



# Микроэкономика-2

**Филатов Александр Юрьевич**

(Главный научный сотрудник ШЭМ ДВФУ)

<http://math.isu.ru/filatov>, <http://vk.com/baikalreadings>,  
[alexander.filatov@gmail.com](mailto:alexander.filatov@gmail.com)

## Лекции 3.1-3.2

### Экономика обмена.



**Шерзод Ташпулатов (CERGE-EI)**

**18-30 декабря, ДВФУ**

## **Курс по математической экономике**

Курс направлен на знакомство с основными математическими инструментами, концепциями и методами, используемыми в современном экономическом анализе. В рамках курса планируется обсудить различные приложения, которые можно встретить в экономических исследованиях. Некоторые из них будут рассмотрены в MatLab. 2 лекции будут посвящены написанию статей в ведущие международные журналы.

**Лектор:** Шерзод Ташпулатов, профессор экономики энергетики, микроэкономики, статистических методов в экономике, эконометрики, математики для экономистов в ведущих европейских бакалавриатах, магистратурах, Ph.D-программах, автор статей в «Energy Policy», «Energy Economics», «Utilities Policy».

Курс важен для

- **Экономистов**, получающих инструментарий современной экономики.
- **Математиков**, знакомящихся с экономическими приложениями методов.

Запись на курс: [ukhalova.ts@dvfu.ru](mailto:ukhalova.ts@dvfu.ru) – ФИО, группа, e-mail, телефон.



# Экономика обмена

# 2

$l = 1, \dots, L$  – товары,  $i = 1, \dots, n$  – люди,

$w_1, \dots, w_n$  – начальные запасы,  $\forall i \ w_i \in R_i^L$ ,  $w_i = (w_{i1}, \dots, w_{in})$ ,

$x_1, \dots, x_n$  – потребление,  $\forall i \ x_i \in R_i^L$ ,  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ .

**Матрицы начальных запасов и потребления:**

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1L} \\ \dots & \dots & \dots \\ w_{n1} & \dots & w_{nL} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1L} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nL} \end{pmatrix},$$

**Условие баланса:**  $\forall l \ x_{1l} + \dots + x_{nl} = w_{1l} + \dots + w_{nl}$ .

(сколько принесли – столько и потребили!)

**Какое потребление всех из допустимых будем ожидать в равновесии?**

**Требование 1. «Индивидуальная рациональность»**

$\forall i \ x_i \geq_i w_i$  (иначе он откажется участвовать в обмене).

**Требование 2. «Парето-эффективность»**

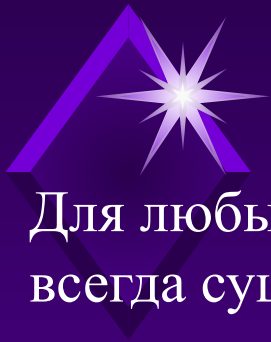
Не существует  $Y$  со свойством  $\forall i \ y_i \geq_i x_i$ ,  $\exists i \ y_i >_i x_i$ .

**Требование 3. «Коалиционная устойчивость»**

Не существует коалиции  $S$  вместе с набором корзин  $\{y_i\}_{i \in S}$

1)  $\forall i \in S \ y_i >_i x_i$

2)  $\sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} w_i$



# Экономика обмена

Для любых непрерывных, монотонных, строго выпуклых предпочтений всегда существует набор  $X$ , удовлетворяющий требованиям 1–3.

## В каком соотношении происходит обмен?

Для каждой пары участников обмена  $i, j$  есть допустимый диапазон, возможно пустой.



Объем колбасы за 1 кусок сыра

При долгосрочном взаимодействии людей формируется единое для всех участников обмена соотношение  $q_{l_1 l_2}$ ! Иначе будет арбитраж!

## Матрица коэффициентов обмена:

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1L} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{L1} & \dots & q_{LL} \end{pmatrix}$$

1.  $q_{l_1 l_1} = 1$ .

2.  $q_{l_1 l_2} q_{l_2 l_1} = 1$ .

3.  $q_{l_1 l_2} q_{l_2 l_3} q_{l_3 l_1} = 1$ .

Выписанные условия не оставляют возможностей для арбитража

**Теорема.** При выполнении условий 1–3 и тривиальном дополнительном  $q_{l_1 l_2} > 0$  существует положительный вектор «цен»  $(p_1, \dots, p_L)$ , такой что  $\forall l_1, l_2 \quad q_{l_1 l_2} = \frac{p_{l_1}}{p_{l_2}}$ .



