

Производная и ее применение в алгебре



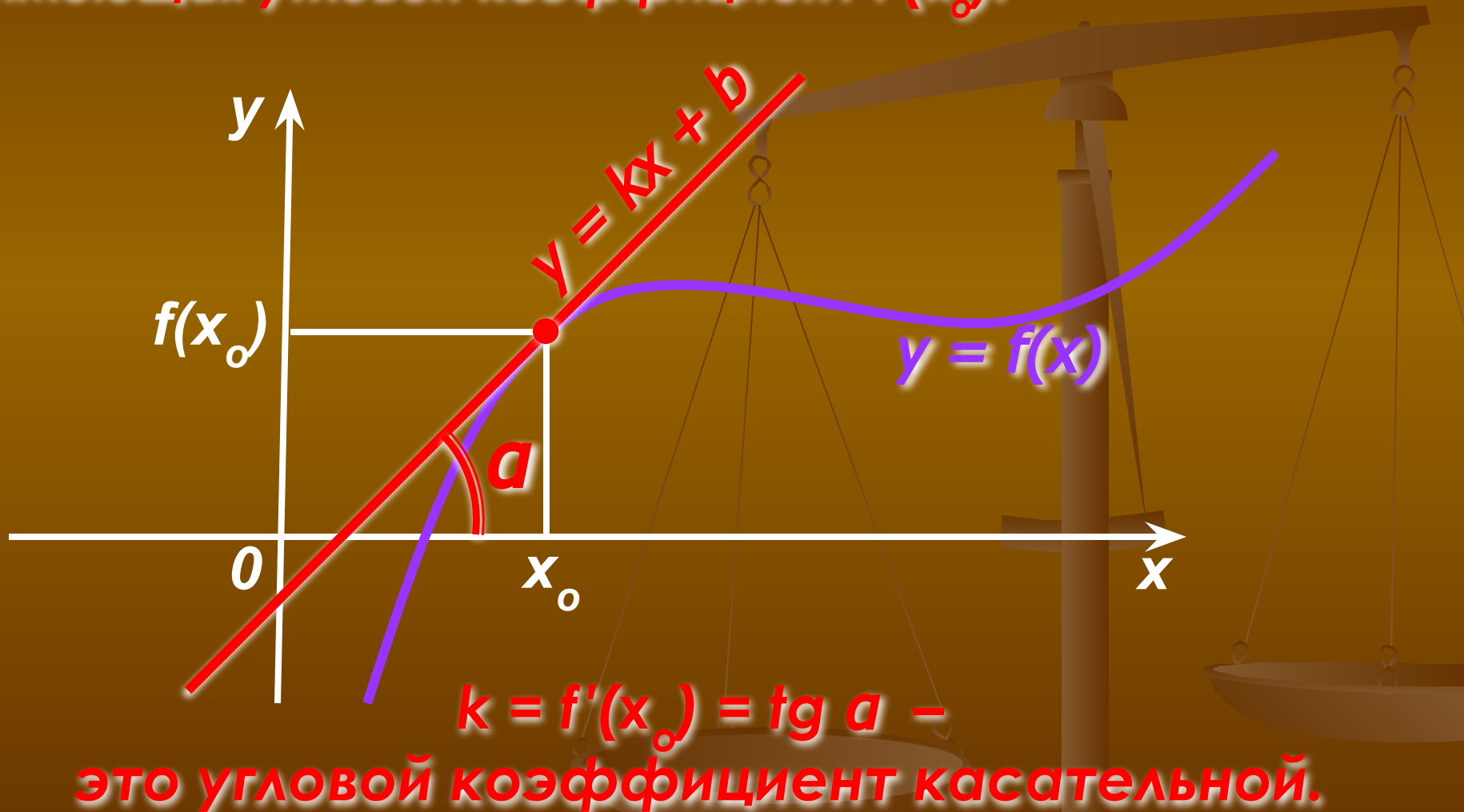
Понятие производной

Пусть $y = f(x)$ есть непрерывная функция аргумента x , определенная в промежутке $(a; b)$, и пусть x_0 - произвольная точка этого промежутка. Дадим аргументу x приращение Δx , тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Предел, к которому стремится отношение $\Delta y / \Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$, называется производной от функции $f(x)$.

