Импульсное управление моделями экономической динамики

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. доцент кафедры ПМ
Соколов В.А.
Студент:
Паршаков Р.В.

ЦЕЛЬ

Исследование разрешимости краевых задач с импульсным управлением для динамических моделей экономики и нахождение импульсного управления

ЗАДАЧИ

- Модифицировать некоторые динамические модели экономики путем внедрения кусочно-постоянного запаздывания
- Сформулировать краевые задачи для этих моделей
- Преобразовать исходные задачи к задачам с импульсным управлением
- Получить решение дифференциальных уравнений с кусочно-постоянным запаздыванием в явном виде, которые описывают исследуемые динамические модели
- Доказать разрешимость преобразованных краевых задач для каждой модели
- Найти управления, позволяющие достигнуть к конечному моменту времени желаемых результатов

W – подстановка Азбелева

Краевая задача: $(Lx)(t) = x'(t) + p(t)x\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + q(t)x(t) = f(t), t\epsilon[0, nT]$ (1)

$$lx = \psi x(0) + \int_0^{nT} \varphi(s)x'(s)ds = \beta. \quad (2)$$

По числу ψ и функции φ можно найти такую функцию $u(t)$, что $u(0) \neq 0$, $lu = 1$ и система уравнений

$$x'(t) + B(t)x(0) = z(t), lx = \beta,$$

Где $B(t) = -\frac{u'(t)}{u(0)}$, однозначно разрешима и ее решение имеет вид:

$$x(t) = u(t)\beta + \int_0^{nT} W(t,s)z(s)ds. \quad (3)$$

$$\text{Здесь } W(t,s) = \begin{cases} 1 - u(t)\varphi(s), 0 \le s \le t \le nT \\ -u(t)\varphi(s), 0 \le t \le s \le nT \end{cases} \quad (4)$$

Краевая задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$z(t) = \int_0^{nT} K(t,s)z(s)ds + g(t), \quad (5)$$

Уравнение заменяется интегральным уравнением Фредгольма второго рода с вырожденным ядром

$$z(t) = \int_0^{nT} \widetilde{K}(t,s)z(s)ds + g(t) , \widetilde{K}(t,s) = \sum_{j=0}^{m} a_j(t)\, b_j(s). \quad (6)$$

$$x_i = \sum_{j=0}^{5} \alpha_{ij}x_j + c_i, i = \overline{0,m} \quad (7)$$

Исследуется обратимость матрицы А, построенной с заданной точностью по функциям

ТЕОРЕМА О РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

- Теорема: Пусть матрица

$$A = \{\gamma_{ij}\}, \quad \gamma_{ij} = e_{ij} - \alpha_{ij}, \quad \text{где} \quad e_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \quad i, j = \overline{1, m} \tag{8}$$

обратима и выполнено неравенство $\varepsilon < 1/r$, где

$$r = 1 + \left\{ \int_0^{nT} \int_0^{nT} [R(t,s)]^2 \, dt ds \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad R(t,s) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{m} a_j(t) \theta_{ji} b_i(s). \tag{9}$$

Тогда краевая задача (1) – (2) однозначно разрешима, и ее решение имеет представление

$$\tilde{Y}(t) = \int_0^t \tilde{z}(s) ds - \int_0^t B(s) Y(0) ds \tag{10}$$

с точностью

$$\int_0^{nT} [z(t) - \tilde{z}(t)]^2 dt \leq \frac{\varepsilon^2 r^4}{(1 - \varepsilon \cdot r)^2} \cdot \int_0^{nT} [f(t)]^2 dt, \tag{11}$$

- При естественных предположениях относительно ядра для любого заданного вырожденное ядро можно определить следующим образом:

$$\int_0^{nT} \int_0^{nT} \left[K(t,s) - \tilde{K}(t,s)\right]^2 dt ds \leq \varepsilon^2 . \tag{12}$$

ИМПУЛЬСНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

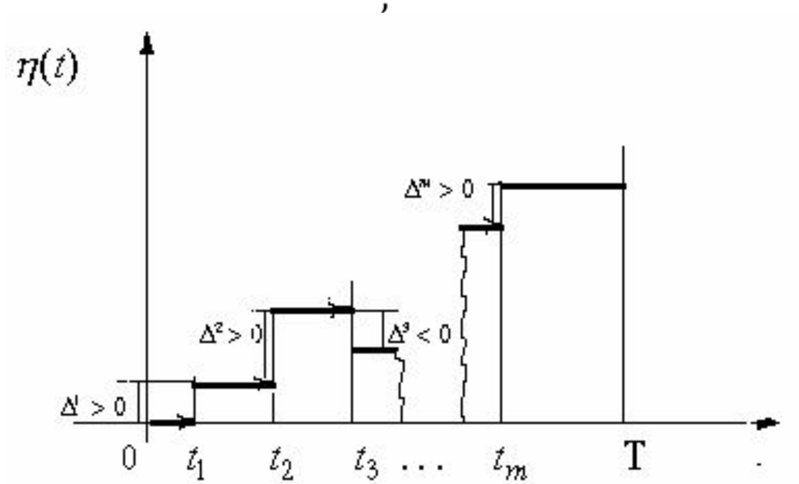
Краевая задача: $(Lx)(t) = x'(t) + p(t)x\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + q(t)x(t) = f(t), t\epsilon[0, nT]$ (13)

$$lx = \psi x(0) + \int_0^{nT} \varphi(s)x'(s)ds = \beta. \quad (14)$$

$$x(t) = x^0(t) + \bar{\eta}(t) \quad (15)$$

$$\bar{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t), t \in [0; nT] \quad (15.1)$$

,



где $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_l < nT$ -фиксированный набор точек, Δ^k, $k = 1, .. l$ – постоянные, $\chi_{[t_k;nT]}(t)$ - характеристическая функция отрезка $[t_k; nT]$:

$$\chi_{[t_k;nT]}(t) = \begin{cases} 1, \text{если } t\epsilon[t_k; nT], \\ 0, \text{если } t\bar{\epsilon}\ [t_k; nT]. \end{cases} \quad (16)$$

Под решением уравнения (13) будем понимать такую функцию x$(t)\epsilon D(t_1, t_2, \dots, t_l)$, которая удовлетворяет ему всюду на отрезке $[0; nT]$, за исключением, быть может, точек $t_1, t_2, \dots, t_l$.

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ АЛЛЕНА РЫНКА ОДНОГО ТОВАРА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ОБЪЕМА ПРЕДЛОЖЕНИЯ

$$T\dot{S}(t) + S\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) = D(t) + \eta(t), t \in [0; nT]$$

Где $S(t) = -\beta + bP(t)$ – функция ПРЕДЛОЖЕНИЯ;
$D(t) = \alpha - aP(t)$ – функция СПРОСА;
$P(t)$ – цена единицы товара в момент времени t;
$T > 0$ – лаг запаздывания цены; n – натуральное число;
$\left[\frac{t}{T}\right]$ – целая часть числа $\frac{t}{T}$;
$\eta(t)$ – неконтролируемое возмущение;

В качестве показателя функционирования модели возьмем w- кратное изменение объема предложения:

$S(nT) = wS(0)$ или в обозначениях цены

$$\dot{P}(t) + \frac{1}{T}P\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + \frac{a}{Tb}P(t) = \frac{\beta+\alpha}{Tb} + \eta(t), t \in [0; nT], \qquad (1)$$

Краевое условие в общем видя выглядит следующем образом:

$$lP \equiv \psi P(0) + \int_0^{nT} \varphi(s)\dot{P}(s)\,ds = \beta, \qquad (2)$$

В качестве показателя функционирования модели возьмем w- кратное изменение объема предложения:

$$P(nT) = \frac{w(-\beta+bS(0))}{b} + \frac{\beta}{b} \qquad (3)$$

Исследуем краевую задачу (1),(3).

