Модель поведения потребителя

Набор и пространство товаров

- Рассмотрим рынок, на котором продаются товары *n* видов. Пусть p_1, p_2, …, p_n – цены этих товаров.
- Вектор $\mathbf{p} = (p_1\ p_2\ \dots\ p_n)$ называют **вектором цен**
- Пусть некоторый потребитель обладает богатством *I* ден. ед., и x_i – это количество единиц *i*-го товара, которые данный потребитель приобретает на рынке ($i = 1, 2, \dots, n$). Вектор

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_+^n$$

называется **набором товаров**, а множество всех наборов товаров

$$C = \mathbb{R}_+^n = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0,\ \ \dots,\ \ x_n \geqslant 0 \right\}$$

называется **пространством товаров**

Бюджетное множество

- Стоимость набора товаров **x** равна $\mathbf{px} = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$

- **Бюджетное множество** B – это множество наборов товаров **x** ∈ C, которые может себе позволить приобрести при данных ценах p_1, p_2, …, p_n потребитель, обладающий богатством *I* (при этом предполагается, что тратить все деньги необязательно)

$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leqslant I, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0, \end{cases}$$

- Бюджетное множество является выпуклым, ограниченным и замкнутым

Пример 1

- В пространстве трех товаров известен вектор цен $\mathbf{p} = (2\ 5\ 6)$, богатство потребителя $I = 30$ ден. ед. Требуется описать бюджетное множество с помощью системы неравенств и изобразить его графически.

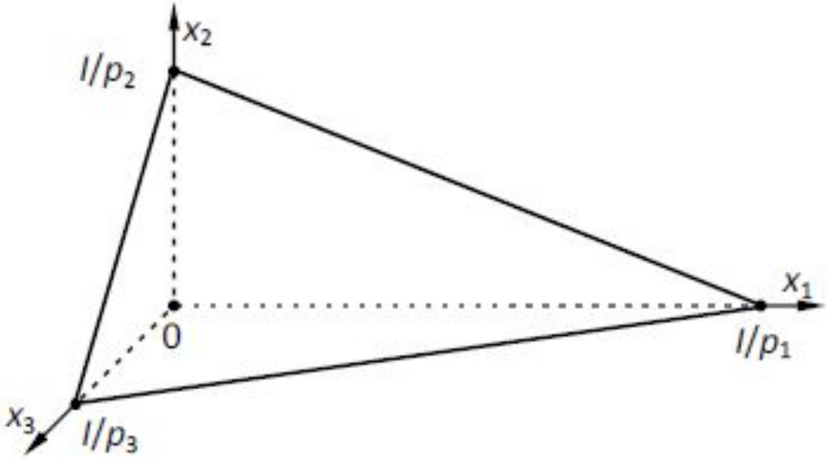
Пример построения бюджетного множества

- Бюджетное множество имеет вид

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 \leqslant 30,\; x_1 \geqslant 0,\; x_2 \geqslant 0,\; x_3 \geqslant 0 \right\}$$

и представляет собой трехгранную пирамиду, одна вершина которой находится в начале координат, а три другие — соответственно в точках

$I/p_1 = 30/2 = 15$, $I/p_2 =$ осях Ox_1, $O\,x_2$, и $O\,x_3$



Предпочтения потребителя

- Запись **x**$\succcurlyeq$**y** означает, что потребитель считает набор товаров **x** не хуже набора товаров **y**.
- **Первая аксиома потребителя:** относительно любых двух наборов товаров **x**, **y** $\in$ C потребитель может однозначно сказать, верно ли, что **x** $\succcurlyeq$ **y** .
- Тем самым, на пространстве товаров задано отношение **слабого предпочтения** «$\succcurlyeq$», которое определяет еще два отношения на пространстве товаров:
- **отношение равноценности** «$\sim$»: **x** $\sim$ **y** тогда и только тогда, когда одновременно верно, что **x** $\succcurlyeq$ **y** и **y** $\succcurlyeq$ **x** ; запись «**x** $\sim$ **y**» означает равноценность наборов товаров **x** и **y** с точки зрения данного потребителя: **x** не хуже **y**, а **y** не хуже **x**;
- **отношение сильного предпочтения** «$\succ$»: **x** $\succ$ **y** тогда и только тогда, когда верно, что **x**$\succcurlyeq$**y** , и неверно, что **x** $\sim$ **y**; запись «**x** $\succ$ **y** » означает, что набор товаров **x** с точки зрения данного потребителя строго лучше набора товаров **y**: **x** не хуже **y**, но при этом **x** и **y** не равноценны.

Аксиомы потребителя

Вторая аксиома потребителя описывает свойства отношений «$\succcurlyeq$», « $\sim$ » и «$\succ$»:

- отношения слабого предпочтения и равноценности являются *рефлексивными* (т.е. для любого набора товаров $\mathbf{x} \in C$ верно, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{x}$ и $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}$);
- отношения слабого предпочтения, равноценности и сильного предпочтения являются *транзитивными* (т.е. для любых наборов товаров $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in C$ из того, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, а $\mathbf{y} \succcurlyeq \mathbf{z}$, следует, что $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{z}$; из того, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, а $\mathbf{y} \sim \mathbf{z}$, следует, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{z}$; из того, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$, а $\mathbf{y} \succ \mathbf{z}$, следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$);
- отношение равноценности является *симметричным* (т.е. из того, что $\mathbf{x} \sim \mathbf{y}$, следует, что $\mathbf{y} \sim \mathbf{x}$).

Третья аксиома потребителя говорит о том, что каждый товар является для потребителя *желательным*, т.е. если $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$, то $\mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$, а если $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, то $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$.

Функция полезности

- Привлекательность различных наборов товаров удобнее оценивать не с помощью отношений предпочтения и равноценности, а с помощью **функции полезности** (функции уровня жизни, функции благосостояния), которая ставит в соответствие каждому набору товаров $\mathbf{x} \in C$ некоторое число $u(\mathbf{x})$ – полезность данного набора товаров – и удовлетворяет двум условиям:
    - $u(\mathbf{x}) \geq u(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \succcurlyeq \mathbf{y}$;
    - $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{y}) \Leftrightarrow \mathbf{x} \sim \mathbf{y}$.

Функция полезности

- Если выбран некоторый набор товаров **x** ∈ C , то

множество

$$\mathcal{P}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{C} \mid \mathbf{y} \succsim \mathbf{x}\}$$

называется *множеством предпочтительности* для **x**,

а множество

$$\mathcal{N}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{z} \in \mathcal{C} \mid \mathbf{x} \succsim \mathbf{z}\}$$

называется *множеством непредпочтительности* для данного набора товаров.

- Система предпочтений называется **непрерывной**, если для любого набора товаров **x** ∈ C множества предпочтительности и непредпочтительности являются **замкнутыми**.