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Касательная

к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f – это прямая, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_0)$.



Приближенные вычисления

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x \quad (1)$$

$$\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2}\Delta x \quad (2)$$

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n\Delta x \quad (3)$$

Общий вид уравнения касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Алгоритм составления уравнения касательной

1° Находим значение функции в точке x_0 : $f(x_0)$.

2° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

3° Находим значение производной в точке x_0 : $f'(x_0)$.

4° Подставляем эти данные в общее уравнение

касательной: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Правила дифференцирования и таблица производных

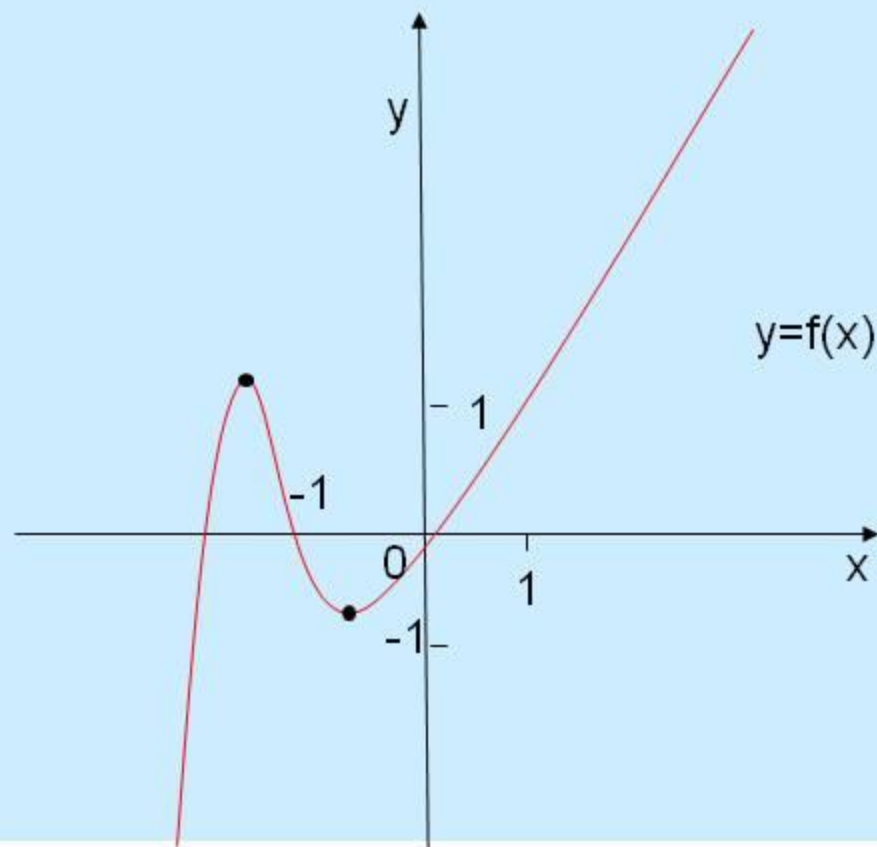
№	Функция	Производная	№	Функция	Производная
1	x^n	nx^{n-1}	8	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
2	e^x	e^x	9	$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
3	a^x	$a^x \ln a$	10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	$\sin x$	$\cos x$	11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
5	$\cos x$	$-\sin x$	12	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
6	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	13	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
7	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$			



