Эконометрика-1

Филатов Александр Юрьевич
(Главный научный сотрудник, доцент ШЭМ ДВФУ)

alexander.filatov@gmail.com
http://vk.com/alexander.filatov, **http://vk.com/baikalreadings**

Лекции 7.1-7.2

Модели обработки остатков *ARMA*. Лаговые модели

Модели обработки остатков

2

$y_t = T_t + S_t + \varepsilon_t$

Из исходного временного ряда y_t исключаем всю неслучайную составляющую, в частности, тренд и сезонность, и переходим к ряду остатков ε_t. В отличие от пространственных выборок во временных рядах остатки тоже можно моделировать.

Автоковариационная и автокорреляционная функция:

$$\gamma(\tau) = \operatorname{cov}(\varepsilon_t;\varepsilon_{t+\tau}) = \frac{1}{T-\tau}\sum_{t=1}^{T-\tau}\varepsilon_t\varepsilon_{t+\tau} = КОВАР(\varepsilon_t;\varepsilon_{t+\tau}),$$

$$r(\tau) = r(\varepsilon_t;\varepsilon_{t+\tau}) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} = \left(\frac{1}{T-\tau}\sum_{t=1}^{T-\tau}\varepsilon_t\varepsilon_{t+\tau}\right)\Bigg/\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2\right).$$

$$\gamma(\tau) = \gamma(-\tau), \quad r(\tau) = r(-\tau).$$

Частная автокорреляционная функция – устранено влияние всех промежуточных членов ряда между ε_t и $\varepsilon_{t+\tau}$:

$$r_{част}(\tau) = r(\varepsilon_t;\varepsilon_{t+\tau} \mid \varepsilon_{t+1} = \ldots = \varepsilon_{t+\tau-1} = 0).$$

Авторегрессия первого порядка. Марковский процесс $AR(1)$

Марковский процесс $AR(1)$:

$$\varepsilon_t = \alpha\varepsilon_{t-1} + \delta_t, \quad \delta_t - \text{белый шум}, \ E\delta_t \equiv 0, \ D\delta_t = \sigma_0^2.$$

Идентификация модели: найти $\hat{\alpha}$ и $\hat{\sigma}_0^2$.

Домножим на ε_t, ε_{t-1}, ε_{t-2} и т.д. и перейдем к математическим ожиданиям:

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_t) = E(\alpha\varepsilon_{t-1} + \delta_t)^2 = \alpha^2 E\varepsilon_{t-1}^2 + 2\alpha\, E(\varepsilon_{t-1}\delta_t) + E\delta_t^2,$$

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = E\left(\alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \delta_t\varepsilon_{t-1}\right) = \alpha E\varepsilon_{t-1}^2 + E(\delta_t\varepsilon_{t-1}),$$

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-2}) = E(\alpha\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \delta_t\varepsilon_{t-2}) = \alpha E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) + E(\delta_t\varepsilon_{t-2}).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma(0) = \alpha^2\gamma(0) + \sigma_0^2,$$

$$\gamma(1) = \alpha\gamma(0), \qquad r(1) = \alpha\, r(0), \qquad r(\tau) = \alpha\, r(\tau-1) = r^{\tau}(1).$$

$$\gamma(2) = \alpha\gamma(1). \qquad r(2) = \alpha\, r(1).$$

Итоговые формулы:

$$\hat{\alpha} = \frac{\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(0)} = \hat{r}(1), \quad \hat{\sigma}_0^2 = \left(1 - \hat{\alpha}^2\right)\hat{\gamma}(0).$$

Авторегрессия второго порядка. Процесс Юла $AR(2)$

Процесс Юла $AR(2)$:

$$\varepsilon_t = \alpha_1 \varepsilon_{t-1} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2} + \delta_t .$$

Идентификация модели: найти $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ и $\hat{\sigma}_0^2$.