Теорема Дебре

- *Если система предпочтений потребителя непрерывна, то для такого потребителя существует непрерывная функция полезности*

- Будем считать функцию полезности дифференцируемой, при этом частная производная $\partial u/\partial x_i$ имеет смысл **предельной полезности** *i*-го товара: она показывает, насколько увеличится полезность, если добавить к данному набору товаров **x** еще одну единицу *i*-го товара

Предельная полезность

-
- Будем считать функцию полезности дифференцируемой.
- Частная производная $\partial u/\partial x_i$ имеет смысл **предельной полезности** *i*-го товара: она показывает, насколько увеличится полезность, если добавить к данному набору товаров **x** еще одну единицу *i*-го товара

Свойства функции полезности

- **функция полезности определяется неоднозначно** (если $u(\mathbf{x})$ – некоторая функция полезности, то, например, $u_1(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + a$, $u_2(\mathbf{x}) = bu(\mathbf{x})$ [при $b > 0$], $u_3(\mathbf{x}) = \log_c(u(\mathbf{x}))$ [при $c > 1$] и любая другая строго возрастающая функция от $u(\mathbf{x})$ также будут функциями полезности);
- **функция полезности является строго возрастающей** (аксиома желательности утверждает, что из того, что $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, следует, что $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$; по определению функции полезности $\mathbf{x} \succ \mathbf{y} \Leftrightarrow u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$, значит, если $\mathbf{x} > \mathbf{y}$, то $u(\mathbf{x}) > u(\mathbf{y})$);
- **предельные полезности товаров положительны** (поскольку функция полезности является строго возрастающей и дифференцируемой, то $\partial u/\partial x_i > 0$);

Свойства функции полезности

- небольшой прирост блага при его первоначальном отсутствии резко увеличивает полезность (или, иначе, предельная полезность первой единицы товара бесконечн

$$\lim_{x_i \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_i} = +\infty$$

- по мере увеличения потребления товара его предельная полезность уменьшается **(первый з** **оссена)**:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} < 0$$

- при очень большом объеме потребления товара его дальнейшее увеличение не приводит к росту полезности:

$$\lim_{x_i \to +\infty} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

Основные виды функции полезности

- *мультипликативная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n < 1$;

- *логарифмическая*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i \log_d x_i,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $d > 1$;

- *квадратичная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

где матрица $\mathbf{B} = (b_{ij})$ должна быть отрицательно определенной;

- *пропорциональная*:

$$u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\left\{\frac{x_1}{k_1}, \frac{x_2}{k_2}, \ldots, \frac{x_n}{k_n}\right\},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_n > 0$ и др.

Поверхность безразличия

- Множество равноценных с точки зрения данного потребителя наборов товаров называется *поверхностью безразличия*.
- Если $u(\mathbf{x})$ – функция полезности данного потребителя, то поверхность безразличия – это множество наборов товаров, обладающих одинаковой полезностью:

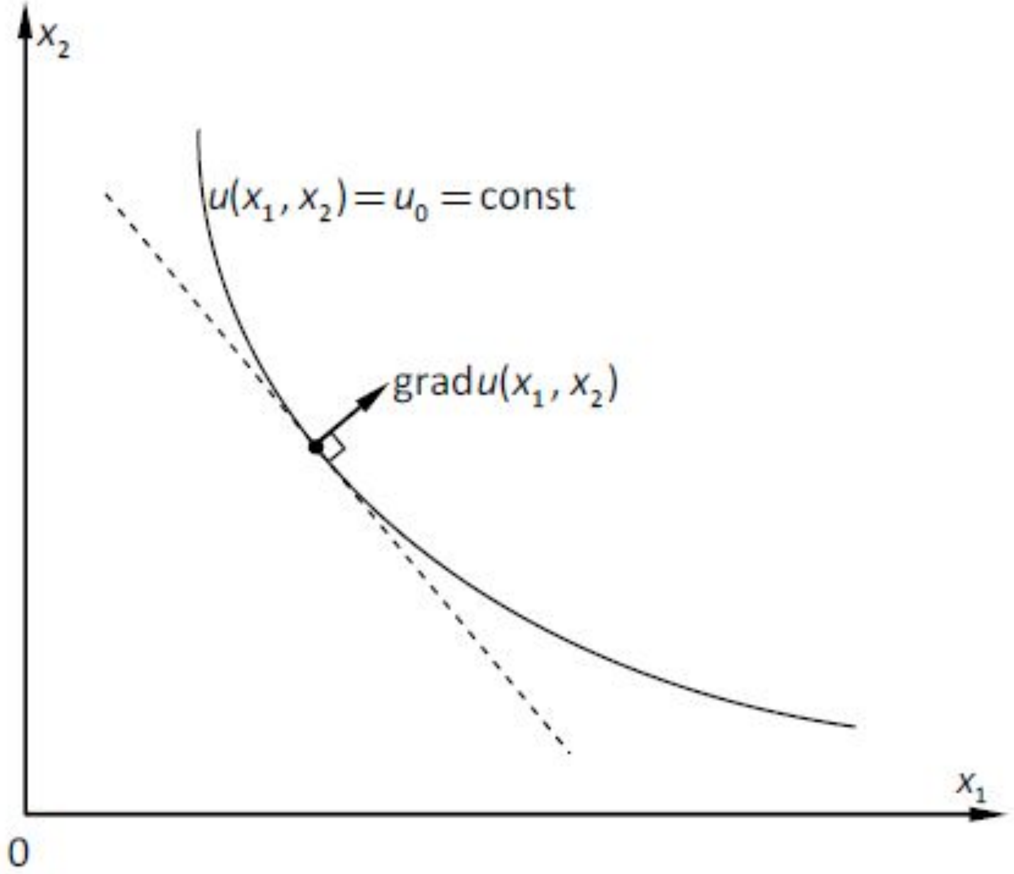
$$\{\mathbf{x} \in C \;\mid\; u(\mathbf{x}) = u_0 = \text{const}\}$$

- В дифференциальной форме условие $u(\mathbf{x}) = u_0 = \text{const}$ записывается следующим образом:

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = 0$$

Поверхность безразличия и градиент функции полезности

- Градиент функции полезности равен вектору предельных полезностей:



$$\text{grad}\,u = \begin{pmatrix} \partial u/\partial x_1 \\ \partial u/\partial x_2 \\ \vdots \\ \partial u/\partial x_n \end{pmatrix}$$

- Условие du = 0 означает, что градиент функции полезности перпендикулярен касательной к поверхности безразличия

Предельная норма замены

- Чтобы старый и новый наборы товаров оказались на одной поверхности безразличия, необходимо выполнение условия du = 0.
- Т.к. $dx_k = 0$ при $k \neq i$, $k \neq j$, тогда получим, что

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial u}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}$$

- Величина

$$r_i^j = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0, \\ u(\mathbf{x}) = \text{const}}} \frac{\Delta x_j}{-\Delta x_i} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}$$

называется **предельной нормой замены** *i*-го товара *j*-м; она показывает, на сколько единиц должно увеличиться количество *j*-го товара, чтобы компенсировать потерю единицы *i*-го товара (т. е. чтобы полезность набора товаров не изменилась).

