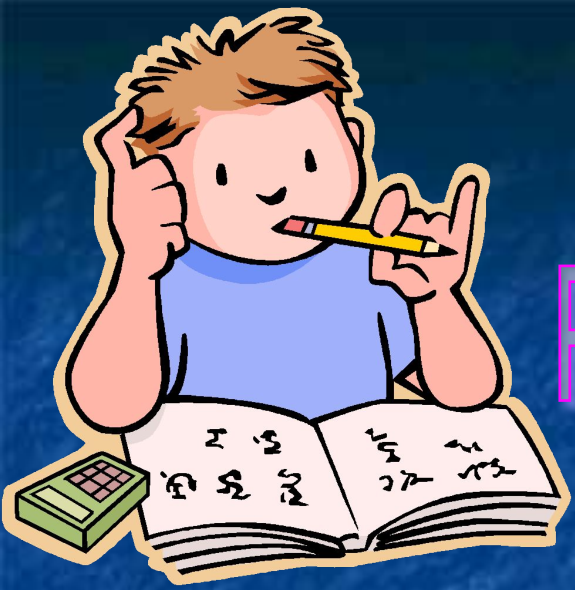
Решение тригонометрических уравнений



Расскажи мне - и я забуду.

Покажи мне - и я запомню.

Дай действовать самому - и я научусь.

$$1)\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \qquad 2)\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 3)\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1 \qquad \mathrm{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$

$$ctg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3} \qquad ctg\frac{\pi}{4}=1 \qquad ctg\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Основные формулы тригонометрии

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$$

Что называется arcsin a?

$\mathbf{a} \in [-1,1]$

$$\arcsin \mathbf{a} = \mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \mathbf{x} = \mathbf{a}, \\ \mathbf{x} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Что называется arccos a?

$\mathbf{a} \in [-1,1]$

$$\arccos \mathbf{a} = \mathbf{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \mathbf{x} = \mathbf{a}, \\ \mathbf{x} \in [0, \pi] \end{cases}$$

Чему равен arccos (-a)?

$$\arccos(-\mathbf{a}) = \boldsymbol{\pi} - \arccos \mathbf{a}$$

Чему равен arcsin (-a)?

$$\arcsin(-\mathbf{a}) = -\arcsin \mathbf{a}$$

Устная работа:

$$\arccos\frac{1}{2} =$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\arcsin\frac{1}{2} =$$

Найди ошибку.

1. $\cancel{\arcsin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

2. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$

3. $\cancel{\arcsin 3 = \arcsin 1 \cdot 3 = \frac{\pi}{4} \cdot 3 = \frac{3\pi}{4}}$

4. $arctg\, 1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

5. $arcctg\left(-\sqrt{3}\right) = \boxed{\frac{5\pi}{6}}$

?

Назовите формулу нахождения корней уравнения вида sin x = a?

$$\sin x = a$$

$$\begin{cases} x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z \\ \mathbf{a} \in [-1;1],\ \mathbf{x} \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Назовите формулу нахождения корней уравнения вида cos x = a

$$\cos \mathbf{x} = \mathbf{a}$$

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \pm\arccos\mathbf{a} + 2\boldsymbol{\pi}\mathbf{k}, \mathbf{k} \in \mathbf{Z} \\ \mathbf{a} \in [-1;1], \mathbf{x} \in [0;\boldsymbol{\pi}] \end{cases}$$

Установите соответствие:

1. $\sin x = 0$
2. $\cos x = -1$
3. $\sin x = 1$
4. $\cos x = 1$
5. $\mathrm{tg}\, x = 1$
6. $\sin x = -1$
7. $\cos x = 0$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$2\pi k, \quad k \in Z$$

$$\pi k, \quad k \in Z$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$\pi + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

Установите соответствие:

1	$\sin x = 0$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$
2	$\cos x = -1$	$2\pi k,\ k \in Z$
3	$\sin x = 1$	$\pi k,\ k \in Z$
4	$\cos x = 1$	$\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
5	$tg\, x = 1$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$
6	$\sin x = -1$	$\pi + 2\pi k,\ k \in Z$
7	$\cos x = 0$	$\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

Молодцы!