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_t) = E(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}\varepsilon_t + \delta_t \varepsilon_t) =$$

$$= \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t) + \alpha_2 E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_t) + E(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}\delta_t + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}\delta_t + \delta_t^2)$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-1}) = E(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1} + \delta_t \varepsilon_{t-1}) = \alpha_1 E\varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 E(\varepsilon_{t-2}\varepsilon_{t-1}) + E(\delta_t \varepsilon_{t-1}),$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-2}) = E(\alpha_1 \varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2} + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \delta_t \varepsilon_{t-2}) = \alpha_1 E(\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-2}) + \alpha_2 E\varepsilon_{t-2}^2 + E(\delta_t \varepsilon_{t-2}).$$

....

$$\gamma(0) = \alpha_1 \gamma(1) + \alpha_2 \gamma(2) + \sigma_0^2,$$

$$\gamma(1) = \alpha_1 \gamma(0) + \alpha_2 \gamma(1), \qquad r(1) = \alpha_1 r(0) + \alpha_2 r(1),$$

$$\gamma(2) = \alpha_1 \gamma(1) + \alpha_2 \gamma(0). \qquad r(2) = \alpha_1 r(1) + \alpha_2 r(0).$$

Итоговые формулы:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{r}(1) - \hat{r}(1)\,\hat{r}(2)}{1 - \hat{r}^2(1)}, \quad \hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{r}(2) - \hat{r}^2(1)}{1 - \hat{r}^2(1)}, \quad \hat{\sigma}_0^2 = \hat{\gamma}(0)\left(1 - \hat{\alpha}_1 \hat{r}(1) - \hat{\alpha}_2 \hat{r}(2)\right).$$

Авторегрессия порядка *p*: *AR*(*p*)

5

Общий вид авторегрессионной модели *AR*(*p*):

$$\varepsilon_t = \alpha_1\varepsilon_{t-1} + \alpha_2\varepsilon_{t-2} + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{t-p} + \delta_t.$$

Идентификация модели: найти $\hat{\alpha}_1,\ldots,\hat{\alpha}_p$ и $\hat{\sigma}_0^2$.

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_t) = E(\alpha_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}\varepsilon_t + \delta_t\varepsilon_t), \qquad \gamma(0) = \alpha_1\gamma(1) + \ldots\alpha_p\gamma(p) + \sigma_0^2,$$

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = E(\alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}\varepsilon_{t-1} + \delta_t\varepsilon_{t-1}), \qquad \gamma(1) = \alpha_1\gamma(0) + \ldots + \alpha_p\gamma(p-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-p}) = E(\alpha_1\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-p} + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2 + \delta_t\varepsilon_{t-p}). \qquad \gamma(p) = \alpha_1\gamma(p-1) + \ldots + \alpha_p\gamma(0).$$

Матричная форма:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r(1) & r(2) & \ldots & r(p-1) \\ r(1) & 1 & r(1) & \ldots & r(p-2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r(p-1) & r(p-2) & r(p-3) & \ldots & 1 \end{pmatrix} \qquad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \ldots \\ r(p) \end{pmatrix}$$

Итоговые формулы:

$$R\alpha = r, \quad \hat{\alpha} = \hat{R}^{-1}\hat{r}, \quad \hat{\sigma}_0^2 = \hat{\gamma}(0)(1 - \hat{\alpha}_1\hat{r}(1) - \ldots - \hat{\alpha}_p\hat{r}(p)).$$

Модели скользящего среднего

Общий вид модели МА(q):

$$\varepsilon_t = \delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \theta_2\delta_{t-2} - \ldots - \theta_q\varepsilon_{t-q}.$$

Частные случаи:

$$MA(1):\ \ \varepsilon_t = \delta_t - \theta\delta_{t-1}.$$

$$MA(2):\ \ \varepsilon_t = \delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \theta_2\delta_{t-2}.$$

Двойственность в представлении моделей $AR(p)$ и $MA(q)$:

$$AR(1):\ \ \varepsilon_t = \alpha\varepsilon_{t-1} + \delta_t,$$

$$\varepsilon_{t-1} = \alpha\varepsilon_{t-2} + \delta_{t-1}, \quad \varepsilon_t = \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \alpha\delta_{t-1} + \delta_t$$

$$\varepsilon_{t-2} = \alpha\varepsilon_{t-3} + \delta_{t-2}, \quad \varepsilon_t = \alpha^3\varepsilon_{t-3} + \alpha^2\varepsilon_{t-2} + \alpha\delta_{t-1} + \delta_t$$

$$\varepsilon_t = \delta_t + \alpha\delta_{t-1} + \alpha^2\delta_{t-2} + \ldots, \quad |\alpha| < 1, \quad AR(1) \sim MA(+\infty).$$

Аналогично, $AR(p) \sim MA(+\infty)$, $MA(q) \sim AR(+\infty)$.