Эластичность замены

- **Эластичность замены** *i*-го товара *j*-м (e_i^j) показывает, на сколько процентов должно увеличиться количество *j*-го товара, чтобы компенсировать уменьшение количества *i*-го товара на 1%:

$$e_i^j = \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0, \\ u(\mathbf{x}) = \mathrm{const}}} \frac{\Delta x_j / x_j}{-\Delta x_i / x_i} = -\frac{x_i}{x_j} \lim_{\substack{\Delta x_i \to 0, \\ u(\mathbf{x}) = \mathrm{const}}} \frac{\Delta x_j}{\Delta x_i} = \frac{x_i}{x_j} r_i^j = \frac{x_i}{x_j} \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j}$$

Задача потребителя

- *Требуется из бюджетного множества выбрать набор товаров, обладающий максимальной полезностью:*

$$u(\mathbf{x}) \to \max,$$
$$\mathbf{x} \in \mathcal{B}.$$

- С учетом бюджетного ограничения получаем задачу выпуклого программ

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max,$$
$$\begin{cases} p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n \leqslant I, \\ x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0,\ \ \ldots,\ \ x_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Теорема существования и единственности решения задачи потребителя

Решение

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

задачи потребителя существует, лежит на границе бюджетного множества:

$$p_1 x_1^* + p_2 x_2^* + \cdots + p_n x_n^* = I$$

и если функция полезности является строго выпуклой вверх, то решение задачи потребителя является единственным

Решение задачи потребителя методом множителей Лагранжа

- Задача поиска условного экстремума

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max,$$
$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = I.$$

- Функция Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n),$$

- Условный максимум

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} - \lambda p_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ I - p_1x_1 - p_2x_2 - \cdots - p_nx_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \lambda p_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \\ p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n = I. \end{cases}$$

Свойства решения задачи потребителя

В оптимальной точке возможны два варианта:

- либо *j*-й товар потребляется в ненулевом количестве, и тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \lambda^* p_j,$$

- либо $\frac{\partial u}{\partial x_j} < \lambda p_j$, и тогда *j*-й товар не потребляется

Свойства решения задачи потребителя

- Если в оптимальной точке *i*-й и *j*-й товары потребляются в ненулевом количестве, то предельная норма замены *i*-го товара *j*-м равна отношению цен *i*-го и *j*-го товаров

$$r_i^j = \frac{\partial u / \partial x_i}{\partial u / \partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}$$

- **Второй закон Госсена:** взаимозаменяемыми являются такие количества товаров, которые имеют одинаковую стоимость

Свойства решения задачи потребителя

- Вектор предельных полезностей потребляемых (в ненулевом количестве) товаров пропорционален вектору цен:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : \ldots : \frac{\partial u}{\partial x_n} = p_1 : p_2 : \ldots : p_n$$

- У всех потребляемых (в ненулевом количестве) товаров в оптимальной точке отношения предельных полезностей к ценам совпадают и равны λ*:

$$\frac{\partial u / \partial x_1}{p_1} = \frac{\partial u / \partial x_2}{p_2} = \cdots = \frac{\partial u / \partial x_n}{p_n} = \lambda^*$$

Экономический смысл множителя Лагранжа λ*

- Множитель Лагранжа равен предельной полезности одной денежной единицы (поскольку в оптимальной точке часть предельной полезности каждого товара, приходящаяся на единицу его цены, равна λ*)

Функция спроса

- Если из условий условного экстремума выразить **x*** как функцию от цен и богатства, то получим **функцию спроса** данного потребителя:

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I)$$

Дифференциальные свойства функции спроса

- *Если решение задачи потребителя дифференцируемо, то пропорциональное изменение всех цен и доходов не влияет на спрос*:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_j^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I)}{\partial p_i} + I \frac{\partial x_j^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I)}{\partial I} = 0$$

изменение цен *расходы*:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I)}{\partial p_j} + x_j^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I) = 0;$$

изменение дохода влечет соответствующее изменение суммарных расхо

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*(p_1, p_2, \ldots, p_n, I)}{\partial I} = 1$$

Эластичность спроса по цене

- Различают прямые и перекрестные эластичности по цене.
- Прямая эластичность спроса по цене характеризует изменение спроса на благо при изменении на один процент его же цены:

$$E_{ii}(p) = \frac{p_i}{x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial p_i}$$

- Перекрестная эластичность спроса на *i*-ое благо при изменении цены на *j*-ое благо характеризует изменение спроса на благо при изменении на один процент цены другого блага:

$$E_{ij}(p) = \frac{p_j}{x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial p_j}$$

Пример 2

- В условиях примера 1 известна также функция полезности потребителя

$$u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$$

- Требуется определить функцию спроса и рассчитать ее конкретное значение при заданном богатстве I и векторе цен **p**.

Решение примера 2

- Предельные полезности товаров равны

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_2 x_2}}{2\sqrt{x_1}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\sqrt{x_1 x_3}}{2\sqrt{x_2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2\sqrt{x_3}}$$

- В оптимальном решении задачи потребител $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0,\ x_3 \neq 0,$

т.к. $u(x_1, x_2, 0) = u(x_1, 0, x_3) = u(0, x_2, x_3) = 0$

Условия для определения условного экстремума

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\sqrt{x_1}} = \lambda p_1, \\ \dfrac{\sqrt{x_1 x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\sqrt{x_1 x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x_1} = \dfrac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\lambda p_1}, \\ \dfrac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\lambda p_1} \cdot \dfrac{\sqrt{x_3}}{2\sqrt{x_2}} = \lambda p_2, \\ \dfrac{\sqrt{x_2 x_3}}{2\lambda p_1} \cdot \dfrac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_3}} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2 x_3}{4\lambda^2 p_1^2}, \\ \dfrac{x_3}{4\lambda p_1} = \lambda p_2, \\ \dfrac{x_2}{4\lambda p_1} = \lambda p_3, \\ p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = I \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4\lambda^2 p_2 p_3, \\ x_3 = 4\lambda^2 p_1 p_2, \\ x_2 = 4\lambda^2 p_1 p_3, \\ 12\lambda^2 p_1 p_2 p_3 = I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3 p_1}, \\ x_2^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3 p_2}, \\ x_3^*(p_1, p_2, p_3, I) = \dfrac{I}{3 p_3}, \\ \lambda^* = \sqrt{\dfrac{I}{12 p_1 p_2 p_3}}. \end{cases}$$

Оптимальное решение

- Таким образом, функция спроса данного потребителя

$$\mathbf{x}^*(p_1, p_2, p_3, I) = \begin{pmatrix} I/(3p_1) \\ I/(3p_2) \\ I/(3p_3) \end{pmatrix}$$

- предельная полезность денег

$$\lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12\, p_1 p_2 p_3}}$$

Числовые значения функции спроса

- При данном векторе цен **p** = (2 5 6) и богатстве *I* = 30 получаем:

$$x_1^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_1} = \frac{30}{3\cdot 2} = 5, \quad x_2^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_2} = \frac{30}{3\cdot 5} = 2,$$

$$x_3^*(p_1, p_2, p_3, I) = \frac{I}{3p_3} = \frac{30}{3\cdot 6} = \frac{5}{3}, \quad \lambda^* = \sqrt{\frac{I}{12p_1p_2p_3}} = \sqrt{\frac{30}{12\cdot 2\cdot 5\cdot 6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}.$$

- Вектор спроса при данных ценах и данном богатстве таков

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Пример 3

- Функция полезности имеет вид $u(x_1; x_2) = (x_1 + 4)(x_2 + 5)$

Бюджет потребителя равен *I*=55, цены на первое и второе блага равны $p_1=2$, $p_2=1$.

