равного 1.

$$x^2 + 3 = x^2 + 2$$

корней не имеет. Получили, что функция у не принимает значения, равного 1.

2-й случай. Если у-1 ≠ 0, то $x^2 = \frac{2-3y}{y-1}$

Так как $x^2 \geq 0$ то $\frac{2-3y}{y-1} \geq 0$

Решая это неравенство методом интервалов, получим $\frac{2}{3} \leq y < 1$

Ответ: $\left[\frac{2}{3};1\right)$

- **Приём 5. *Упрощение формулы, задающей дробно-рациональную функцию.*** Например, **задание 4. *Найти множество значений функции*** $y=\frac{x(x-4)}{x}$
- **Решение:** Области определения функций
- $y=\frac{x(x-4)}{x}$ и $y=x-4$ различны (отличаются одной точкой x=0). Найдем значение функции $y=x-4$ в точке x = 0: y(0) = - 4 .

$E(x-4)=(-\infty;+\infty)$

Множества значений функции

$y=\frac{x(x-4)}{x}$ и $y=x-4$

- будут совпадать, если из множества значений последней функции исключить значение y = -4.
- Ответ: $(-\infty;-4) \cup (-4;+\infty)$

Приём 6. ***Нахождение множества значений квадратичных функций*** (с помощью нахождения вершины параболы и установления характера поведения её ветвей).

- **Приём 7.** ***Введение вспомогательного угла для нахождения множества значений некоторых тригонометрических функций.*** Данный приём применяется для нахождения множества значений функции вида

y = asinx + bcosx или y= asin(px) + bcos(px), если

a ≠ 0 и b ≠ 0.

Рассмотрим ещё несколько заданий из части В, где используются свойства функций.

- **Задание 6. *Функция y = f(x) определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 5.***

При -1 < x ≤ 4 она задаётся формулой f(x) = $x^2 - 4x + 1$

Найдите значение выражения 5f(15) - 2f(-7).

- **Решение.** Представим число 15 в виде nT + a, где T = 5 – период функции,

n $\in$ ***Z***, a $\in$ $(-1;4]$, тогда по определению периодической функции f(15) = f(a). Так как 15 = 3·5 + 0, то f(15) = f(0). Поскольку на промежутке -1 < x ≤ 4 функция задана формулой

f(x) = $x^2 - 4x + 1$, то f(0) = $0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$

Итак, f(15) = 1. Аналогично получаем: f(-7) = f(-2 · 5 + 3) = f(3) =

$3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$

Следовательно, 5 f(15) – 2f(0-7) = 5·1 - 2·(-2) = 9.

Ответ: 9.

- **Задание 7.** ***Найдите наибольшее целое значение функции*** $y = \frac{7}{3}\sqrt{4\cos^2 x + 4\cos x + 8}$

Решение. Пусть cosx = t, где -1 ≤ t ≤ 1. Тогда подкоренное выражение принимает вид $4t^2 + 4t + 8$ Преобразуем этот многочлен, выделив полный квадрат двучлена: $(2t+1)^2 + 7$

- Функция $g(t) = (2t+1)^2 + 7$ непрерывна и при
- -1 ≤ t ≤ 1 принимает все значения из промежутка $[8;16]$. Следовательно, функция z = $\sqrt{g}$ принимает все значения из промежутка $[\sqrt{8};4]$

- Значит наибольшее целое значение функции $y=\frac{7}{3}\sqrt{4\cos^2 x+4\cos x+8}$, равно 9.

Ответ: 9.

Задачи третьей части блока «Функции» в экзаменационных материалах отличаются, как правило, от задач частей 1 и 2 сочетанием в условии различных элементарных функций. Различны и применяемые при решении методы. Объединяет их всё же использование ***функционального*** подхода, т.е. исследование свойств функции, полученной из основных элементарных функций. Например, присутствие в уравнении различных типов элементарных функций есть весьма надёжный признак того, что методы тождественных преобразований, замен переменных, упрощение выражений и т.п. сами по себе не приведут к ответу.

В таких ситуациях полезно использовать общие методы исследования функций на область определения и множество значений, на монотонность и экстремумы и т.д. Как правило, такое исследование невозможно без использования производных.

В следующей задаче с параметром одновременно используются свойства логарифмической, показательной и линейной функций.

Задание 8. Найдите все значения параметра а, при которых в области определения функции $y = \lg(a^{ax-2} - a^{x})$ лежат числа 13, 15, 17, но не лежат числа 3, 5, 7.

Решение1)по определению логарифма $x \in D(y)$ в том и только том случае, если $a^{ax-2} > a^x$.

При a=1 область определения пуста.

Рассмотрим два случая

2) 0<a<1. Тогда показательная функция с основанием *a* убывает и поэтому

$$a^{ax-2} > a^x, ax-2 < x, (1-a)x > -2$$

Так как $0 < a < 1, mo 1-a > 0.$ Значит, $D(y) = \left(-\frac{2}{1-a}; +\infty\right)$

Но в этом промежутке лежат все положительны числа и , в частности, числа 3,5,7. Поэтому такие *a* не удовлетворяют условию

3) a>1. Тогда показательная функция с основанием *a* возрастает и поэтому

$$a^{ax-2} > a^x, ax - 2 > x, (a-1)x > 2$$

Так как a>1, то a-1>0. Значит, $D(y) = (\frac{2}{a-1}; +\infty)$

В этом промежутке лежат числа 13,15,17, только тогда, когда его левый конец меньше 13. А для того, чтобы в нем не было чисел 3,5,7 нужно, чтобы левый конец был не меньше 7.

4) Получаем двойное неравенство на параметр *a*>1:

$$7 \le \frac{2}{a-1} < 13{,}7(a-1) \le 2 < 13(a-1), \frac{2}{13} < a-1 \le \frac{2}{7}.$$

Ответ: $\left(\frac{15}{13}; \frac{9}{7}\right]$