Стационарность и обратимость:

Ряд $AR(p)$ стационарен, если все корни характеристического уравнения $1-\alpha_1 z-\alpha_2 z^2-\ldots-\alpha_p z^p=0$ по модулю больше единицы.

Ряд $MA(q)$ стационарен всегда, но обратим (представим в виде $AR(p)$), если все корни $1-\theta_1 z-\theta_2 z^2-\ldots-\theta_q z^q=0$ по модулю больше единицы.

Скользящее среднее первого порядка: *MA*(1)

Модель *MA*(1):

$$\varepsilon_t = \delta_t - \theta\delta_{t-1}.$$

Идентификация модели: найти $\hat{\theta}$ и $\hat{\sigma}_0^2$.

$$\gamma(0) = E(\varepsilon_t\varepsilon_t) = E(\delta_t - \theta\delta_{t-1})^2 = E\delta_t^2 - 2\theta\,\underbrace{E(\delta_t\delta_{t-1})}_{=0} + \theta^2 E\delta_{t-1}^2 = \sigma_0^2(1+\theta^2)$$

$$\gamma(1) = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = E(\delta_t - \theta\delta_{t-1})(\delta_{t-1} - \theta\delta_{t-2}) =$$

$$= E(\delta_t\delta_{t-1}) - \theta\,E\delta_{t-1}^2 - \theta\,E(\delta_t\delta_{t-2}) + \theta^2 E(\delta_{t-1}\delta_{t-2}) = -\theta\sigma_0^2.$$

$$r(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = -\frac{\theta}{1+\theta^2},$$

$$\theta^2 + \frac{\theta}{\hat{r}(1)} + 1 = 0.$$ Выбираем из двух корней тот, который удовлетворяет условию $|\theta| < 1$.

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{\gamma}(0)}{1+\hat{\theta}^2}.$$

Скользящее среднее порядка q: $MA(q)$

Модель $MA(q)$:

$$\varepsilon_t = \delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q}.$$

Идентификация модели: найти $\hat\theta_1,\ldots,\hat\theta_q$ и $\hat\sigma_0^2$.

$$\gamma(0) = E(\varepsilon_t\varepsilon_t) = E(\delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q})(\delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q}) =$$
$$= \sigma_0^2\left(1 + \theta_1^2 + \ldots + \theta_q^2\right).$$

$$\gamma(1) = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = E(\delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q})(\delta_{t-1} - \theta_1\delta_{t-2} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q-1}) =$$
$$= \sigma_0^2\left(-\theta_1 + \theta_2\theta_1 + \theta_3\theta_2 \ldots + \theta_q\theta_{q-1}\right).$$

$$\gamma(\tau) = E(\varepsilon_t\varepsilon_{t-\tau}) = E(\delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q})(\delta_{t-\tau} - \theta_1\delta_{t-1-\tau} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q-\tau}) =$$
$$= \sigma_0^2\left(-\theta_\tau + \theta_{\tau+1}\theta_1 + \theta_{\tau+2}\theta_2 \ldots + \theta_q\theta_{q-\tau}\right), \quad \tau = 1,2,\ldots,q.$$

$$r(\tau) = \frac{-\theta_\tau + \theta_{\tau+1}\theta_1 + \theta_{\tau+2}\theta_2 \ldots + \theta_q\theta_{q-\tau}}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \ldots + \theta_q^2}, \quad \tau = 1,2,\ldots,q.$$

Идентификация модели осуществляется с помощью решения системы квадратичных уравнений $r(\tau) = \hat r(\tau)$, $\tau = 1,2,\ldots,q$.