1) записать уравнение кривой безразличия, на которой находится потребитель в момент равновесия;

2) определить перекрестную эластичность спроса на второе благо в момент равновесия потребителя;

3) определить перекрестную эластичность спроса на первое благо после достижения нового равновесия, связанного с повышением цены на второе благо до двух единиц

Решение примера 3

1) Найдем предельные полезности каждого блага:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 + 5 \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 + 4$$

Тогда $\dfrac{x_2 + 5}{x_1 + 4} = \dfrac{2}{1} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1 + 3$

Подставим $x_2 = 2x_1 + 3$ в бюджетное ограничение $2x_1 + x_2 = 55$

Тогда $x_1^* = 13$, $x_2^* = 29$ – оптимальный набор благ

Решение примера 3

- Максимальное значение функции полезности принимает значение:

$$u(x_1, x_2) = (13 + 4)(29 + 5) = 578$$

- Уравнение кривой безразличия, на которой оказался потребитель в момент равновесия

$$578 = (x_1 + 4)(x_2 + 5)$$

или

$$x_2 = \frac{558 - 5x_1}{x_1 + 4}$$

Решение примера 3

2) Определим перекрестную эластичность спроса на второе благо в момент равновесия потребителя.

Найдем функции спроса на первое и второе блага

$$x_1 = \frac{55 - 4p_1 + 5p_2}{2p_1} \qquad x_2 = \frac{55 + 4p_1 - 5p_2}{2p_2}$$

Решение примера 3

- Найдем перекрестную эластичность спроса на второе благо в момент равновесия потребителя:

$$E_{21} = \frac{p_1}{x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial p_1} = \frac{2p_1p_2}{55+4p_1-5p_2} \cdot \frac{4}{2p_2} = \frac{4p_1}{55+4p_1-5p_2}$$

- При $p_1 = 2, p_2 = 1$ ходим $E_{21} = 0,138.$

- При увеличении цены первого блага на 1% (при неизменной цене на второе благо), спрос на второе благо увеличится на 0,138% < 1%. Спрос на второе благо неэластичный.

Решение примера 3

3) Определим перекрестную эластичность спроса на первое благо после достижения нового равновесия, связанного с повышением цены на второе благо до двух единиц. Если цена на второе благо увеличится до двух единиц, потребитель достигает равновесия при выполнении условия

$$\frac{x_2+5}{x_1+4}=\frac{2}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x_1=x_2+1$$

При имеющемся бюджете *I*=55 и новых ценах потребитель приобретет первое и второе блага в количестве

$$x_1^*=14{,}25 \qquad x_2^*=13{,}25$$

Решение примера 3

- Найдем перекрестную эластичность спроса на первое благо после достижения нового равновесия

$$E_{12} = \frac{p_2}{x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial p_2} = \frac{p_2 \cdot 2p_1}{55 - 4p_1 + 5p_2} \cdot \frac{5}{2p_1} = \frac{5p_2}{55 - 4p_1 + 5p_2}$$

При $p_1 = 2, p_2 = 2$ ходим $E_{12} = 0{,}175$

При увеличении цены на второе благо на 1% (при неизменной цене на первое благо), спрос на первое благо увеличится на 0,175% < 1%. Спрос на первое благо неэластичный

Уравнение Слуцкого

- Рассмотрим изменение спроса потребителя при изменении цены одного из товаров (например, *j*-го).
- Предположим, что при изменении цены *j*-го товара на величину p_j (при неизменных ценах остальных товаров) происходит компенсация богатства на такую величину *I* , чтобы новая точка оптимального спроса осталась на той же поверхности безразличия, что и старая [иными словами, чтобы полезность набора товаров

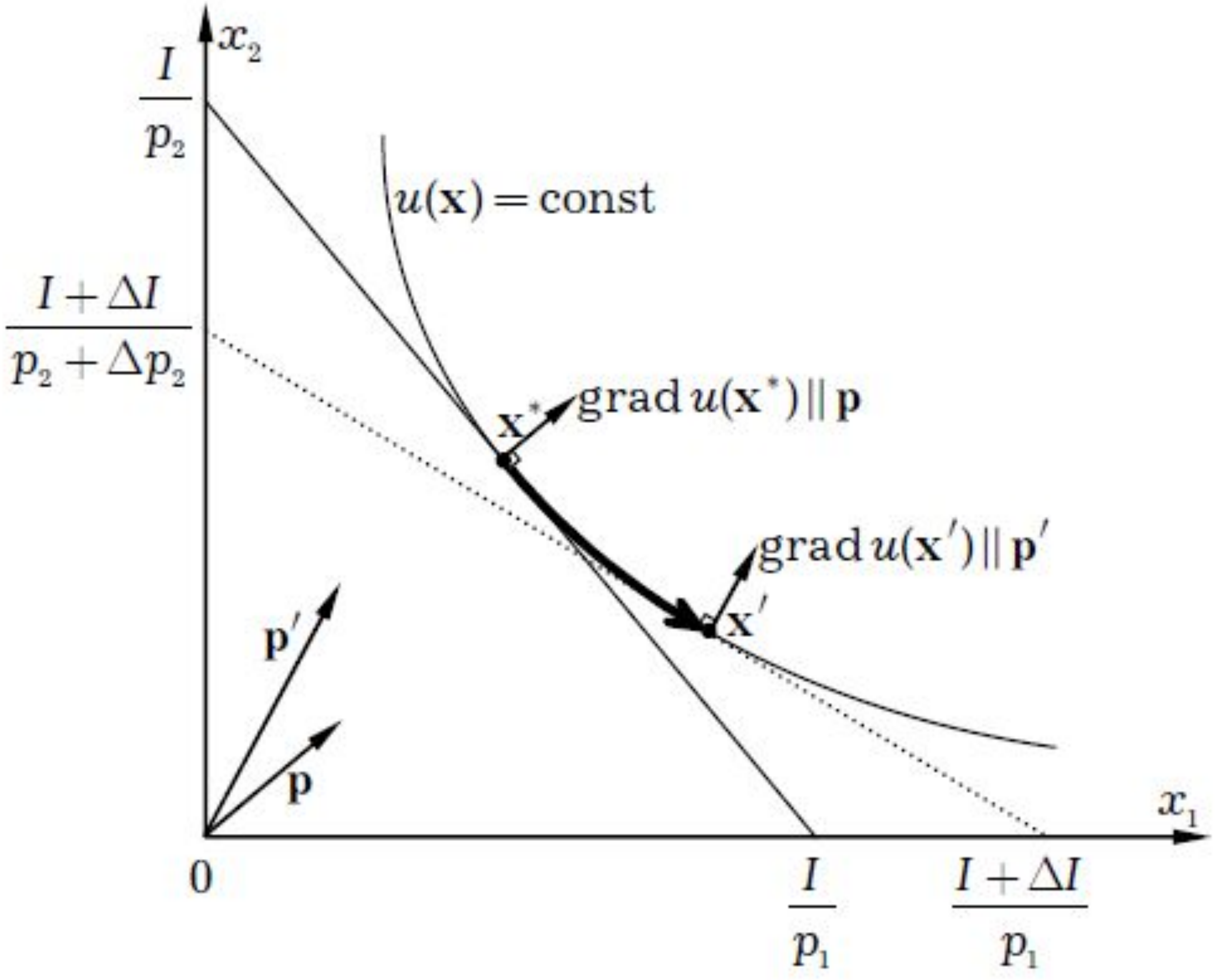
$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}^*(p_1, p_2, \ldots, p_j + \Delta p_j, \ldots, p_n,\ I + \Delta I),$$

оптимального при векторе цен $\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_j + \Delta p_j \quad \cdots \quad p_n)$ и богатстве *I*+Δ*I*, была бы равна полезности набора товаров

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots, p_n,\ I),$$

оптимального при векторе цен $\mathbf{p} = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_j \quad \cdots \quad p_n)$ и богатстве *I*.

