

Решение трансцендентных уравнений

*Не знаешь, с чего начать?
Начни сначала.*

Льюис Керрол

*Уравнения, содержащие
логарифмическую,
показательную или тригонометрическую
функции, называются
трансцендентными.*

Решите уравнения:

1. $\log_2(2x-3)\log_x 2 = 1;$ **X=**
3

2. $(\sqrt[3]{3})^x (\sqrt[3]{9})^x = 81;$ **X=**
4

3. $9^x - 3^x - 6 = 0.$ **X=**
1

Решение уравнений с применением монотонности функций

Если функция, стоящая в одной части уравнения, строго убывает, а функция, стоящая в другой части уравнения строго возрастает или константа, то уравнение имеет не более одного корня, который можно найти графически или подбором из ОДЗ

$$2^x = 3 - x$$

*Функция $y = 2^x$ – возрастает, а функция $y = 3 - x$ – убывает.
Значит, существует не более одного корня.*

Подстановкой убеждаемся, что $x=1$ – корень уравнения, и он единственный.

$$\sqrt{x+10} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad x = -1$$

Уравнения с дополнительными условиями

$$1. 4^x - 2^{x+3} + 7 = 0, x \in [1; 4].$$

$$1) 2^x = y > 0, \quad y^2 - 8y + 7 = 0 \begin{cases} y = 1 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \log_2 7 \end{cases}$$

$$2) x = 0 \notin [1; 4], \quad 2 < 7 < 16 \Rightarrow x = \log_2 7 \in [1; 4].$$

$$2. \cos 4x + \cos 2x - \operatorname{ctg} 2x \cdot \sin 2x = 0, x \in [0; \pi]$$

$$1) \begin{cases} \cos 4x + \cos 2x - \cos 2x = 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 0 \\ 2x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + \pi k \\ x \neq \frac{\pi n}{2} \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k \\ x \neq \frac{\pi n}{2} \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 0 \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{8} \leq \frac{k}{4} \leq \frac{7}{8} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{7}{2}; \quad k = 0, 1, 2, 3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}.$$

Решение уравнений с применением оценки

$$f(x) \geq a, g(x) \leq a \Rightarrow f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a \\ g(x) = a. \end{cases}$$

$$\cos^2(x \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}$$

$$0 \leq \cos^2(x \sin x) \leq 1, 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \geq 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 1 \\ \cos^2(x \sin x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_5 \sqrt{x^2 + x + 1} = 0 \\ x \sin x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x \sin x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

Решите уравнения:

1. $2^x = -\frac{1}{2} - x;$

2. $\sqrt[8]{x^3 - 5x + 12} + \log_4^{14}(x^2 - 5x + 7) = 0;$

3. $\frac{2}{\pi} \arccos(-0,5x) = 2 + (x^2 - x - 2)^8;$

4. $\sqrt[6]{\cos^6(x^2 \sin x)} - 1 = \log_6^2(9x^2 + 3x + 1);$

5. $\operatorname{tg} 2x \cdot \sin 4x + \cos 4x - \cos 8x = 0; x \in [0; 2\pi].$

*Спасибо
за работу
на уроке!*