Экспресс-опрос

$$1.\ \sin x = \frac{1}{2}$$

$$2.\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3.\ \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$4.\ ctg\ x = \sqrt{3}$$

$$5.\ \sin x = 1{,}5$$

$$6.\ \cos x = -2$$

$$7.\ \operatorname{tg} x = 4$$

Слово **«тригонометрия»** впервые встречается **в 1505 году** в заглавии книги немецкого теолога и математика **Питискуса**. Происхождение этого слова греческое **τρίγωνον** – треугольник, **μετρεω** – мера. Иными словами, тригонометрия – наука об измерении треугольников. Тригонометрия выросла из человеческой практики, в процессе решения конкретных практических задач в областях астрономии, мореплавания и в составлении географических карт.

Некоторые тригонометрические сведения были известны древним вавилонянам и египтянам, но основы этой науки заложены в Древней Греции.

Греческий астроном Гиппарх во II веке до н.э. составил таблицу числовых значений хорд в зависимости от величин стягиваемых ими дуг.

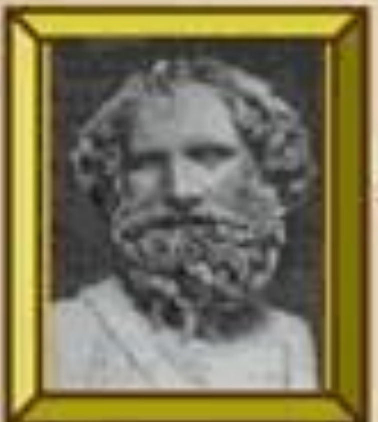
Евклид

Архимед

Аполлоний
Пергский

Фактически различные отношения отрезков треугольника и окружности (а по существу тригонометрические функции) встречаются уже в III в. до н.э. В работах великих математиков Древней Греции Евклида, Архимеда, Апполония Пергского.

Евклид



Архимед

Аполлоний Пергский

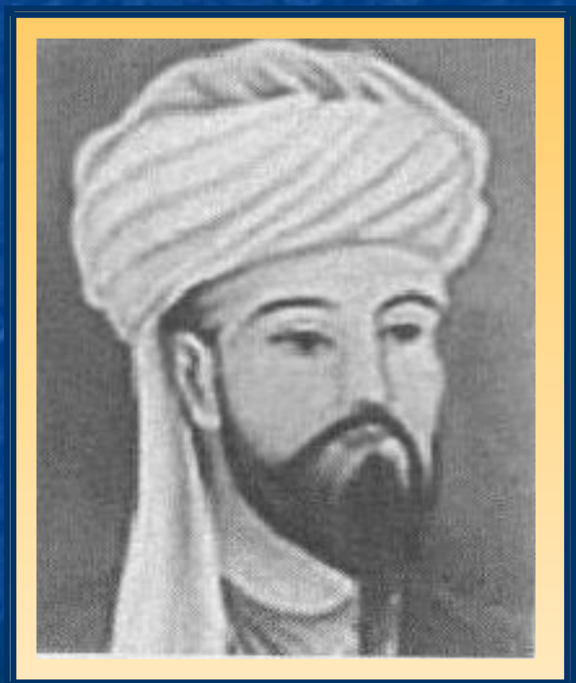
В римский период эти отношения уже достаточно систематично исследовались Менелаем (I в. н.э.), хотя и не приобрели специального названия. Современный синус угла α, например, изучался как полухорда, на которую опирается центральный угол величиной α, или как хорда удвоенной дуги.

Следующий шаг в развитии тригонометрии был сделан индийцами в период с V по XII в.

Наряду с синусом индийцы ввели в тригонометрию косинус, точнее говоря, стали употреблять в своих вычислениях линию косинуса. Им были известны также соотношения $\cos\alpha=\sin(90°-\alpha)$ и $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=r^2$, а также формулы для синуса суммы и разности двух углов.

Сам термин косинус появился значительно позднее в работах европейских ученых впервые в конце XVI в.из так называемого «синуса дополнения», т.е. синуса угла, дополняющего данный угол до 90°. «Синус дополнения» или (по латыни) sinus complementi стали сокращенно записывать как sinus co или co-sinus.