# Равновесие Вальраса

# 4

## Идея централизации рыночного процесса:

1. Эксперт устанавливает цены  $p_1, \dots, p_L$ .
2. По установленным ценам у всех забирают продукты  $W = w_1 + \dots + w_n$ .  
Взамен каждому выдают сумму  $M_i = p_1 w_{i1} + p_L w_{iL}$ .
3. Каждый участник рынка выбирает наилучший набор  $x_{i1}, \dots, x_{iL}$  из множества доступных:  $p_1 x_{i1} + p_L x_{iL} = M_i$ .

**Равновесие Вальраса = конкурентное равновесие в модели обмена**  
– набор цен  $(p_1^*, \dots, p_L^*)$ , при которых рынок очищается:  $x_1 + \dots + x_n = W$ .

## **Теорема (Вальрас, 1874; Никайдо, Гейл, Эрроу, Дебре, 1951):**

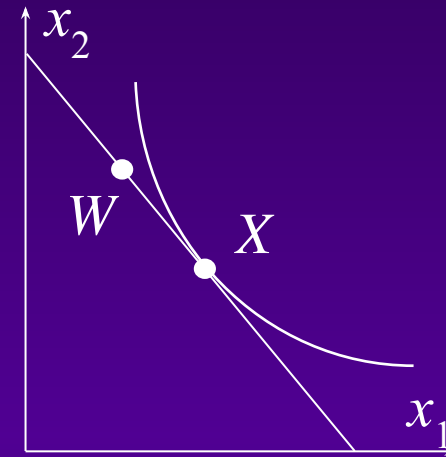
При любых непрерывных, монотонных, строго выпуклых предпочтениях и отсутствии «товаров-фантомов» ( $w_l > 0$ ) равновесие Вальраса существует и удовлетворяет условиям 1–3.

## **Проблемы равновесия Вальраса:**

1. В общем случае нет сходимости, устойчивости и единственности!
2. Огромный объем информации, пока недоступный для обработки.
3. Изменение предпочтений.
4. Искажение информации в стратегических целях (стимулы!)

# Бюджетное ограничение при наличии начального запаса

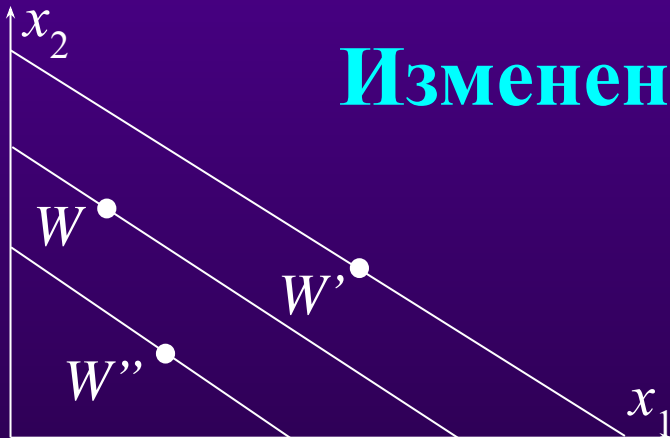
- $(w_1, w_2)$  – начальный запас потребителя до выхода на рынок,  
 $(x_1, x_2)$  – потребление (валовый спрос),  
 $(x_1 - w_1, x_2 - w_2)$  – чистый спрос (может быть и отрицательным).



**Бюджет = стоимость начального запаса при рыночных ценах:**

$$M = p_1 w_1 + p_2 w_2 = p_1 x_1 + p_2 x_2, \quad p_1(x_1 - w_1) + p_2(x_2 - w_2) = 0.$$