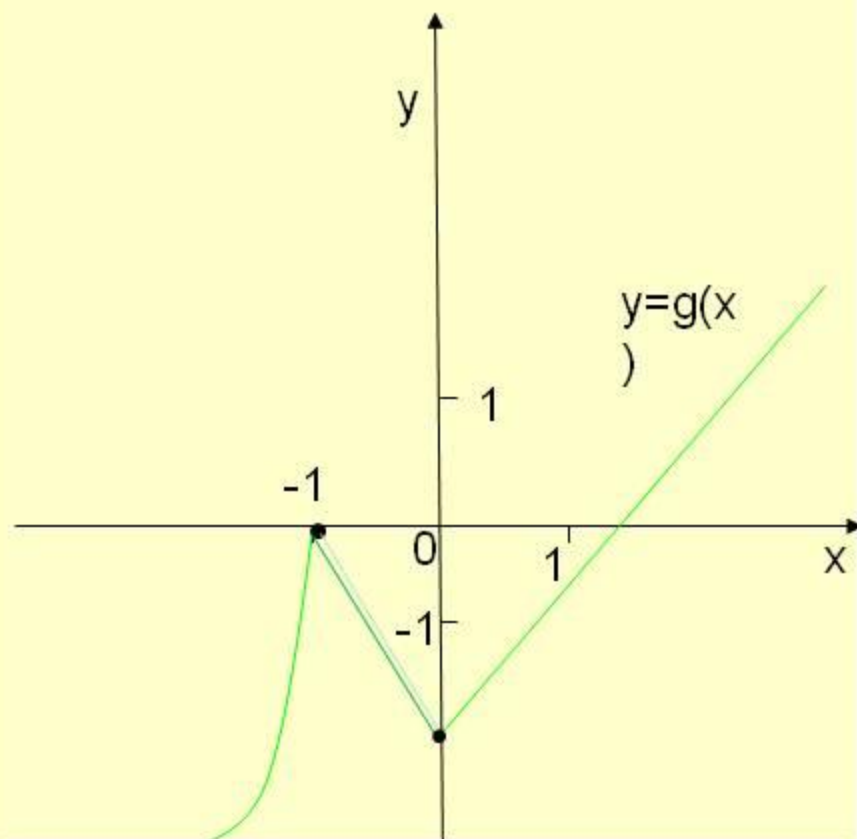
Исследование функций с помощью производной и построение графиков функций.



Внутренние точки области определения функции, в которых производная равна нулю или производная не существует, называются **критическими**.



Касательная в таких точках графика параллельна оси Ox , а поэтому производная в этих точках равна 0;

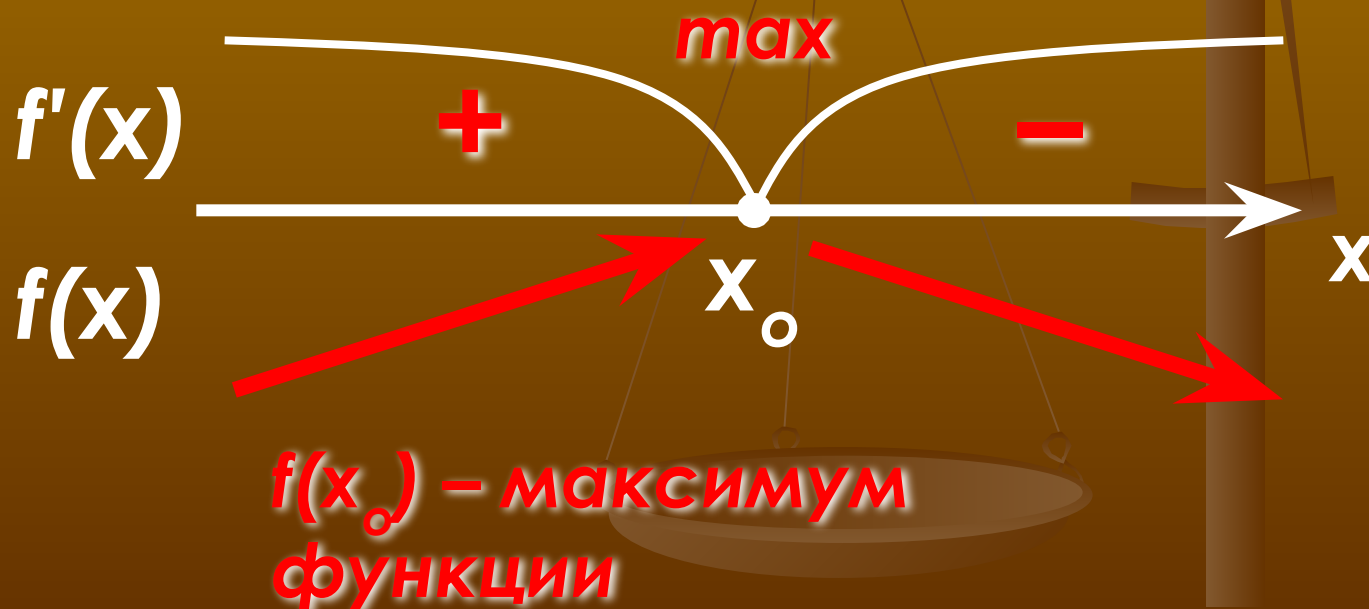


Касательная в таких точках графика не существует, а поэтому производная в этих точках не существует.