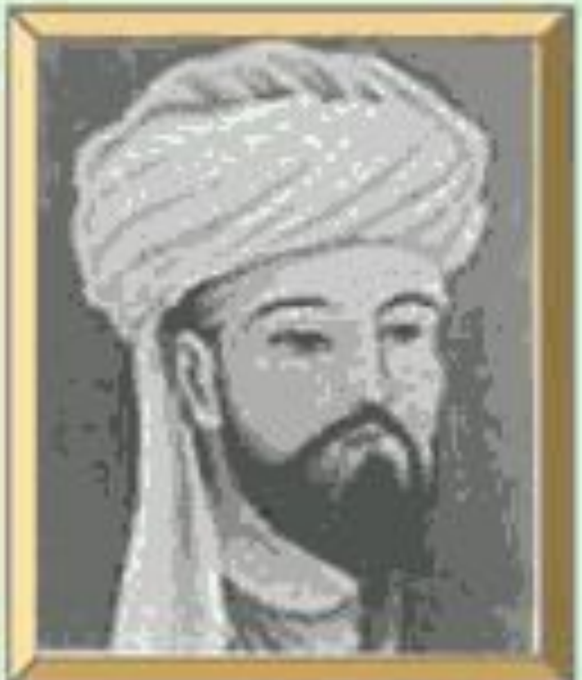
Тригонометрия отделяется от астрономии и становится самостоятельной наукой(X III в.)



Насирэддин Туси

В трудах среднеазиатских ученых тригонометрия превратилась из науки, обслуживающей астрономию, в особую математическую дисциплину, представляющую самостоятельный интерес.
Это отделение обычно связывают с именем азербайджанского математика Насирэддина Туси (1201-1274).

Дальнейшее развитие учение о тригонометрических величинах получило в IX – XV в.в. в странах Среднего и Ближнего Востока в трудах ряда математиков.



Насирэддин Туси

В «Трактате о полном четырехстороннике» впервые изложил тригонометрические сведения как самостоятельный отдел математики, а не придаток в астрономии.

Дальнейшее развитие учение о тригонометрических величинах получило в IX – XV в.в. в странах Среднего и Ближнего Востока в трудах ряда математиков.

Аль-Хорезми

Составил таблицы синусов и котангенсов.

Дальнейшее развитие учение о тригонометрических величинах получило в IX – XV в.в. в странах Среднего и Ближнего Востока в трудах ряда математиков.

Аль Каши

В первой половине XV века вычислил с большой точностью тригонометрические таблицы с шагом в 1^0, которые на протяжении 250 лет оставались непревзойденными.

Региомонтан

Тангенсы возникли в связи с решением задач об определении длины тени. Тангенс (а также котангенс, секанс и косеканс) введен в X в. Арабским математиком Абу-л-Вафой, который составил первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты в XIV в.

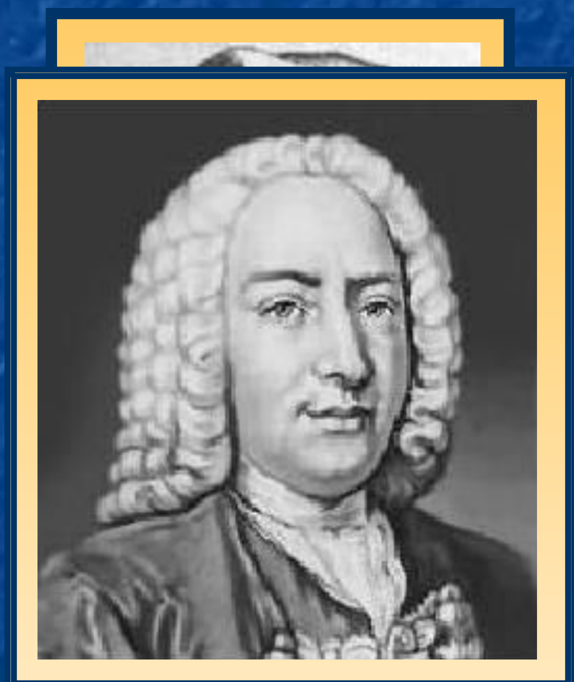
Региомонтан

Сначала английским ученым Т. Бравердином, позднее немецким математиком, астрономом Региомонтаном в 1467 г. Название «тангенс», происходящее от tanger (касаться), появилось в 1583 г. Tangens переводится как «касающийся».

Позже тригонометрия начала широко изучаться в Европе.

Его обширные таблицы синусов через 1° с точностью до 7-ой цифры и его изложенный тригонометрический труд «Пять книг о треугольниках всех видов» имели большое значение для дальнейшего развития тригонометрии в XVI – XVII вв.

И. Региомонтан



Швейцарский математик Иоганн Бернулли (1642-1727) уже применял символы Обратных тригонометрических функций.