## Изменение начального запаса

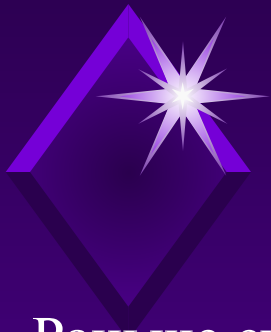


**Рост дохода и полезности:**

$$p_1 w_1 + p_2 w_2 = M < M' = p_1 w_1' + p_2 w_2'.$$

**Падение дохода и полезности:**

$$p_1 w_1 + p_2 w_2 = M > M'' = p_1 w_1'' + p_2 w_2''.$$



# Изменение цены при наличии начального запаса

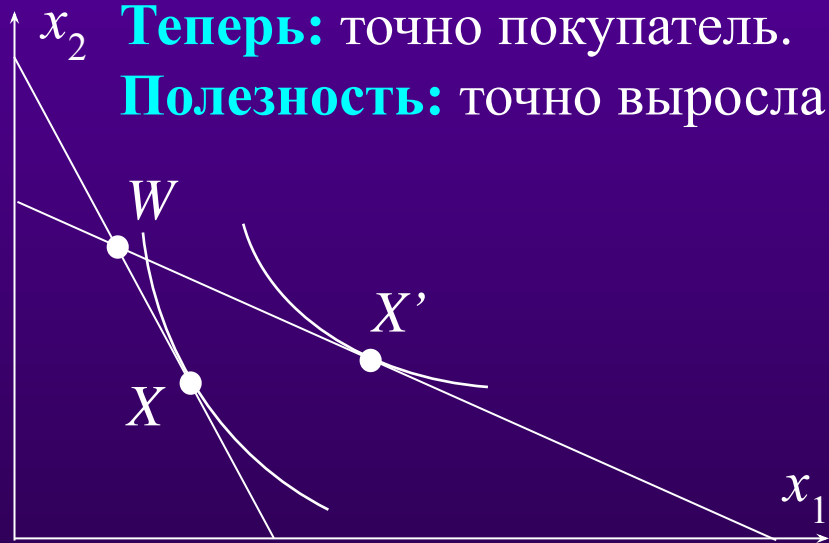
Раньше считалось, что при изменении цен доход постоянен, теперь он связан со стоимостью начального запаса. Разворот бюджетной линии происходит в точке  $W$  начального запаса.

## Падение цены товара $x_1$ : сохранение роли

**Раньше:** покупатель.

**Теперь:** точно покупатель.

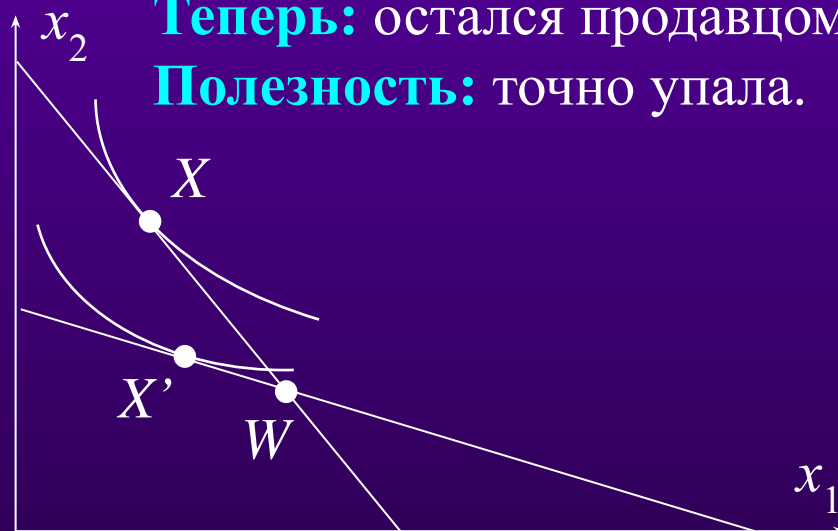
**Полезность:** точно выросла.



**Раньше:** продавец.

**Теперь:** остался продавцом.

**Полезность:** точно упала.



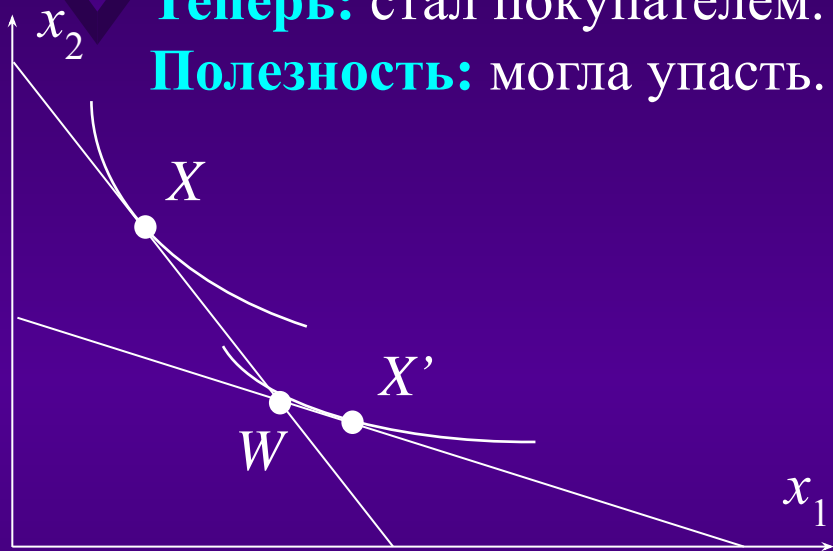
# Падение цены товара $x_1$ : смена роли