Введем следующие обозначения:

$$p = \frac{1}{T}, q = \frac{a}{Tb}, f(t) = \frac{\beta+\alpha}{Tb} + \eta(t), x(t) = P(t).$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\dot{x}(t) + px\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + qx(t) = f(t), t\epsilon[0; nT], \qquad (4)$$

Краевое условие (3) может быть записано в виде (2), если положить $\psi = 1 - w, \varphi = 1, \beta = 0$.

В данной модели введем импульсное управление

$$x(t) = x^0(t) + \bar{\eta}(t), \quad t\epsilon[0; nT], \qquad (5)$$

где $x^0(t)$- дифференцируемая функция, а функция $\bar{\eta}(t)$ имеет вид

$$\bar{\eta}(t) = \sum_{k=1}^{l} \Delta^k \chi_{[t_k;T]}(t).$$

Здесь Δ^k, $k = 1, .. l$ – постоянные, $\chi_{[t_k;T]}(t)$- так называемая характеристическая функция отрезка $[t_k; T]$:

$$\chi_{[t_k;T]}(t) = \begin{cases} 1, \text{если } t\epsilon[t_k; T], \\ 0, \text{если } t\bar{\epsilon}\,[t_k; T]. \end{cases}$$

Функция $\bar{\eta}(t)$является ступенчатой.

Учитывая импульсное управление модель примет вид:

$$\dot{x}^0(t) + px^0\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + qx^0(t) = f(t) - p\bar{\eta}\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) - q\bar{\eta}(t), \qquad t\epsilon[0;nT],$$

Введем новые обозначения:

$$y = x^0(t), g(t) = f(t) - p\bar{\eta}\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) - q\bar{\eta}(t). \qquad (6)$$

Тогда модель примет следующий вид:

$$\dot{y}(t) + py\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + qy(t) = g(t), t\epsilon[0;nT], \qquad (7)$$

Пусть $n = 3$, $T = 1$. Тогда будем рассматривать следующую краевую задачу:

$$\dot{y}(t) + py\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) + qy(t) = g(t), t\epsilon[0;3],$$

$$y(3) = \frac{w(-\beta + by(0))}{b} + \frac{\beta}{b}$$

По числу ψ и функции φ подберем такую функцию $u(t)$, что $u(0) \neq 0, lu = 1$:

$$u(t) = \frac{tw + nT}{nT} \text{ или } \frac{tw}{3} + 1 .$$

Тогда система уравнений

$$\dot{y}(t) + B(t)y(0) = z(t), y(3) = \frac{w(-\beta + by(0))}{b} + \frac{\beta}{b},$$

где $B(t) = -\frac{\dot{u(t)}}{u(0)} = -\frac{\omega}{3}$, однозначно разрешима и ее решение имеет представление:

$$y(t) = \int_0^{nT} W(t,s)z(s)ds,$$

где $W(t,s) = \begin{cases} -\frac{t\omega}{3}, 0 \leq s \leq t \leq 3, \\ -\frac{t\omega}{3} - 1, 0 \leq t < s \leq 3 \end{cases}$

Воспользуемся «W – подстановкой» применительно к уравнению (7):

$$\dot{y}(t) + B(t)y(0) = -py\left(\left[\frac{t}{T}\right]T\right) - qy(t) + g(t).$$

Получаем интегральное уравнение:

$z(t) =$

$-q\int_0^{nT} W(t,s)z(s)ds - \quad p\int_0^{nT} W\left(\left[\frac{t}{T}\right]T, s\right)z(s)ds \ + \int_0^{nT} W(0,s)z(s)ds + g(t),$

(8)