Лагранж

Бернулли

Но общепринятыми эти символы стали лишь в конце XVIII столетия. Приставка «арк» происходит от латинского arcus (дуга), что вполне согласуется со смыслом понятия: arcsin x, например,- это угол (а можно сказать, и дуга), синус которого равен x.

Лагранж

Бернулли

Современные обозначения arcsin и arctg появляются в 1772 году в работах венского математика Шерфера и известного французского учёного Ж.Л.Лагранжа. Хотя несколько ранее их уже рассматривал Д.Бернулли, который употреблял иную символику.

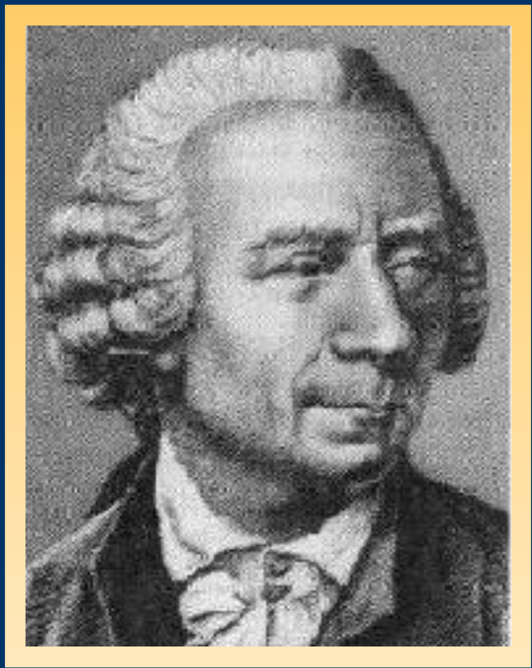
Франсуа Виет

- Франсуа Виет дополнил и систематизировал различные случаи решения плоских и сферических треугольников, открыл формулы для тригонометрических функций от кратных углов.

В XVII – XIX вв. тригонометрия становится одной из глав математического анализа. Она находит большое применение в механике, физике и технике, особенно при изучении колебательных движений и других периодических процессов.

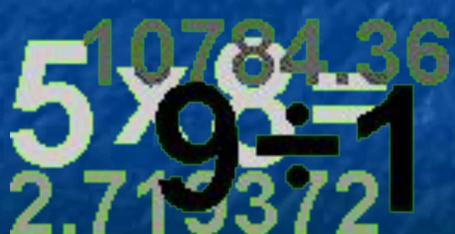
Жан Фурье

Доказал, что всякое периодическое движение может быть представлено (с любой степенью точности) в виде суммы простых гармонических колебаний.

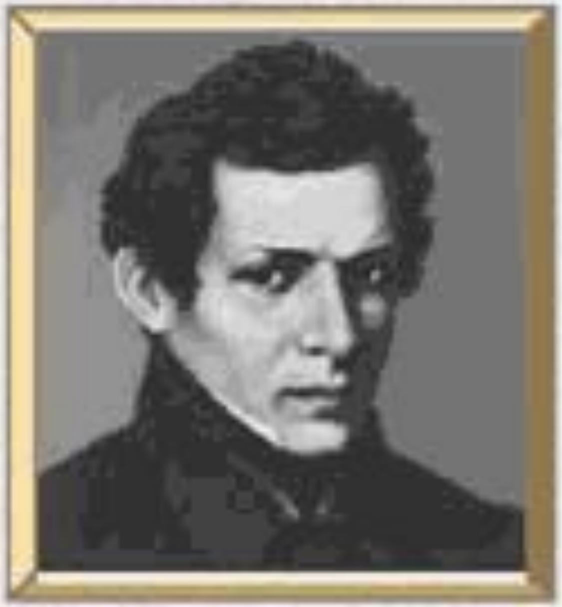


Леонард Эйлер

Окончательный вид тригонометрия приобрела в XVIII веке в трудах Л. Эйлера.



Разрабатывает учение о тригонометрических функциях любого аргумента.



Исаак Ньютон

Н.И.Лобачевский

Содействовал развитию аналитической теории тригонометрических функций.