7

**Раньше:** продавец.

**Теперь:** стал покупателем.

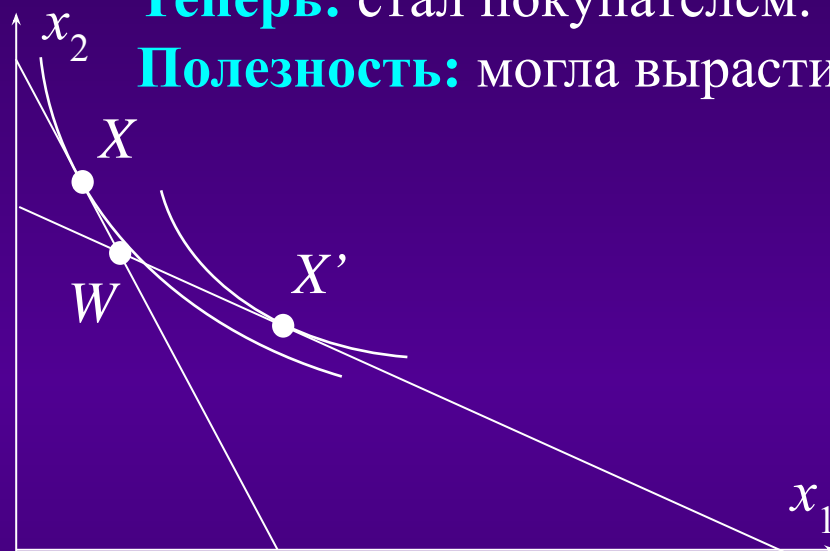
**Полезность:** могла упасть.



**Раньше:** продавец.

**Теперь:** стал покупателем.

**Полезность:** могла вырасти.



## Рост цены товара $x_1$ : возможные случаи

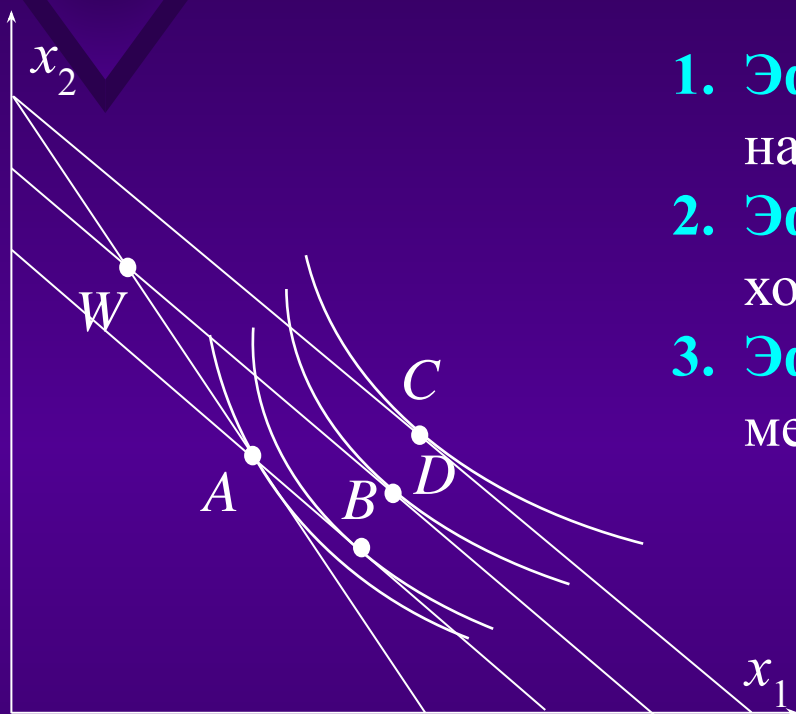
**Продавец** – всегда остается продавцом с ростом полезности.

**Покупатель остающийся покупателем** – всегда снижает полезность.

**Покупатель становящийся продавцом** – может проиграть в полезности или выиграть.



# Уравнение Слуцкого в модели с начальным запасом



1. **Эффект замещения** – связан с переходом на относительно подешевевшие товары.
2. **Эффект дохода** – связан с изменением дохода из-за снижения цены.
3. **Эффект начального запаса** – связан с изменением стоимости начального запаса.

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^S + \Delta x_1^M + \Delta x_1^W$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^S}{\Delta p_1} + \frac{\Delta x_1^M}{\Delta p_1} + \frac{\Delta x_1^W}{\Delta p_1}$$

$$\Delta M_p = -\Delta p_1 x_1, \quad \Delta M_w = \Delta p_1 w_1, \quad \Delta p_1 = -\frac{\Delta M_p}{x_1} = \frac{\Delta M_w}{w_1}, \quad \frac{\Delta x_1^M}{\Delta M_p} = \frac{\Delta x_1^W}{\Delta M_w}$$