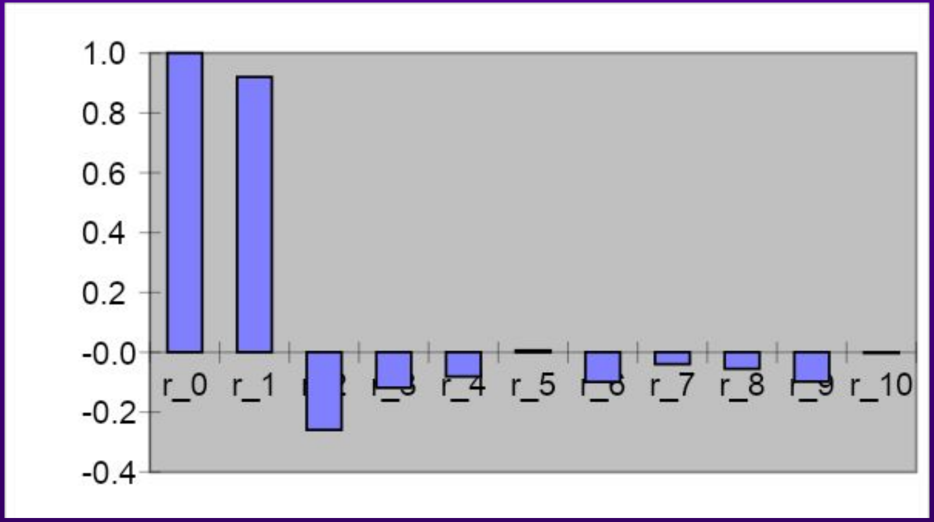
Выявление порядка модели с помощью коррелограмм

Коррелограмма – гистограмма коэффициентов корреляции $r(\tau)$.

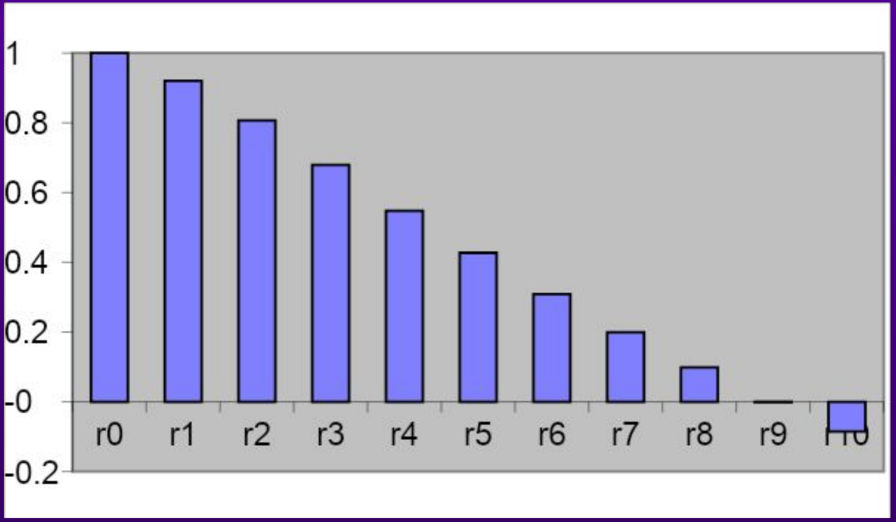
Частная коррелограмма – гистограмма частных коэффициентов корреляции $r_{\text{част}}(\tau)$.

Для $AR(p)$ $r_{\text{част}}(\tau) = 0$ при $\tau > p$, $r(\tau)$ экспоненциально убывает.

Для $MA(q)$ $r(\tau) = 0$ при $\tau > q$, $r_{\text{част}}(\tau)$ экспоненциально убывает.



$r_{\text{част}}(\tau)$



$r(\tau)$

Иллюстрация для модели AR(1)

Авторегрессионные модели со скользящими средними в остатках

Модель $ARMA(p, q)$:

$$\varepsilon_t = \alpha_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + \alpha_p\varepsilon_{t-p} + \delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q}.$$

Замечание:

ε_t – не зависит от будущих δ_t, но зависит от прошлых и текущих.

Идентификация модели: найти $\hat{\alpha}_1,\ldots,\hat{\alpha}_p$ $\hat{\theta}_1,\ldots,\hat{\theta}_q$ и $\hat{\sigma}_0^2$.