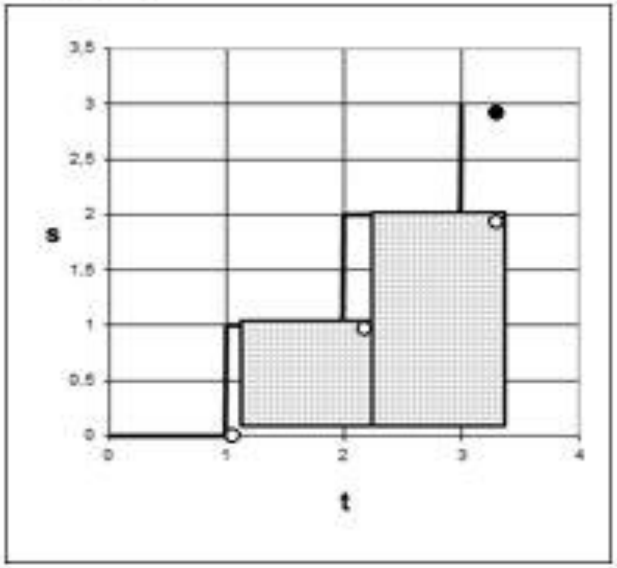
где $W([t],s) = \begin{cases} -\frac{[t]\omega}{3}, 0 \le s \le t \le 3, \\ -\frac{[t]\omega}{3} - 1, 0 \le t < s \le 3 \end{cases},$

$W(0,s) = \begin{cases} 0, 0 \le s \le t \le 3, \\ -1, 0 \le t < s \le 3 \end{cases}$

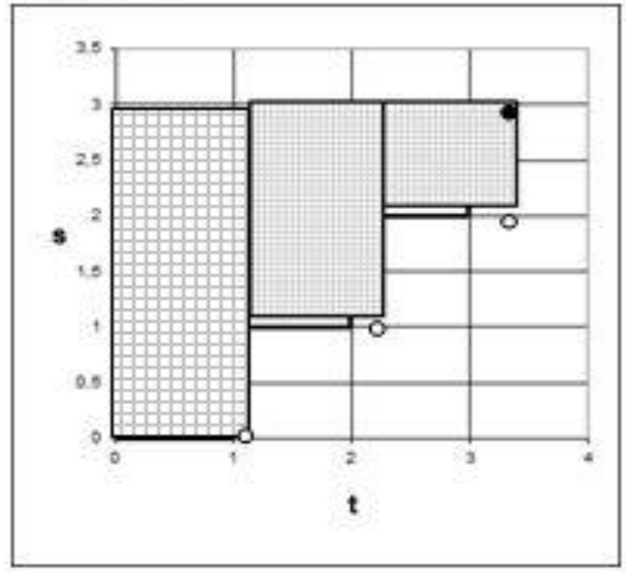
Тогда из (8) получаем:

$$z(t) = -p\int_0^3 \left(\frac{[t]\omega}{3}\right)\chi_1(t,s)z(s)ds + p\int_0^3 \left(\frac{[t]\omega}{3} + 1\right)\chi_2(t,s)z(s)ds$$
$$+ q\int_0^3 \left(\frac{t\omega}{3}\right)\chi_3(t,s)z(s)ds + q\int_0^3 \left(\frac{[t]\omega}{3} + 1\right)\chi_4(t,s)z(s)ds$$
$$+ \frac{\omega}{3}\int_0^3 z(s)ds + +f(t)$$

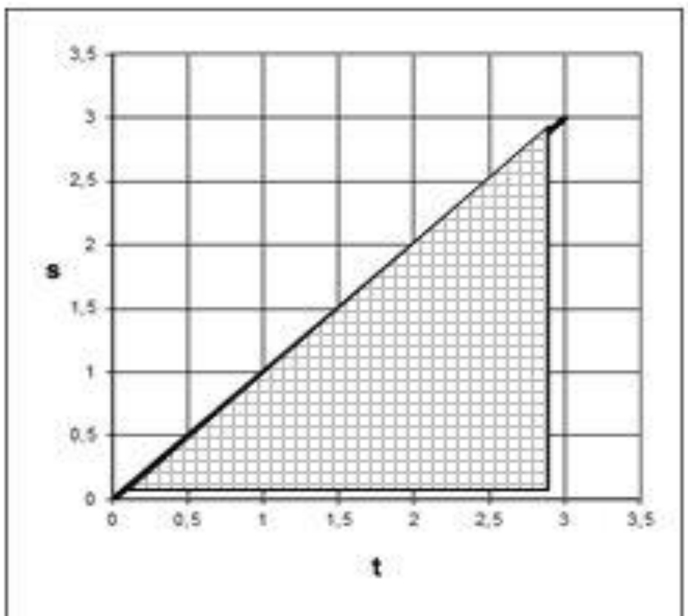
$\chi_1(t,s)$:



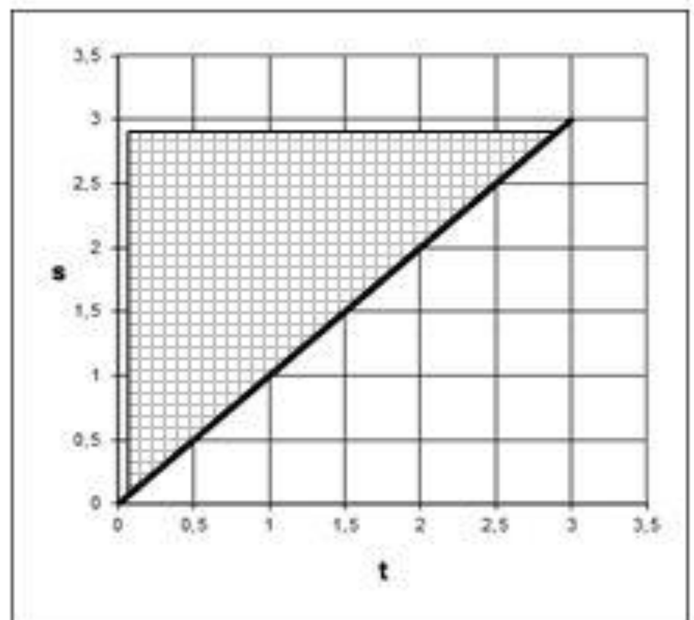
$\chi_2(t,s)$:



$\chi_3(t,s)$



$\chi_4(t,s)$



Представим каждую из функций χ_i, $i=\overline{1,4}$ в виде суммы произведений двух функций, одна из которых зависит только от t, а другая – только от s.

$$\chi_1(t,s)=\mu_0(t)\nu_0(s)+\mu_1(t)\nu_1(s)+\mu_2(t)\nu_2(s).$$

Т.к. на промежутке $t\in[0;1)$ - $[t]=0 \Rightarrow \mu_0(t)=0$.

$$\mu_1(t)=\begin{cases}1, t\in[1;2)\\ 0, t\notin[1;2)\end{cases} \qquad \nu_1(s)=\begin{cases}1, s\in[0;1]\\ 0, s\notin[0;1]\end{cases}$$

$$\mu_1(t)=\eta(t-1)-\eta(t-2) \qquad \nu_1(s)=\eta(s)-\eta(s-1)$$

$$\mu_2(t)=\begin{cases}1, t\in[2;3)\\ 0, t\notin[2;3)\end{cases} \qquad \nu_2(s)=\begin{cases}1, s\in[0;2]\\ 0, s\notin[0;2]\end{cases}$$

$$\mu_2(t)=\eta(t-2)-\eta(t-3) \qquad \nu_2(s)=\eta(s)-\eta(s-2)$$

$$\chi_2(t,s)=\mu_3(t)\nu_3(s)+\mu_4(t)\nu_4(s)+\mu_5(t)\nu_5(s).$$

$$\mu_3(t)=\begin{cases}1, t\in[0;1)\\0, t\notin[0;1)\end{cases}\qquad\qquad \nu_3(s)=\begin{cases}1, s\in[0;3]\\0, s\notin[0;3]\end{cases}$$

$$\mu_3(t)=\eta(t)-\eta(t-1)\qquad\qquad \nu_3(s)=\eta(s)-\eta(s-3)$$

$$\mu_4(t)=\begin{cases}1, t\in[1;2)\\0, t\notin[1;2)\end{cases}\qquad\qquad \nu_4(s)=\begin{cases}1, s\in[1;3]\\0, s\notin[1;3]\end{cases}$$