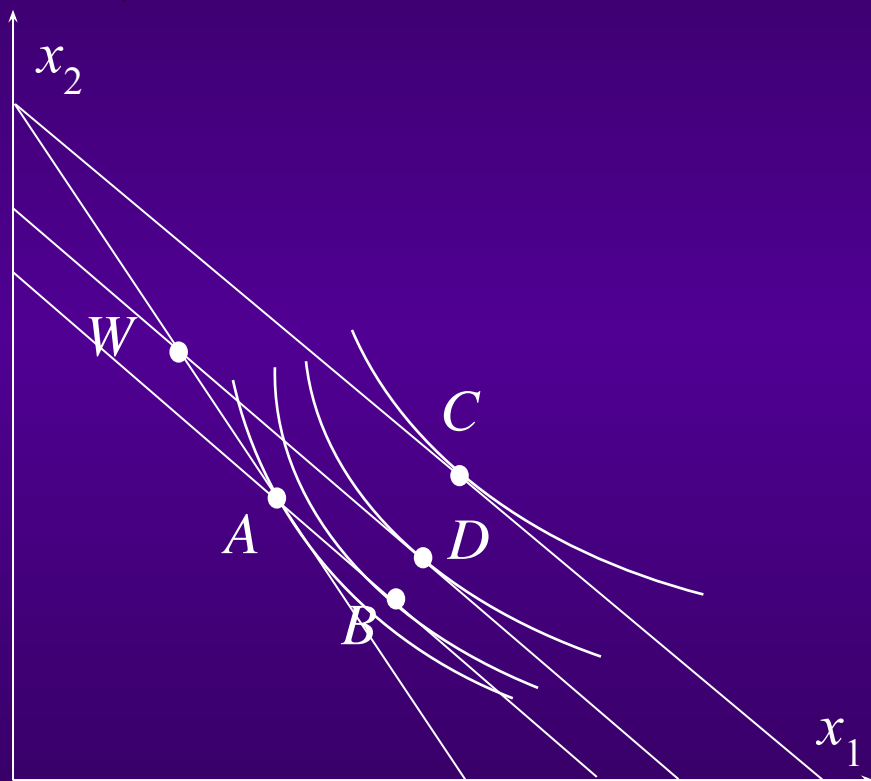
$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^S}{\Delta p_1} - \frac{\Delta x_1^M}{\Delta M_p} x_1 + \frac{\Delta x_1^W}{\Delta M_w} w_1,$$

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta p_1} = \frac{\Delta x_1^S}{\Delta p_1} - \frac{\Delta x_1^M}{\Delta M_p} (x_1 - w_1)$$

# Численный пример (почти Рикардо)

9

$x_1$  – вино,  $p_1 = 3 \rightarrow 2$ ,  $w_1 = 12$ .  
 $x_2$  – сукно,  $p_2 = 1$ ,  $w_2 = 84$ .



$A(20; 60) \rightarrow B(25; 55) \rightarrow$   
 $\rightarrow C(30; 60) \rightarrow D(27; 54)$

**Исходная ситуация (A):**

$$M = 3 \cdot 12 + 1 \cdot 84 = 120 \begin{cases} 60, & x_1 = 20 \\ 60, & x_2 = 60 \end{cases}$$

**Точка Слуцкого (B):**

$$M = 2 \cdot 20 + 1 \cdot 60 = 100 \begin{cases} 50, & x_1 = 25 \\ 50, & x_2 = 50 \end{cases}$$

Эффект замещения:  $AB = 5$

**Решение с постоянн. доходом (C):**

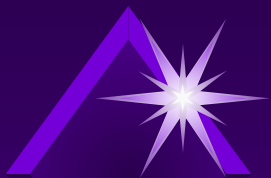
$$M(C) = M(A) = 120 \begin{cases} 60, & x_1 = 30 \\ 60, & x_2 = 60 \end{cases}$$

Эффект дохода:  $BC = 5$

**Итоговое решение (D):**

$$M = 2 \cdot 12 + 1 \cdot 84 = 108 \begin{cases} 54, & x_1 = 27 \\ 54, & x_2 = 54 \end{cases}$$

Эффект начального запаса:  $CD = -3$



# Предложение труда

# 10

$M$  – нетрудовой доход (процент, рента, трансферты,...),  
 $p$  – цена потребления,  $C$  – потребление,  $\bar{C} = M/p$  – начальный запас.  
 $w$  – ставка зарплаты,  $L$  – количество труда,  
 $\bar{L}$  – максимальное количество труда,  $R = (\bar{L} - L)$  – досуг,  $\bar{R} = \bar{L}$ .  
 $pC = M + wL$ ,  $pC + w(\bar{L} - L) = M + w\bar{L}$ ,  **$pC + wR = p\bar{C} + w\bar{R}$ .**