Этап 1: нахождение $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$ из системы линейных уравнений порядка p.

$$\varepsilon_t - \alpha_1\varepsilon_{t-1} - \ldots - \alpha_p\varepsilon_{t-p} = \delta_t - \theta_1\delta_{t-1} - \ldots - \theta_q\delta_{t-q}.$$

$$\begin{cases} r(q+1) - \alpha_1 r(q) - \ldots - \alpha_p r(q+1-p) = 0, & *\,\varepsilon_{t-q-1} \\ r(q+2) - \alpha_1 r(q+1) - \ldots - \alpha_p r(q+2-p) = 0, & *\,\varepsilon_{t-q-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ r(q+p) - \alpha_1 r(q+p-1) - \ldots - \alpha_p r(q) = 0. & *\,\varepsilon_{t-q-p} \end{cases}$$

Подставляем выборочные значения $r(k)$ и находим $\alpha_1,\ldots,\alpha_p$.

Авторегрессионные модели со скользящими средними в остатках

Этап 2: нахождение $\theta_1,\ldots,\theta_q$ из системы нелинейных уравнений порядка q.

$$(0):\quad \varepsilon_t-\alpha_1\varepsilon_{t-1}-\ldots-\alpha_p\varepsilon_{t-p}=\delta_t-\theta_1\delta_{t-1}-\ldots-\theta_q\delta_{t-q}.$$

Протиражируем соотношение (0) для $t+1,\ldots,t+q$.

$$(1):\quad \varepsilon_{t+1}-\alpha_1\varepsilon_t-\ldots-\alpha_p\varepsilon_{t+1-p}=\delta_{t+1}-\theta_1\delta_t-\ldots-\theta_q\delta_{t+1-q},$$

$$(2):\quad \varepsilon_{t+2}-\alpha_1\varepsilon_{t+1}-\ldots-\alpha_p\varepsilon_{t+2-p}=\delta_{t+2}-\theta_1\delta_{t+1}-\ldots-\theta_q\delta_{t+2-q},$$

....

$$(q):\quad \varepsilon_{t+q}-\alpha_1\varepsilon_{t+q-1}-\ldots-\alpha_p\varepsilon_{t+q-p}=\delta_{t+q}-\theta_1\delta_{t+q-1}-\ldots-\theta_q\delta_t.$$

Умножаем (0) на (1), (2),…,(q), переходим к математическому ожиданию. Получаем систему из q квадратных уравнений с q неизвестными. Находим из нее $\theta_1,\ldots,\theta_q$.

Замечание: удобно идентифицировать модель $ARMA(p, 1)$, для $q \geq 2$ используются численные методы.

Операторы F_+ и F_- сдвига во времени

Оператор «вперед»: $F_+\varepsilon_t = \varepsilon_{t+1}$;
Оператор «назад»: $F_-\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$.

Свойства:

1. $F_+ \cdot F_- = 1, \quad F_+(F_-\varepsilon_t) = F_+\varepsilon_{t-1} = \varepsilon_t.$
2. $F_+^k\varepsilon_t = \varepsilon_{t+k}, \quad F_-^k\varepsilon_t = \varepsilon_{t-k}.$
3. $\left(c_0 + c_1F_- + \ldots c_mF_-^m\right)\varepsilon_t = c_0 + c_1\varepsilon_{t-1} + \ldots + c_m\varepsilon_{t-m},$
   $\left(c_0 + c_1F_+ + \ldots c_mF_+^m\right)\varepsilon_t = c_0 + c_1\varepsilon_{t+1} + \ldots + c_m\varepsilon_{t+m}.$

***ARMA*(*p*, *q*):**

$$\left(1 - \alpha_1F_- - \alpha_2F_-^2 - \ldots - \alpha_pF_-^p\right)\varepsilon_t = \left(1 - \theta_1F_- - \theta_2F_-^2 - \ldots - \theta_qF_-^q\right)\delta_t$$