Изменение спроса с компенсацией дохода



Эффект замещения

- Изменение спроса на *i*-й товар при изменении цены *j*-го товара на единицу и сопутствующем компенсирующем изменении богатства

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_i^*}{\Delta p_j} = \lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{x_i' - x_i^*}{\Delta p_j} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta p_j \to 0, \\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{x_i^*(p_1, p_2, \ldots, p_j + \Delta p_j, \ldots, p_n, I + \Delta I) - x_i^*(p_1, p_2, \ldots, p_j, \ldots, p_n, I)}{\Delta p_j}$$

отражает **эффект замещения** — при изменении цены *j*-го товара и компенсирующем изменении богатства потребитель останется на той же поверхности безразличия, что и раньше, для чего заменит часть *j*-го товара другими товарами

Величина компенсирующего богатства

- Найдем величину такого компенсирующего изменения богатства *dI* при бесконечно малом изменении цены *j*-го товара (на dp_j) и неизменных остальных ценах
- Из условий оптимального поведения потребителя находим

$$du = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx_k = \lambda^* \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k, \quad dI = \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^* dp_k$$

- Чтобы полезность не изменилась, необходимо и достаточно, чтобы *du*=0, и поскольку предельная полезность денег $\lambda^* \neq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} p_k dx_k = 0$$

- Тогда

$$dI = \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^* dp_k = \sum_{k=1}^{n} x_k^* dp_k = x_j^* dp_j$$

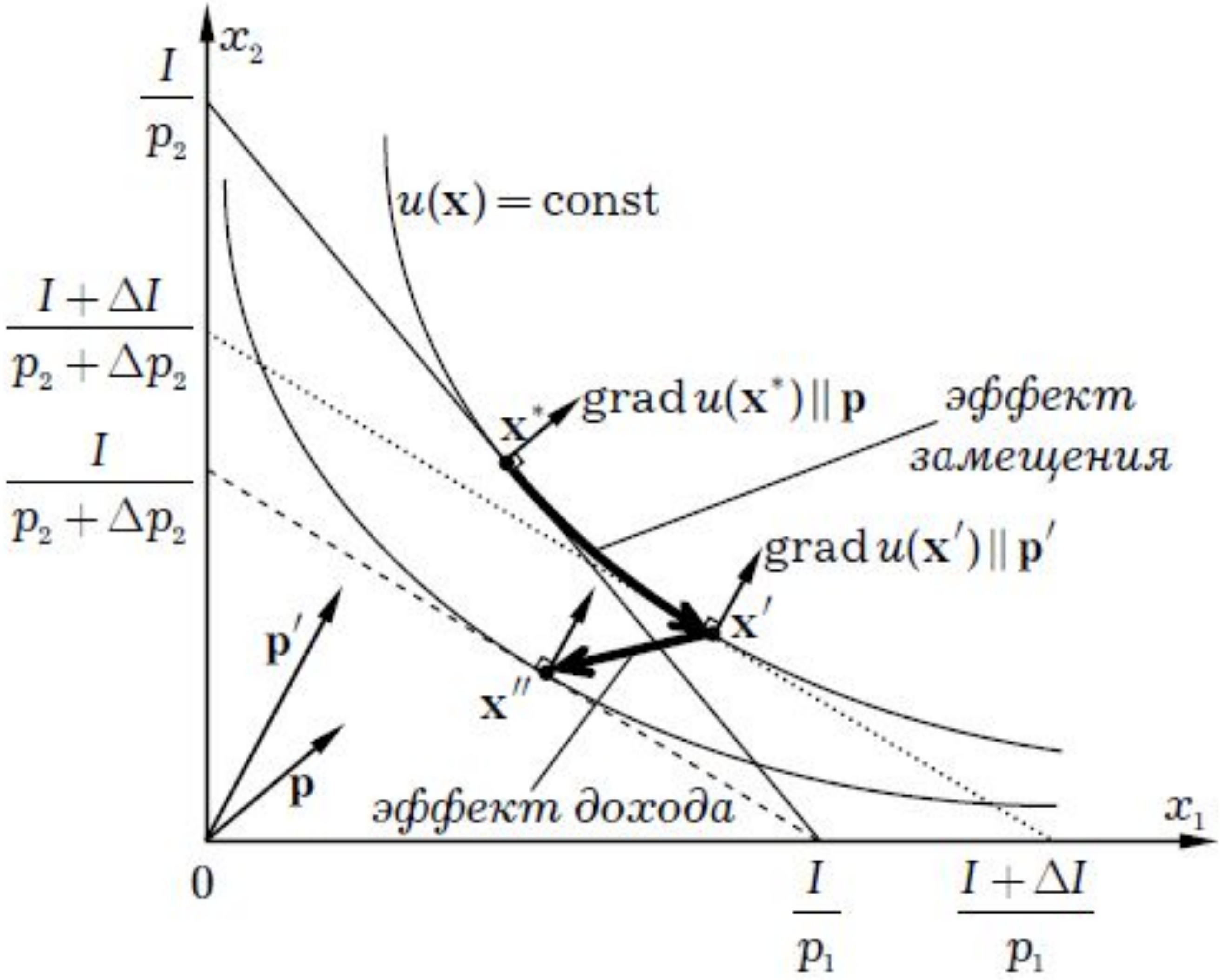
Уравнение Слуцкого

- Компенсации богатства потребителя при изменении цен не происходит, и изменение спроса потребителя на *i*-й товар при изменении цены *j*-го товара на единицу равно

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_j^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

- Вычитаемое $\frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_j^*$ в этом уравнении отражает **эффект дохода**, связанный с изменением потребительской ценности единицы богатства

Эффект дохода и эффект замещения



- Фактически потребитель не остается на той же поверхности безразличия, что и раньше, а переходит на другую поверхность безразличия, соответствующую другим количествам товаров, которые он может позволить себе приобрести при изменении це-ны *j*-го товара и неизменном богатстве и ценах остальных товаров

Категории товаров

- Товар с номером *i* называется **ценным**, если при увеличении богатства спрос на него растет, т.е. если $$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0,$$
- Товар с номером *i* называется **малоценным**, если при увеличении богатства спрос на этот товар снижается: $$\frac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0$$
- В оптимальной точке $\sum_{k=1}^{n} p_k x_k^* = I$
- Продифференцируем левую и правую части этого равенства по *I*:
$$\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k^*}{\partial I} = 1$$
- Среди частных производных $\partial x_k^* / \partial I$ есть хотя бы одна положительная, т.е. обязательно **существует хотя бы один ценный товар**.