**Досуг – нормальный товар** (при росте денежного дохода, например, выиграв в лотерею, люди стараются меньше работать).

**Эффекты, наблюдаемые при росте зарплаты (росте цены досуга):**

1. Эффект замещения – досуг становится относительно более дорогим!  
 $w \uparrow \Rightarrow R \downarrow$
2. Эффект дохода – увеличение цены досуга (уменьшение дохода) приводит к дополнительному сокращению спроса на досуг.  
 $w \uparrow \Rightarrow R \downarrow$
3. Эффект начального запаса (растет стоимость начального запаса).  
 $w \uparrow \Rightarrow R \uparrow$



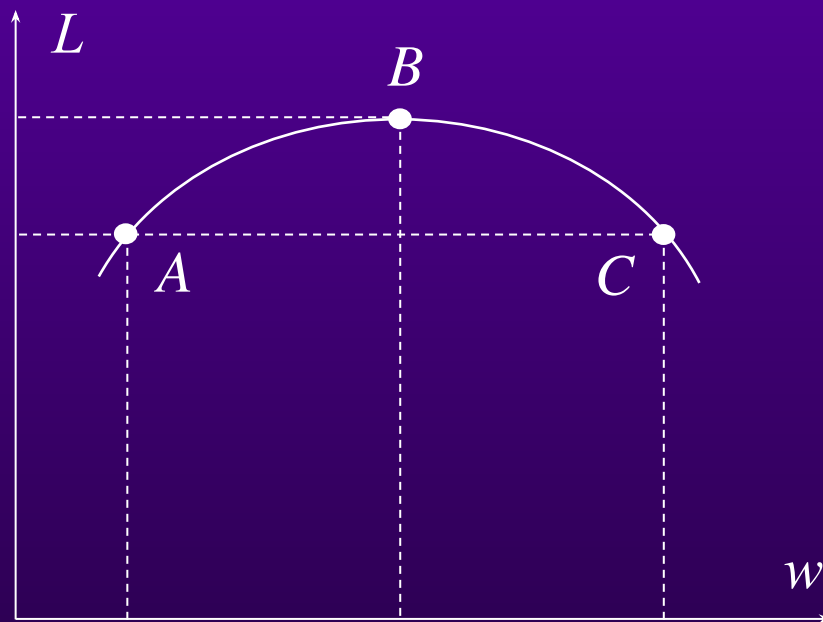
# Уравнение Слуцкого и кривая предложения труда

# 11

Уравнение Слуцкого для рынка труда: 
$$\frac{\Delta R}{\Delta w} = \frac{\Delta R^S}{\Delta w} + (\bar{R} - R) \frac{\Delta R^M}{\Delta M}$$

$<0$                        $>0$                        $>0$

Чем выше предложение труда и ниже время досуга, тем больше второе слагаемое в уравнение Слуцкого и выше вероятность смены поведения на увеличение времени досуга и сокращение предложения труда.



# Межвременной выбор

# 12

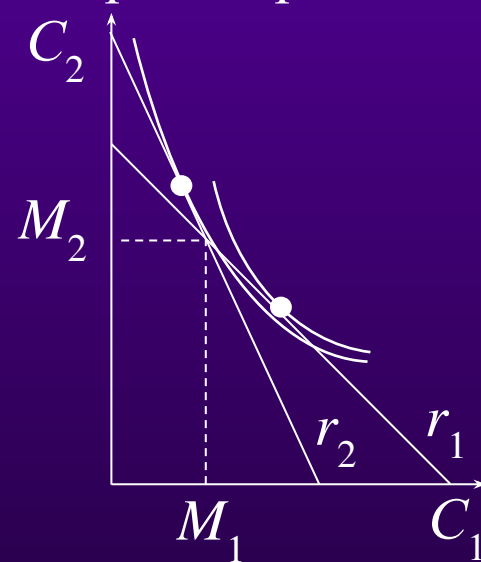
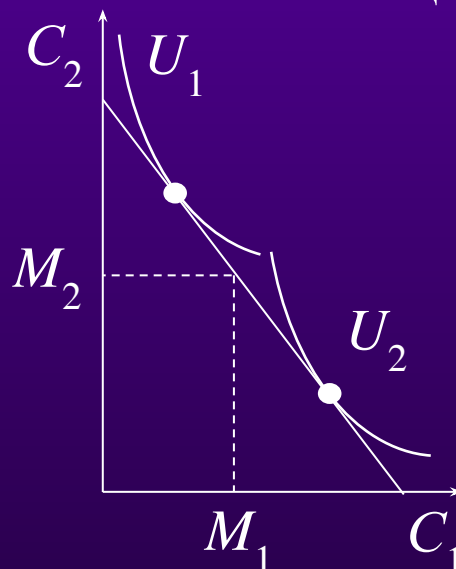
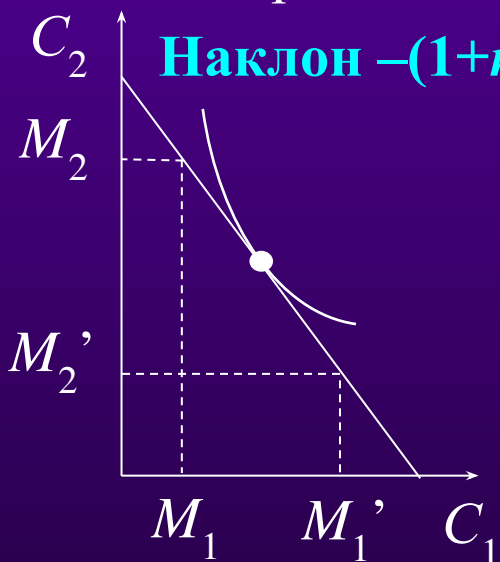
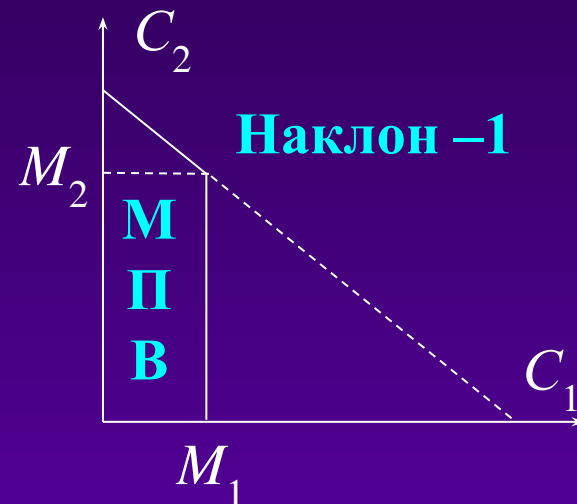
$M_1, M_2$  – доход потребителя в 2 периодах,  
 $C_1, C_2$  – потребление в 2 периодах.