Оператор «дельта»: $\Delta = 1 - F_-$:

$$\Delta\varepsilon_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}.$$

Проблема перепараметризации

Пример модели ***ARMA*** **(2, 1):**

$$\varepsilon_t - 1{,}3\varepsilon_{t-1} + 0{,}4\varepsilon_{t-2} = \delta_t - 0{,}5\delta_{t-1}.$$

$$\left(1 - 1{,}3F_{-} + 0{,}4F_{-}^2\right)\varepsilon_t = \left(1 - 0{,}5F_{-}\right)\delta_t, \quad \left(1 - 0{,}5F_{-}\right)\left(1 - 0{,}8F_{-}\right)\varepsilon_t = \left(1 - 0{,}5F_{-}\right)\delta_t,$$

$$\left(1 - 0{,}8F_{-}\right)\varepsilon_t = \delta_t, \quad \varepsilon_t = 0{,}8\varepsilon_{t-1} + \delta_t.$$

Часто множители не идентичны, но близки между собой:

$$\left(1 - 0{,}4F_{-}\right)\left(1 - 0{,}8F_{-}\right)\varepsilon_t = \left(1 - 0{,}5F_{-}\right)\delta_t,$$

Можно ожидать нестабильность оценок параметров. Если сокращение на похожие множители кажется некорректным, можно использовать сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{\left(1 - 0{,}4F_{-}\right)\left(1 - 0{,}8F_{-}\right)}{1 - 0{,}5F_{-}} = \left(1 - 0{,}4F_{-}\right)\left(1 - 0{,}8F_{-}\right)\left(1 + 0{,}5F_{-} + 0{,}25F_{-}^2 + 0{,}125F_{-}^3 + \ldots\right) =$$

$$= \left(1 - 1{,}2F_{-} + 0{,}32F_{-}^2\right)\left(1 + 0{,}5F_{-} + 0{,}25F_{-}^2 + 0{,}125F_{-}^3 + \ldots\right) \approx 1 - 0{,}7F_{-}.$$

$$\varepsilon_t = 0{,}7\varepsilon_{t-1} + \delta_t.$$

Проверка возможности упрощения модели *ARMA*(*p*,*q*)

Представление модели *ARMA*(*p*,*q*) в еще одной форме:

$$\prod_{i=1}^{p}\left(1-\frac{1}{z_i(\alpha)}F_-\right)\varepsilon_t=\prod_{j=1}^{q}\left(1-\frac{1}{z_j(\theta)}F_-\right)\delta_t,$$

$z_i(\alpha)$ – корни характеристического уравнения *AR*-модели,

$z_j(\theta)$ – корни характеристического уравнения *MA*-модели.

Пример:

$$\varepsilon_t-1{,}3\varepsilon_{t-1}+0{,}4\varepsilon_{t-2}=\delta_t-0{,}5\delta_{t-1}.$$

$$1-1{,}3z+0{,}4z^2=0, \qquad 1-0{,}5z=0,$$

$$z_1=1{,}25,\quad z_2=2, \qquad z=2,$$

$$\left(1-\frac{1}{2}F_-\right)\left(1-\frac{1}{1{,}25}F_-\right)\varepsilon_t= \qquad \left(1-\frac{1}{2}F_-\right)\delta_t=$$

$$=(1-0{,}5F_-)(1-0{,}8F_-)\varepsilon_t= \qquad =(1-0{,}5F_-)\delta_t=$$

$$=\varepsilon_t-1{,}3\varepsilon_{t-1}+0{,}4\varepsilon_{t-2} \qquad =\delta_t-0{,}5\delta_{t-1}.$$

Многомерный временной ряд. Лаговые модели

Многомерный временной ряд:

$x_1, x_2, ..., x_T;$

$y_1, y_2, ..., y_T.$

Можно учитывать лаг – запаздывание во времени.

Инфляция негативно влияет на экономический рост не сразу, а спустя некоторое время.

Лаг может быть распределенным – наблюдается распределенный во времени эффект воздействия.

$$y(t) = \alpha + \theta_0 x_t + \theta_1 x_{t-1} + ... + \theta_T x_{t-T} + \varepsilon_t.$$

Зависимость расходов населения $y(t)$ от наблюдаемых доходов $x(t)$.

θ_k – доля дохода, которая тратится через k периодов после получения.

Если наблюдаемый доход равен истинному, $\Sigma\theta_k = 1$, $\theta_k \in [0; 1]$

Если наблюдаемый доход меньше истинного, $\Sigma\theta_k > 1$

Зависимость объемов основных фондов $y(t)$ от инвестиций $x(t)$.