Категории товаров

- Товар с номером *i* называется **нормальным**, если при увеличении его цены спрос на него падает, т.е. если

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$$

- Товар с номером *i* называется **товаром Гиффена**, если при увеличении цены этого товара спрос на него растет:

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0$$

- Спрос на ценный товар обязательно падает при увеличении его цены: в правой части уравнения Слуцкого, записанного при *j=i*, $\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_i^*}{\partial I} x_i^* < 0$

уменьшаемое отрицательно, а вычитаемое неотрицательно, так как > согласно, а спрос x_i^* не может быть отрицательным.

- **Ценные товары не могут быть товарами Гиффена**

Взаимозаменяемые и взаимодополняющие товары

- Два товара с номерами *i* и *j* называются **взаимозаменяемыми**, если увеличение цены *j*-го товара при сопутствующем компенсирующем изменении богатства приводит к увеличению спроса на *i*-й товар:

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} > 0$$

- Два товара с номерами *i* и *j* называются **взаимодополняющими**, если увеличение цены *j*-го товара при сопутствующем компенсирующем изменении богатства ведет к уменьшению спроса на *i*-й товар:

$$\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_j}\right)_{\text{комп.}} < 0$$

Категории товаров

Влияние изменения дохода / Влияние изменения цены товара	ценные товары: $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0$	малоценные товары: $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} < 0$
нормальные товары: $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} < 0$	пример: мясо	пример: маргарин
товары Гиффина: $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_i} > 0$	—	пример: картофель в середине XIX в. в Ирландии

Пример 3

- В условиях примера 1 убедиться в справедливости уравнения Слуцкого для данного потребителя. Определить, какие товары являются ценными и малоценными; нормальными товарами и товарами Гиффена; какие товары взаимозаменяемы, а какие являются взаимодополняющими

Проверка выполнения уравнения Слуцкого

- Убедимся, что для данного потребителя действительно выполняется уравнение Слуцкого. Рассмотрим, что произойдет со спросом при изменении цены первого товара. Пусть цена первого товара изменилась с p_1 до $p_1 + \Delta p_1$. Если произошло соответствующее компенсируюц гатства на величину

$$\Delta I = x_1^* \Delta p_1 = \frac{I \Delta p_1}{3p_1}$$

- Новая точка спроса

$$\mathbf{x}^*(p_1 + \Delta p_1, p_2, p_3, I + \Delta I) = \begin{pmatrix} \dfrac{I + \Delta I}{3(p_1 + \Delta p_1)} \\ \dfrac{I + \Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{I + \Delta I}{3p_3} \end{pmatrix}$$

Проверка выполнения уравнения Слуцкого

- Изменение спроса составляет

$$\Delta \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(p_1+\Delta p_1, p_2, p_3, I+\Delta I) - \mathbf{x}^*(p_1, p_2, p_3, I) =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{I+\Delta I}{3(p_1+\Delta p_1)} - \dfrac{I}{3p_1} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_2} - \dfrac{I}{3p_2} \\ \dfrac{I+\Delta I}{3p_3} - \dfrac{I}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{(I+\Delta I)p_1 - I(p_1+\Delta p_1)}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1\Delta I - I\Delta p_1}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_2} \\ \dfrac{\Delta I}{3p_3} \end{pmatrix}$$

- Подставим сюда $\Delta I = I\Delta p_1/(3p_1)$

$$\Delta \mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} \dfrac{p_1 I\Delta p_1/(3p_1) - I\Delta p_1}{3p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-2I\Delta p_1}{9p_1(p_1+\Delta p_1)} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2} \\ \dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3} \end{pmatrix}$$

Проверка выполнения уравнения Слуцкого

- Отсюда находим изменение спроса при бесконечно малом изменении цены первого товара и компенсирующем изменении

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_1^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\dfrac{-2I\Delta p_1}{9p_1(p_1+\Delta p_1)}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{-2I}{9p_1(p_1+\Delta p_1)} = -\frac{2I}{9p_1^2},$$

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_2^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_2}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{I}{9p_1p_2} = \frac{I}{9p_1p_2},$$

$$\left(\frac{\partial x_3^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\Delta x_3^*}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{\dfrac{I\Delta p_1}{9p_1p_3}}{\Delta p_1} = \lim_{\substack{\Delta p_1 \to 0,\\ u(\mathbf{x}')=u(\mathbf{x}^*)}} \frac{I}{9p_1p_3} = \frac{I}{9p_1p_3}.$$

Проверка выполнения уравнения Слуцкого

- Найдем теперь $\partial x_i^* / \partial p_1, \;\; \partial x_i^* / \partial I \;\; (i = 1, 2, 3)$:

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} = \frac{\partial [I/(3p_1)]}{\partial p_1} = -\frac{I}{3p_1^2}, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1} = \frac{\partial [I/(3p_2)]}{\partial p_1} = 0, \quad \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1} = \frac{\partial [I/(3p_3)]}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I} = \frac{\partial [I/(3p_1)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_1}, \quad \frac{\partial x_2^*}{\partial I} = \frac{\partial [I/(3p_2)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_2}, \quad \frac{\partial x_3^*}{\partial I} = \frac{\partial [I/(3p_3)]}{\partial I} = \frac{1}{3p_3}.$$

- Замечаем, что

$$\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_1^*}{\partial I} x_1^* = -\frac{2I}{9p_1^2} - \frac{1}{3p_1}\frac{I}{3p_1} = -\frac{I}{3p_1^2} = \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1},$$

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_2^*}{\partial I} x_1^* = \frac{I}{9p_1 p_2} - \frac{1}{3p_2}\frac{I}{3p_1} = 0 = \frac{\partial x_2^*}{\partial p_1},$$

$$\left(\frac{\partial x_3^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}} - \frac{\partial x_3^*}{\partial I} x_1^* = \frac{I}{9p_1 p_3} - \frac{1}{3p_3}\frac{I}{3p_1} = 0 = \frac{\partial x_3^*}{\partial p_1},$$

т.е. уравнение Слуцкого для данного потребителя выполняется

Определение категории товаров

- Т.к.

$$\frac{\partial x_1^*}{\partial I}=\frac{1}{3p_1}>0,\qquad \frac{\partial x_2^*}{\partial I}=\frac{1}{3p_2}>0,\qquad \frac{\partial x_3^*}{\partial I}=\frac{1}{3p_3}>0\,,$$

то все три товара ценные (так как ценные товары не могут быть товарами Гиффена, все три товара являются нормальными).