Максимум функции

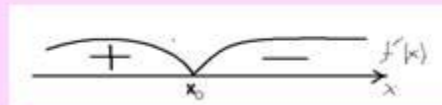
Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Если в точке x_0 производная функции $f(x)$ меняет знак с «+» на «-», то x_0 – **точка локального максимума** функции $f(x)$.

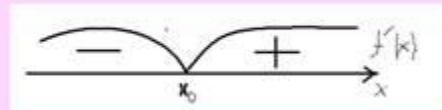


Достаточное условие существования экстремума функции:

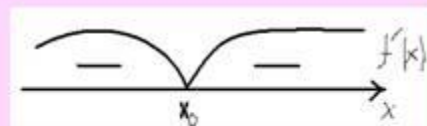
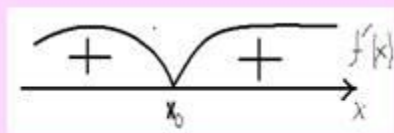
- 1) Если при переходе через критическую точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «+» на «-», то x_0 – точка максимума функции $f(x)$.



- 1) Если при переходе через критическую точку x_0 функции $f(x)$ ее производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка минимума функции $f(x)$.



- 3) Если при переходе через критическую точку x_0 функции $f(x)$ ее производная не меняет знака, то в точке x_0 экстремума нет.



Теорема Дарбу. Точки, в которых производная функции равна 0 или не существует, делят область определения функции на интервалы, внутри которых производная сохраняет знак.

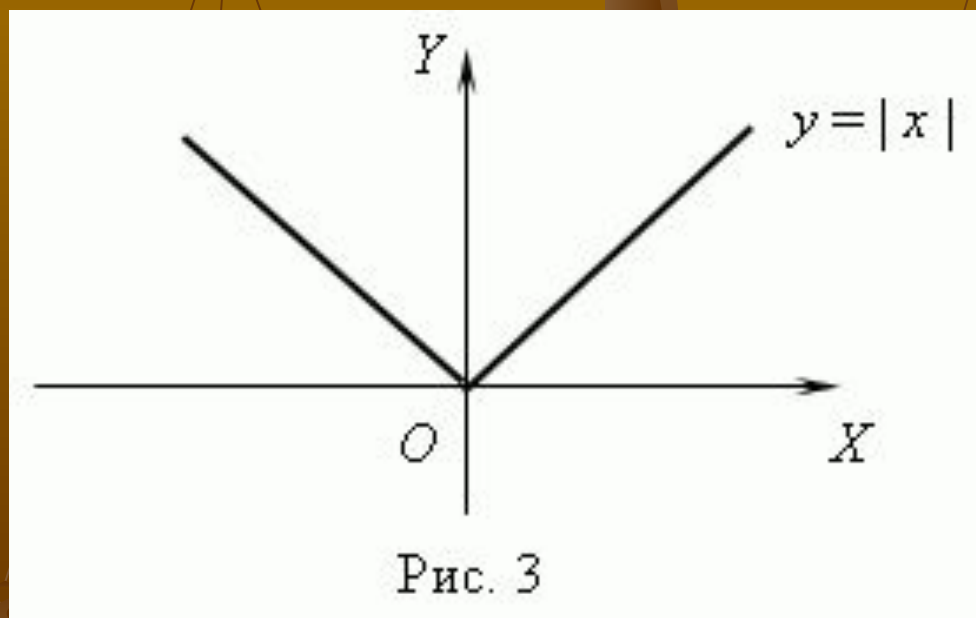


Рис. 3

МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИИ

- 1) Если $f'(x) > 0$ внутри промежутка I , то функция f **возрастает** на этом промежутке.
- 2) Если $f'(x) < 0$ внутри промежутка I , то функция f **убывает** на этом промежутке.
- 3) Если $f'(x) = 0$ внутри промежутка I , то функция f **постоянна** на этом промежутке.