Регрессионные модели с распределенными лагами

Проблемы использования обычных регрессионных моделей:

1. Неизвестен период распределенного во времени воздействия T.
2. Как правило, значение T достаточно велико.
3. Малое по сравнению с числом параметров модели число наблюдений.
4. Высокая степень корреляции между объясняющими переменными.

Решение проблемы – особая структура модели!

Общий случай – зависимость большого числа коэффициентов дистрибутивной лаговой модели $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_T$ от малого числа параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Частные случаи:

1. Экспоненциальное убывание силы воздействия – модель Койка.
2. Полиномиальная лаговая структура Ширли Алмон.

Модель Койка

Предположения модели:

1. Период распределенного во времени воздействия велик, в пределе равен бесконечности.
2. Сила воздействия экспоненциально убывает.

$$y_t = \alpha + \theta_0 x_t + \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t, \quad \theta_k = \theta_0 \lambda^k, \quad \lambda \in (0;1).$$

Умножим исходную модель на λ и введем задержку на один период:

$$y_t = \alpha + \theta_0 x_t + \theta_0 \lambda x_{t-1} + \theta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t$$

$$\lambda y_{t-1} = \lambda \alpha + \theta_0 \lambda x_{t-1} + \theta_0 \lambda^2 x_{t-2} + \theta_0 \lambda^3 x_{t-3} + \ldots + \lambda \varepsilon_{t-1}.$$

Вычтем второе неравенство из первого:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \alpha(1-\lambda) + \theta_0 x_t + \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_{t-1}.$$

Итоговая модель:

$$y_t = \alpha(1-\lambda) + \theta_0 x_t + \lambda y_{t-1} + \delta_t, \quad \delta_t = \varepsilon_t - \lambda \varepsilon_t.$$

Преимущества модели:

1. Бесконечное число параметров меняется на три: α, θ_0, λ.
2. Исчезает проблема мультиколлинеарности.
3. Модель из дистрибутивно-лаговой превращается в авторегрессию.

Полиномиальная лаговая структура Ширли Алмон

Предположения модели:

1. Период распределенного во времени воздействия велик, в пределе равен бесконечности.
2. Коэффициенты представляют собой полиномы от малого числа параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

$$y_t = \alpha + \theta_0 x_t + \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t,$$

$$\theta_k = \alpha_0 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \ldots + \alpha_m k^m, \quad k = 0, \ldots, T, \quad m \le 3.$$

$$\begin{cases} \theta_0 = \alpha_0, \\ \theta_1 = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m, \\ \theta_2 = \alpha_0 + 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + \ldots + 2^m \alpha_m, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta_T = \alpha_0 + T\alpha_1 + T^2\alpha_2 + \ldots + T^m \alpha_m. \end{cases}$$

Полиномиальная лаговая структура Ширли Алмон

$$y_t = \alpha + \theta_0 x_t + \theta_1 x_{t-1} + \theta_2 x_{t-2} + \ldots + \theta_T x_{t-T} + \varepsilon_t =$$

$$= \alpha + \alpha_0 x_t +$$

$$+ \alpha_0 x_{t-1} + \alpha_1 x_{t-1} + \ldots + \alpha_m x_{t-1} +$$

$$+ \alpha_0 x_{t-2} + 2\alpha_1 x_{t-2} + \ldots + 2^m \alpha_m x_{t-2} +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \alpha_0 x_{t-T} + T\alpha_1 x_{t-T} + \ldots + T^m \alpha_m x_{t-T}.$$

Итоговая модель:

$$y_t = \alpha + \alpha_0 \left(x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \ldots + x_{t-T} \right) +$$

$$+ \alpha_1 \left(x_{t-1} + 2x_{t-2} + \ldots + Tx_{t-T} \right) +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \alpha_m \left(x_{t-1} + 2^m x_{t-2} + \ldots + T^m x_{t-T} \right).$$

Большое число параметров (T+2) меняется на малое (m+2): α, $\alpha_0, \ldots, \alpha_m$.

Спасибо за внимание!

alexander.filatov@gmail.com

http://vk.com/alexander.filatov, **http://vk.com/baikalreadings**