Первый и второй товары являются взаимозаменяемыми, т.к.

$$\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial p_1}\right)_{\text{комп.}}=\frac{I}{9p_1p_2}>0$$

- Точно так же можно показать, что первый и третий, а также второй и третий товары образуют взаимозаменяемые пары, а взаимодополняющие товары для данного потребителя отсутствуют

Модель рыночного равновесия. Обозначения

- Рассмотрим рынок *n* товаров с *k* участниками.
- Вектор $\mathbf{x}^j = \begin{pmatrix} x_1^j \\ x_2^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix}$ - вектор начальных запасов товаров у *j*-го участника
- $u^j(\mathbf{x}) = u^j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - функция полезности *j*-го участника ($j = 1, 2, \ldots, k$)
- Предположим, что участники рынка согласны обмениваться товарами
- Вектор $\mathbf{p} = (p_1\ p_2\ \ldots\ p_n)$ - вектор рыночных цен
- Начальное богатство каждог[о] ...[ден]ежном выражении определяется как $I_j = \mathbf{p}\mathbf{x}^j = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$
- Суммарное предложение *i*-го товара на ... [равн]о суммарным запасам этого товара у все[х] $Q_i^S = \sum_{j=1}^{k} x_i^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$

Задача потребителя и определение суммарного спроса

- Функции спроса участников рынка

$$\tilde{\mathbf{x}}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) =$$

$$= \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^j(p_1, p_2, \dots, p_n, I_j) \\ \tilde{x}_2^j(p_1, p_2, \dots, p_n, I_j) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^j(p_1, p_2, \dots, p_n, I_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1^j\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum\limits_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right) \\ \tilde{x}_2^j\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum\limits_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right) \\ \vdots \\ \tilde{x}_n^j\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum\limits_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right) \end{pmatrix},$$

- Суммарный спрос всех участников на *i*-й товар равен

$$Q_i^D = \sum_{j=1}^{k} \tilde{x}_i^j\left(p_1, p_2, \dots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j\right), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Закон Вальраса

- Рыночное равновесие определяется равенством суммарного спроса и суммарного предложения по каждому товару

$$Q_i^D = Q_i^S, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

или

$$\sum_{j=1}^{k} x_i^j \left(p_1, p_2, \ldots, p_n, \sum_{l=1}^{n} p_l x_l^j \right) = \sum_{j=1}^{k} x_i^j, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Одно из уравнений данной системы обязательно является следствием остальных, поэтому цены определяются из этой системы с точностью до коэффициента пропорциональности. Это очевидно: ведь цены зависят от выбора денежной единицы.
- Таким образом, можно определить равновесное конечное распределение товаров между участниками рынка, подставив в функции спроса равновесные цены, определенные из полученной системы

Пример 4

- Рассматривается рынок трех товаров. Требуется определить равновесное распределение товаров между четырьмя участниками рынка, если эти участники обладают одинаковыми функциями полезности $u(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1 x_2 x_3}$

,

а начальные запасы товаров у участников рынка составляют

$$\mathbf{x}^1 = \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^2 = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^3 = \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \\ x_3^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^4 = \begin{pmatrix} x_1^4 \\ x_2^4 \\ x_3^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Определение начального богатства

- Пусть цены товаров на рынке определяются вектором **p** = (p_1 p_2 … p_n).
- Тогда н… оставит

$$I_1 = \mathbf{p}\mathbf{x}^1 = p_1 x_1^1 + p_2 x_2^1 + p_3 x_3^1 = p_1 + 2p_2 + 3p_3$$

- Аналогично определяется начальное богатство второго, третьего и четверт…

$$I_2 = \mathbf{p}\mathbf{x}^2 = 2p_1 + 2p_2 + 2p_3,$$

$$I_3 = \mathbf{p}\mathbf{x}^3 = 3p_1 + 4p_2 + 5p_3,$$

$$I_4 = \mathbf{p}\mathbf{x}^4 = p_1 + p_2 + 6p_3$$

Решение. Определение суммарного спроса

- Функции спроса участников одинаковы, так как функция полезности у них одна и та же. Из решения примера 2 находим

$$\hat{\mathbf{x}}^j(p_1, p_2, p_3, I_j) = \begin{pmatrix} I_j/(3p_1) \\ I_j/(3p_2) \\ I_j/(3p_3) \end{pmatrix}.$$

Суммарный спрос на первыи товар составляет

$$Q_1^D = \frac{I_1}{3p_1} + \frac{I_2}{3p_1} + \frac{I_3}{3p_1} + \frac{I_4}{3p_1} =$$

$$= \frac{(p_1 + 2p_2 + 3p_3) + (2p_1 + 2p_2 + 2p_3) + (3p_1 + 4p_2 + 5p_3) + (p_1 + p_2 + 6p_3)}{3p_1} =$$

$$= \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_1},$$

Аналогично определяется суммарный спрос на второй и третий товары

$$Q_2^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_2}, \qquad Q_3^D = \frac{7p_1 + 9p_2 + 16p_3}{3p_3}.$$

Решение. Определение суммарного предложения и равновесных цен

- Суммарное предложение первого, второго и третьего товаров равно

$$Q_1^S = x_1^1 + x_1^2 + x_1^3 + x_1^4 = 1+2+3+1=7,$$
$$Q_2^S = x_2^1 + x_2^2 + x_2^3 + x_2^4 = 2+2+4+1=9,$$
$$Q_3^S = x_3^1 + x_3^2 + x_3^3 + x_3^4 = 3+2+5+6=16.$$

- Условие равенства суммарного спроса и суммарного предложения каждого товара

$$\begin{cases} Q_1^D = Q_1^S, \\ Q_2^D = Q_2^S, \\ Q_3^D = Q_3^S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{7p_1+9p_2+16p_3}{3p_1} = 7, \\ \dfrac{7p_1+9p_2+16p_3}{3p_2} = 9, \\ \dfrac{7p_1+9p_2+16p_3}{3p_3} = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7p_1+9p_2+16p_3 = 21p_1, \\ 7p_1+9p_2+16p_3 = 27p_2, \\ 7p_1+9p_2+16p_3 = 48p_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -14p_1 + 9p_2 + 16p_3 = 0, \\ 7p_1 - 18p_2 + 16p_3 = 0, \\ 7p_1 + 9p_2 - 32p_3 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} p_1 = \dfrac{16}{7}\alpha, \\ p_2 = \dfrac{16}{9}\alpha, \\ p_3 = \alpha, \ \alpha > 0 \end{array}$$

Решение. Определение цен и богатства потребителей

- Цены определяются относительно, поэтому для удобства положим

$$p_3 = \alpha = 63 \text{ ден. ед.} \qquad p_1 = \frac{16}{7} \cdot 63 = 144 \text{ ден. ед.}, \qquad p_2 = \frac{16}{9} \cdot 63 = 112 \text{ ден. ед.}$$

- При таких ценах начальные запасы участников рынка определяют их богатство

$$\begin{aligned}
I_1 &= p_1 + 2p_2 + 3p_3 = 144 + 2 \cdot 112 + 3 \cdot 63 = 557,\\
I_2 &= 2p_1 + 2p_2 + 2p_3 = 2 \cdot 144 + 2 \cdot 112 + 2 \cdot 63 = 638,\\
I_3 &= 3p_1 + 4p_2 + 5p_3 = 3 \cdot 144 + 4 \cdot 112 + 5 \cdot 63 = 1195,\\
I_4 &= p_1 + p_2 + 6p_3 = 144 + 112 + 6 \cdot 63 = 634.
\end{aligned}$$