**Вариант 1.** Отсутствие банковской системы:  
невозможность займов, отсутствие процента.

**Вариант 2.** Появление банковской системы:  
возможность брать и давать займы под  $r\%$ .

$$C_2 = M_2 + (1 + r)(M_1 - C_1)$$

В зависимости от доходов в двух периодах, предпочтений и процентной ставки потребитель может быть либо заемщиком, либо кредитором.





## Уравнение Слуцкого в модели межвременного выбора

$$\frac{\Delta C_1}{\Delta r} = \frac{\Delta C_1^S}{\Delta r} - \frac{\Delta C_1^M}{\Delta M} (C_1 - M_1)$$

$<0$        $>0$       ?

Результат зависит в первую очередь от роли потребителя!

### Падение процентной ставки: сохранение роли

**Раньше:** заемщик.

**Теперь:** точно заемщик.

**Полезность:** точно выросла.



**Раньше:** кредитор.

**Теперь:** остался кредитором.

**Полезность:** точно упала.

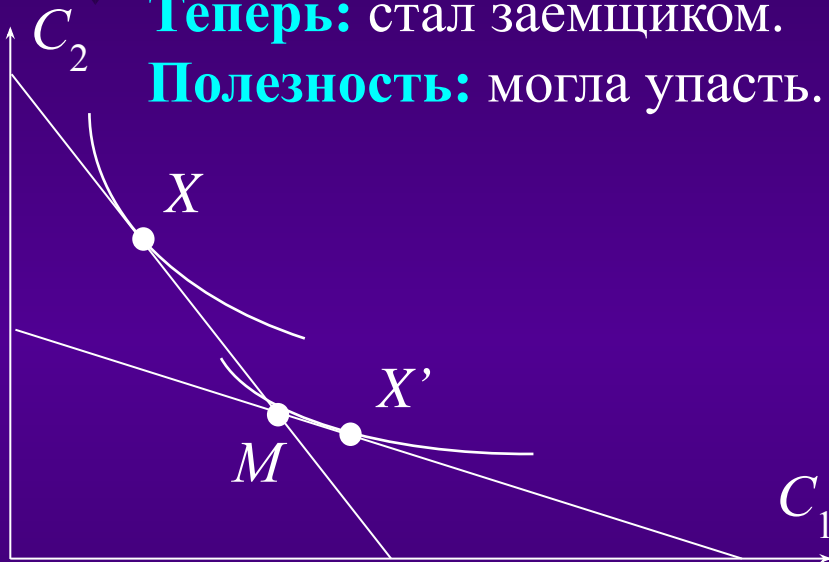




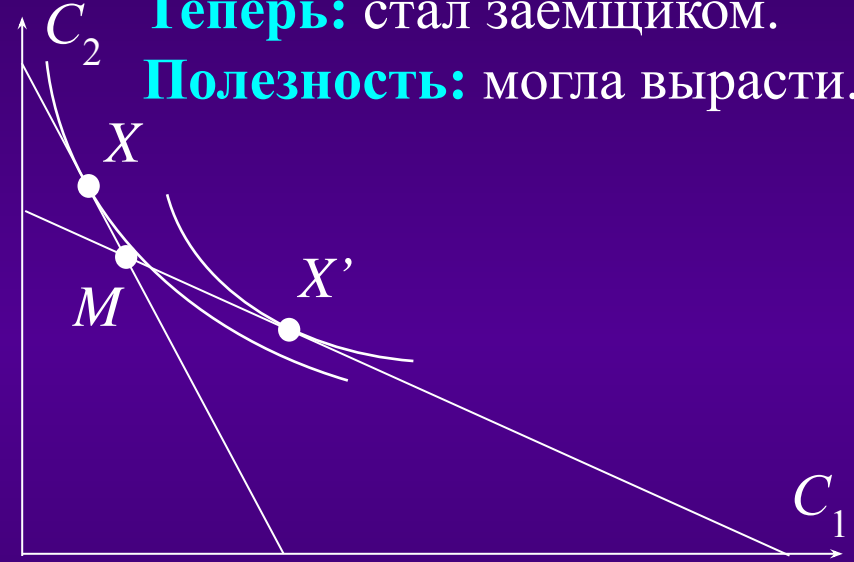
# Падение процентной ставки: смена роли

# 14

**Раньше:** кредитор.  
**Теперь:** стал заемщиком.  
**Полезность:** могла упасть.



**Раньше:** кредитор.  
**Теперь:** стал заемщиком.  
**Полезность:** могла вырасти.



## Рост процентной ставки: возможные случаи

**Кредитор** – всегда остается кредитором с ростом полезности.

**Заемщик остающийся заемщиком** – всегда снижает полезность.

**Заемщик становящийся кредитором** – может проиграть в полезности или выиграть.



# Учет инфляции

# 15

**Реальная ставка процента** – процентная ставка с учетом инфляции.

$$1 + \rho = \frac{1 + r}{1 + \pi}, \quad \rho = \frac{1 + r}{1 + \pi} - 1 = \frac{r - \pi}{1 + \pi} \approx r - \pi.$$

## Анализ долгосрочных проектов

$$NPV = \sum_{t=0}^T \frac{a_t}{(1 + d)^t} - \text{чистая текущая стоимость, } IRR = d: NPV = 0.$$