$$\mu_4(t)=\eta(t-1)-\eta(t-2)=\mu_1(t)\qquad\qquad \nu_4(s)=\eta(s-1)-\eta(s-3)$$

$$\mu_5(t)=\begin{cases}1, t\in[2;3)\\0, t\notin[2;3)\end{cases}\qquad\qquad \nu_5(s)=\begin{cases}1, s\in[2;3]\\0, s\notin[2;3]\end{cases}$$

$$\mu_5(t)=\eta(t-2)-\eta(t-3)=\mu_2(t)\qquad\qquad \nu_5(s)=\eta(s-2)-\eta(s-3)$$

Функции χ_3, χ_4 будем делить на прямоугольники со стороной 0,015. В связи с этим, полученное решение будет приближенным.

$$\tilde{\chi}_3(t,s) = \sum_{m=0}^{199} \mu_{m+6}(t)\nu_{m+6}(s), \quad t \in [0{,}015m; 0{,}015(m+1), \ s \in [0; 0{,}015m], \ m = 0;1;2;...$$

$$\mu_{m+6}(t) = \begin{cases} 1, t \in [0{,}015m; 0{,}015(m+1)) \\ 0, t \notin [0{,}015m; 0{,}015(m+1)) \end{cases} \qquad \nu_{m+6}(s) = \begin{cases} 1, s \in [0; 0{,}015m] \\ 0, s \notin [0; 0{,}015m] \end{cases}$$

$$\tilde{\chi}_4(t,s) = \sum_{m=0}^{199} \mu_{m+206}(t)\nu_{m+206}(s), \ t \in [0{,}015m; 0{,}015(m+1), \ s \in [0{,}015m; 3], \ m = 0;1;2;...$$

$$\mu_{m+206}(t) = \begin{cases} 1, t \in [0{,}015m; 0{,}015(m+1)) \\ 0, t \notin [0{,}015m; 0{,}015(m+1)) \end{cases} \qquad \nu_{m+206}(s) = \begin{cases} 1, s \in [0{,}015m; 3] \\ 0, s \notin [0{,}015m; 3] \end{cases}$$

$$K(t,s) = K_1(t,s) + K_2(t,s)$$

$$K_1(t,s) = -pW\left(\left[\frac{t}{T}\right], s\right) + B(t)W(0,s) =$$

$$\frac{\omega}{3} + (p\frac{\omega}{3}\mu_1(t)\nu_1(s) + p\frac{2\omega}{3}\mu_2(t)\nu_2(s) + p\mu_3(t)\nu_3(s) + p\left(\frac{\omega}{3}+1\right)\mu_4(t)\nu_4(s) +$$

$$p\left(\frac{2\omega}{3}+1\right)\mu_5(t)\nu_5(s) = \underbrace{\frac{\omega}{3}}_{a_0(t)}\underbrace{1}_{b_0(s)} + \underbrace{(\frac{\omega}{3}\mu_1(t))}_{a_1(t)}\underbrace{\nu_1(s)}_{b_1(s)} + \underbrace{\frac{2\omega}{3}\mu_2(t)}_{a_2(t)}\underbrace{\nu_2(s)}_{b_2(s)} +$$

$$\underbrace{(p\mu_3(t)}_{a_3(t)}\underbrace{\nu_3(s)}_{b_3(s)} + \left(\underbrace{p\left(\frac{\omega}{3}+1\right)\mu_4(t)}_{a_4(t)}\underbrace{\nu_4(s)}_{b_4(s)}\right) + \underbrace{(p\left(\frac{2\omega}{3}+1\right)\mu_5(t)}_{a_5(t)}\underbrace{\nu_5(s)}_{b_5(s)}) =$$