Решение. Определение равновесного распределения товаров

$$\tilde{\mathbf{x}}^1(p_1, p_2, p_3, I_1) = \begin{pmatrix} \dfrac{I_1}{3p_1} \\ \dfrac{I_1}{3p_2} \\ \dfrac{I_1}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{557}{3\cdot 144} \\ \dfrac{557}{3\cdot 112} \\ \dfrac{557}{3\cdot 63} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{557}{432} \\ \dfrac{557}{336} \\ \dfrac{557}{189} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^2(p_1, p_2, p_3, I_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{I_2}{3p_1} \\ \dfrac{I_2}{3p_2} \\ \dfrac{I_2}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{638}{432} \\ \dfrac{638}{336} \\ \dfrac{638}{189} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^3(p_1, p_2, p_3, I_3) = \begin{pmatrix} \dfrac{I_3}{3p_1} \\ \dfrac{I_3}{3p_2} \\ \dfrac{I_3}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1195}{432} \\ \dfrac{1195}{336} \\ \dfrac{1195}{189} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{x}}^4(p_1, p_2, p_3, I_4) = \begin{pmatrix} \dfrac{I_4}{3p_1} \\ \dfrac{I_4}{3p_2} \\ \dfrac{I_4}{3p_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{634}{432} \\ \dfrac{634}{336} \\ \dfrac{634}{189} \end{pmatrix}.$$

Динамическая модель Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара

- Основное предположение модели – цена изменяется в зависимости от соотношений между спросом и предложением
- Спрос $D(p) = a - b \cdot p, \quad a, b > 0$
- Предложение $S(p) = \alpha + \beta \cdot p, \quad \alpha, \beta > 0$
- Изменение цены прямо пропорционально превышению спроса над предложением и длительности этого превышения:

$$p'(t) = \gamma(D - S),$$

где γ – коэффициент пропорциональности

Стационарное решение

$$p'(t) = -\gamma((b+\beta)\cdot p - a + \alpha)$$

Если p'(t) =0, то стационарное решение $p^* = \dfrac{a-\alpha}{b+\beta} > 0$

При $p(0) < p^*$ цена p стремится к p^* возрастая,

при $p(0) > p^*$ цена p стремится к p^* убывая.

Стационарная точка является точкой устойчивого равновесия.

Цена p* есть устойчивая равновесная цена, при которой равны спрос и предложение.

Нестационарное решение

$$p'(t) = -\gamma((b+\beta)\cdot p - a + \alpha)$$

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + ce^{-\gamma(b+\beta)t}$$

- c = const.

Пример 5

- Описать процесс установления равновесной цены, если время непрерывно и рассматривается рынок одного товара. Спрос и предложение линейно зависят от цены: $D = 28 – 2p$, $S = 19 + p$, а изменение цены пропорционально превышению спроса над предложением с коэффициентом пропорциональности $\gamma = 1$.
- Рассмотреть случаи, когда $p(0) > p^*$ и $p(0) < p^*$.
- Построить графики и сделать выводы.

Решение

- Линейное неоднородное дифф. уравнение, описывающее динамику равновесной цены, имеет вид:

p’(t) = 1(28 – 2p – (19 + p)),

p’(t) = 9 – 3p.

- Точка устойчивого равновесия $p^* = \frac{a-\alpha}{b+\beta} = \frac{28-19}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$

- Общее решение дифф. уравнения, описывающего динамику равновесной цены, имеет вид:

$$p(t) = \frac{a-\alpha}{b+\beta} + ce^{-\gamma(b+\beta)t} = 3 + \quad {}^{-1\cdot(2+1)t} = 3 + \quad {}^{-3t}$$

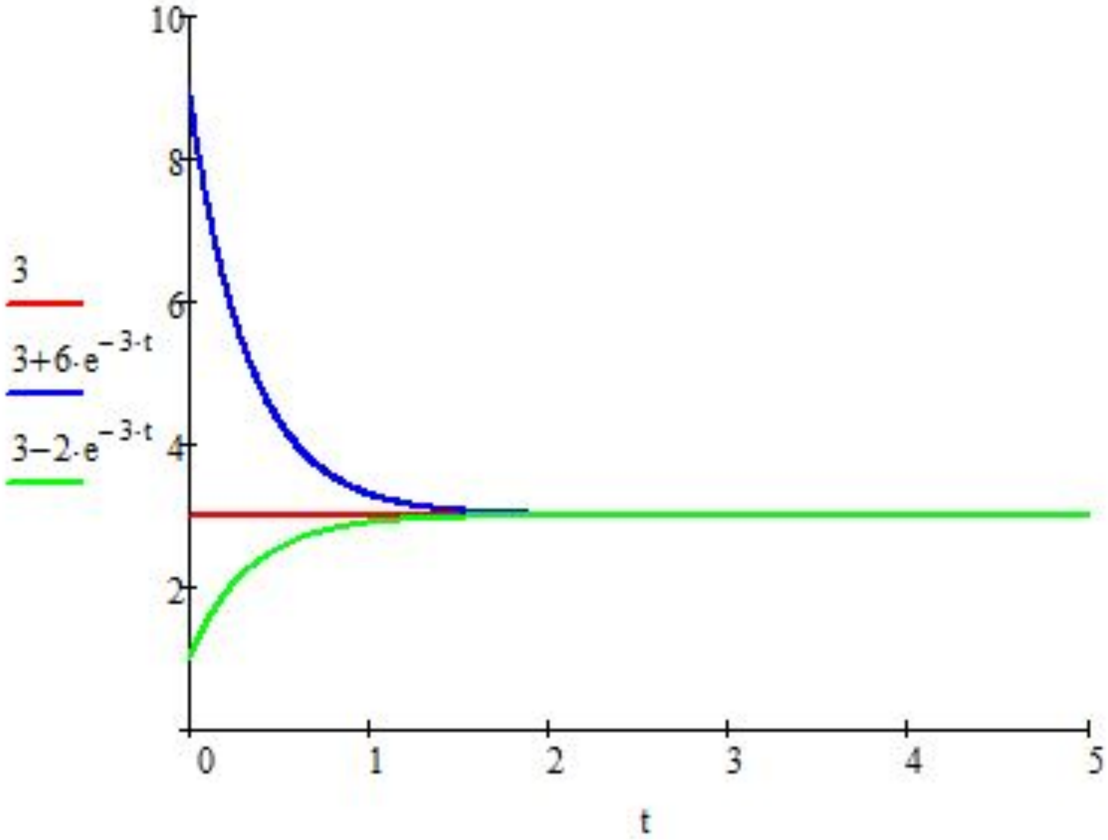
Графики

- Если p(0) = 9 > p*, то *c* = 6 и

$$p(t) = 3 + 6e^{-3t}$$

- Если p(0) = 1 < p*, то *c* = – 2 и

$$p(t) = 3 - 2e^{-3t}$$



- Стационарное решение p* = 3 является устойчивым и отклонение от него в итоге приводит к возврату в первоначальное состояние