Примеры:

$$1^\circ f(x) = 3x^3 + 4x$$

$$f'(x) = 9x^2 + 4 > 0 \Rightarrow f(x) \text{ **возрастает** при}$$

$$2^\circ f(x) = -2x^5 - 6x$$

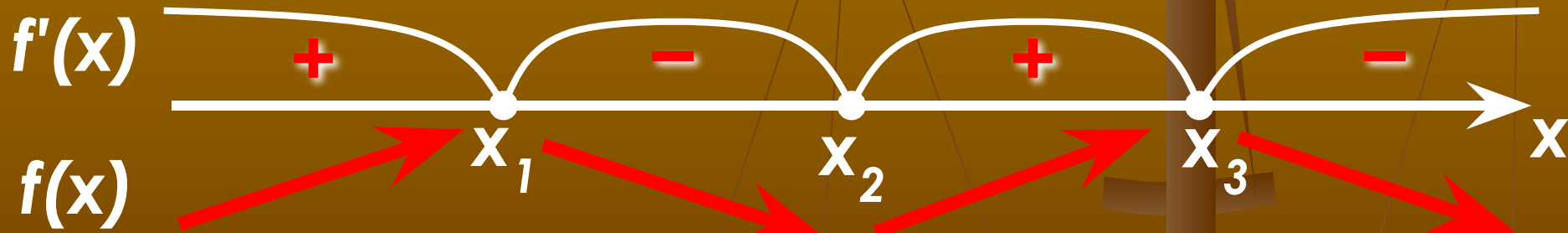
$$f'(x) = -10x^4 - 6 < 0 \Rightarrow f(x) \text{ **убывает** при } x \in \mathbb{R}$$

$$3^\circ f(x) = 12\pi$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) \text{ **постоянна** при } x \in \mathbb{R}$$

Алгоритм исследования функции на монотонность

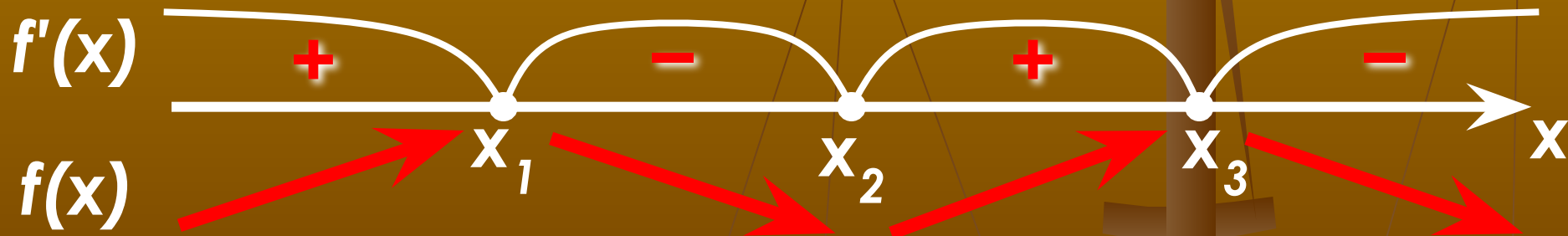
- 1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.
- 2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.
- 3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.
- 4° Полученные данные изображаем на схеме:



- 5° а) Промежутки возрастания: $(-\infty; x_1]; [x_2; x_3]$.
б) Промежутки убывания: $[x_1; x_2]; [x_3; +\infty)$.

Алгоритм исследования функции на экстремум

- 1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.
- 2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.
- 3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.
- 4° Полученные данные изображаем на схеме:



- 5° а) x_1 ; x_3 – точки максимума; x_2 – точка минимума.
б) $f(x_1)$; $f(x_3)$ – максимумы функции;
 $f(x_2)$ – минимум функции.

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции на заданном

- 1° Выясняем существование функции на данном отрезке $[a; b]$.
- 2° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.
- 3° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.
- 4° Отбираем те точки, которые принадлежат заданному промежутку $[a; b]$.
- 5° Находим значение функции в этих точках и на концах промежутка: $f(a)$; $f(b)$; $f(x_1)$; $f(x_2)$; и т. д.
- 6° Выбираем среди полученных значений **наибольшее** или **наименьшее**.