$$\sum_{j=0}^{5} a_j(t)b_j(s)$$

$$K_2(t,s) = \sum_{j=0}^{199}\left(\underbrace{q\frac{t\omega}{3}\mu_{j+6}(t)}_{a_{j+6}(t)}\underbrace{\nu_{j+6}(s)}_{b_{j+6}(s)} + \underbrace{q\left(\frac{t\omega}{3}+1\right)\mu_{j+206}(t)}_{a_{j+206}(t)}\underbrace{\nu_{j+206}(s)}_{b_{j+206}(s)}\right)$$

$$= \sum_{j=0}^{199}\left(a_{j+6}(t)b_{j+6}(s) + a_{j+206}(t)\,b_{j+206}(s)\right).$$

$$z(t) = \int_0^3 (K_1(t,s) + K_2(t,s))\, z(s)ds + f(t)$$

$$= \int_0^3 (\sum_{j=0}^{5} a_j(t) b_j(s)$$

$$+ \sum_{j=0}^{199} (a_{j+6}(t) b_{j+6}(s) + a_{j+206}(t) b_{j+206}(s)))\, z(s)ds + f(t)$$

Умножим обе части уравнения на $b_i(t), i = \overline{0{,}405}$ и проинтегрируем почленно от 0 до 3. Получим систему равенств:

$$\int_0^3 b_i(t)\, z(t)dt$$

$$= \sum_0^5 (\int_0^3 b_i(t) a_j(t)dt \int_0^3 b_j(s) z(s)ds)$$

$$+ \sum_{j=0}^{199} (\int_0^3 b_i(t) a_{j+6}(t)dt \int_0^3 b_{j+6}(s) z(s)ds$$

$$+ \int_0^3 a_{j+206}(t) b_i(t)dt \ \int_0^3 \int_0^3 b_{j+6}(s) z(s)ds,$$

(12)

Обозначим

$$\int_0^3 b_i(t)\,z(t)dt = y_i;\ \int_0^3 b_i(t)\,a_j(t)dt = \alpha_{ij};\ \int_0^3 b_i(t)\,g(t)dt = c_i$$

Введем новые обозначения в систему (12):

$$y_i = \sum_{j=0}^{405} \alpha_{ij}\, y_i + c_i\ , i = \overline{0{,}405}$$

Если матрица

$$A = \{\gamma_{ij}\},\ \ \gamma_{ij} = e_{ij} - \alpha_{ij},\ \text{где}\ e_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases},\ \ i, j = \overline{1,m} \qquad (13)$$

имеет обратную матрицу $A^{-1} = \{\theta_{ij}\}$, то уравнение (9) имеет единственное решение $\tilde{z}(t)$:

Литература

1) ***Соколов В.А., Губайдуллина Р.В***. Об одной задаче импульсного управления в экономической динамике НАУКА И БИЗНЕС: ПУТИ РАЗВИТИЯ № 8(26) 2013 (ВАК)

2) ***Соколов В.А., Стрикун Н.А***. Об одной краевой задаче для модели Вальраса-Эванса-Самуэльсона рынка одного товара ПЕРСПЕКТИВЫ НАУКИ № 8(47) 2013 (РИНЦ)

3) ***Симонов П.М.*** Об одном методе исследования динамических моделей микроэкономики ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. ЭКОНОМИКА. № 1(20) 2014 (ВАК)

4) ***Азбелев Н.В.***, ***Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф***. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. М.:Наука, 1991

5) ***Максимов В.П., Румянцев А.Н.*** Краевые задачи и задачи импульсного управления в экономической динамике. Конструктивное исследование ИЗВЕСТИЯ ВУЗОВ. МАТЕМАТИКА № 5 1993

6) ***Аллен Р.*** Математическая экономия. М.:ИЛ, 1963

7) ***Гранберг А.Г.*** Динамические модели народного хозяйства: Учеб. Пособие для студентов вузов, обучающихся по спец. «Экономическая кибернетика». – М.:Экономика, 1985

8) ***Максимов В.П., Симонов П.М.*** Теория оптимального управления: Ч.2. Элементы теории линейных операторов и операторных уравнений: учеб. пособие; Перм. гос. ун-т.-Пермь, 2010

Спасибо за внимание