## Облигации и консоли (пожизненная рента)

$$NPV_B = \sum_{t=1}^T \frac{x}{(1 + r)^t} + \frac{F}{(1 + r)^T}, \quad NPV_{PB} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + r)^t} = \frac{x}{r}.$$

ставка	1 год	2 года	5 лет	10 лет	15 лет	20 лет	25 лет	30 лет
5%	0,95	0,91	0,78	0,61	0,48	0,37	0,30	0,23
10%	0,91	0,83	0,62	0,39	0,24	0,15	0,09	0,06
15%	0,87	0,76	0,50	0,25	0,12	0,06	0,03	0,02
20%	0,83	0,69	0,40	0,16	0,06	0,03	0,01	0,00



# Излишек потребителя и излишек производителя



**Излишек потребителя** (consumer surplus) – совокупная экономия потребителей, связанная с тем, что они приобретают продукцию дешевле, чем готовы это сделать.

**Излишек производителя** (producer surplus) – совокупная прибыль производителей, связанная с тем, что они продают продукцию дороже, чем готовы это сделать.

**Обществен. благосостояние** (social welfare)

**Мертвые потери** (deadweight loss)

$$CS = \int_0^{q_M} (p_D(q) - p_M) dq$$

$$PS = \int_0^{q_M} (p_M - p_S(q)) dq \rightarrow \max - \text{критерий производителя.}$$

$$SW = CS + PS = \int_0^{q_M} (p_D(q) - p_S(q)) dq \rightarrow \max - \text{критерий общества.}$$

# Проблема излишка потребителя

# 17



При изменении цены товара и его потребления может измениться сумма денег, выделяемая на другие товары, что влияет на объемы их покупки и полезность. Единственный случай, когда данная проблема отсутствует – **квазилинейная функция полезности**, для которой эффект дохода равен нулю.

## Компенсирующая и эквивалентная вариация



Сколько денег дать, чтобы благосостояние не изменилось?



Сколько денег забрать, чтобы благосостояние не изменилось?



*Спасибо  
за внимание!*

<http://math.isu.ru/filatov>, <http://vk.com/baikalreadings>,  
[alexander.filatov@gmail.com](mailto:alexander.filatov@gmail.com)