В XIX веке продолжил развитие теории тригонометрических функций.

$$3\cos 2x - 5\cos x = 1$$

$$3(\cos^2 x - \sin^2 x) - 5\cos x = 1$$

$$3(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x) - 5\cos x - 1 = 0$$

$$6\cos^2 x - 5\cos x - 1 = 0$$

$$\text{пусть}\ \cos x = t$$

$$6t^2 - 5t - 4 = 0$$

$$\cos x = \frac{4}{3} \qquad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ответ}: \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\cos 3x - \cos 5x = \sin 4x$$

$$-2\sin\frac{3x+5x}{2}\cdot\sin\frac{3x-5x}{2} = \sin 4x$$

$$-2\sin 4x\cdot\sin(-x) = \sin 4x$$

$$2\underline{\sin 4x}\sin x - \underline{\sin 4x} = 0$$

$$\sin 4x(2\sin x - 1) = 0$$

$$\sin 4x = 0$$

$$4x = \pi n$$

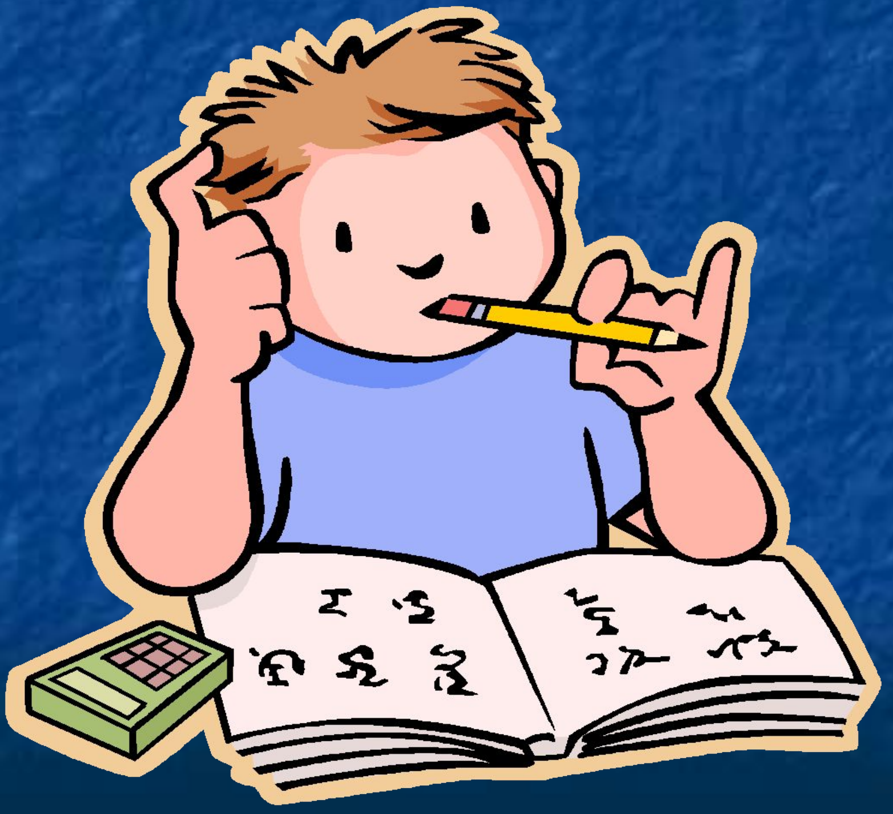
$$\boxed{x = \frac{\pi n}{4}, n \in Z}$$

$$2\sin x = 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z}$$

Однородные тригонометрические уравнения



$$2\sin x-\cos x=0 \;\Big|\; :\ \cos x$$

$$2\,\mathrm{tg}\,x-1=0$$

$$\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x=arctg\,\frac{1}{2}+\pi n,\ n\in Z}$$

$$3\sin^2 x + \sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0 \;\Big|\; : \cos^2 x$$

$$3tg^2 x + tgx - 4 = 0$$

пусть $\mathrm{tg}\, x = t$ $\quad 3t^2 + t - 4 = 0$

$\mathrm{tg}\, x = 1$ $\quad \mathrm{tg}\, x = -\dfrac{4}{3}$

$x = arctg 1 + \pi n$ $\quad x = arctg(-\dfrac{4}{3}) + \pi n$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z}$$

$$\boxed{x = -arctg\frac{4}{3} + \pi n, n \in Z}$$

Определите вид уравнения и укажите способ его решения:

а) $\sin x = 2\cos x$;

б) $\sin x + \cos x = 0$;

в) $4\cos 3x + 5\sin 3x = 0$;

г) $1 + 7\cos^2 x + 3\sin^2 x = 0$;

д) $\sin 3x - \cos 3x = 0$;

е) $\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$