



# Экономико- математические методы в экономическом анализе

Экономико-математические методы.

# Метод линейного программирования

Метод линейного программирования дает возможность обосновать наиболее оптимальное экономическое решение в условиях жестких ограничений, относящихся к используемым в производстве ресурсам (основные фонды, материалы, трудовые ресурсы). Применение этого метода в экономическом анализе позволяет решать задачи, связанные, главным образом, с планированием деятельности организации. Данный метод помогает определить оптимальные величины выпуска продукции, а также направления наиболее эффективного использования имеющихся в распоряжении организации производственных ресурсов.

При помощи этого метода осуществляется решение так называемых экстремальных задач, которое заключается в нахождении крайних значений, то есть максимума и минимума функций переменных величин.

Этот метод базируется на решении системы линейных уравнений в тех случаях, когда анализируемые экономические явления связаны линейной, строго функциональной зависимостью. Метод линейного программирования используется для анализа переменных величин при наличии определенных ограничивающих факторов.



Он является методом целенаправленного перебора опорных решений задачи линейного программирования. Он позволяет за конечное число шагов либо найти оптимальное решение, либо установить, что оптимальное решение отсутствует.

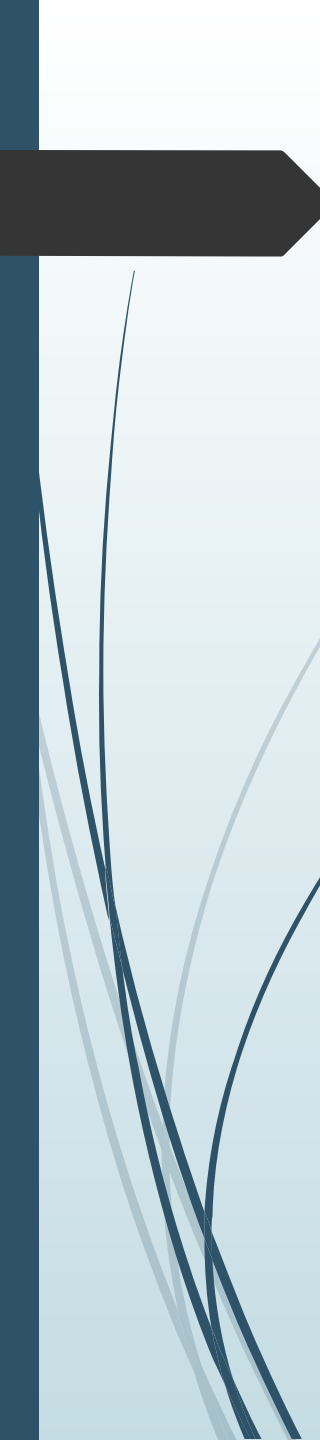
Основное содержание симплексного метода заключается в следующем:

1. Указать способ нахождения оптимального опорного решения
2. Указать способ перехода от одного опорного решения к другому, на котором значение целевой функции будет ближе к оптимальному, т.е. указать способ улучшения опорного решения
3. Задать критерии, которые позволяют своевременно прекратить перебор опорных решений на оптимальном решении или сделать заключение об отсутствии оптимального решения.

# Алгоритм симплексного метода решения задач линейного программирования

Для того, чтобы решить задачу симплексным методом необходимо выполнить следующее:

1. Привести задачу к каноническому виду
2. Найти начальное опорное решение с "единичным базисом" (если опорное решение отсутствует, то задача не имеет решение ввиду несовместимости системы ограничений)
3. Вычислить оценки разложений векторов по базису опорного решения и заполнить таблицу симплексного метода
4. Если выполняется признак единственности оптимального решения, то решение задачи заканчивается
5. Если выполняется условие существования множества оптимальных решений, то путем простого перебора находят все оптимальные решения



Весьма распространено решение так называемой транспортной задачи с помощью метода линейного программирования. Содержание этой задачи заключается в минимизации затрат, осуществляемых в связи с эксплуатацией транспортных средств в условиях имеющихся ограничений в отношении количества транспортных средств, их грузоподъемности, продолжительности времени их работы, при наличии необходимости обслуживания максимального количества заказчиков.

Кроме этого, данный метод находит широкое применение при решении задачи составления расписания. Эта задача состоит в таком распределении времени функционирования персонала данной организации, которое являлось бы наиболее приемлемым как для членов этого персонала, так и для клиентов организации.

Данная задача заключается в максимизации количества обслуживаемых клиентов в условиях ограничений количества имеющихся членов персонала, а также фонда рабочего времени.

Таким образом, метод линейного программирования весьма распространен в анализе размещения и использования различных видов ресурсов, а также в процессе планирования и прогнозирования деятельности организаций, в том числе организации финансовых потоков и планировании финансовой деятельности с учетом специфики организации производства, услуг и продаж..



Все же математическое программирование может применяться и в отношении тех экономических явлений, зависимость между которыми не является линейной. Для этой цели могут быть использованы методы нелинейного, динамического и выпуклого программирования.

Нелинейное программирование опирается на нелинейный характер целевой функции или ограничений, либо и того и другого. Формы целевой функции и неравенств ограничений в этих условиях могут быть различными.

Нелинейное программирование применяется в экономическом анализе в частности, при установлении взаимосвязи между показателями, выражающими эффективность деятельности организации и объемом этой деятельности, структурой затрат на производство, конъюнктурой рынка, и др.

Динамическое программирование базируется на построении дерева решений. Каждый ярус этого дерева служит стадией для определения последствий предыдущего решения и для устранения малоэффективных вариантов этого решения. Таким образом, динамическое программирование имеет многошаговый, многоэтапный характер. Этот вид программирования применяется в экономическом анализе с целью поиска оптимальных вариантов развития организации как в настоящее время, так и в будущем.



Выпуклое программирование представляет собой разновидность нелинейного программирования. Этот вид программирования выражает нелинейный характер зависимости между результатами деятельности организации и осуществляемыми ей затратами. Выпуклое (иначе вогнутое) программирование анализирует выпуклые целевые функции и выпуклые системы ограничений (точки допустимых значений). Выпуклое программирование применяется в анализе хозяйственной деятельности с целью минимизации затрат, а вогнутое — с целью максимизации доходов в условиях имеющихся ограничений действия факторов, влияющих на анализируемые показатели противоположным образом. Следовательно, при рассматриваемых видах программирования выпуклые целевые функции минимизируются, а вогнутые — максимизируются.

# Теория массового обслуживания

Наряду с другими экономико-математическими методами в экономическом анализе торговых организаций в процессе анализа деятельности используется теория массового обслуживания. Она применяется, в частности, в розничной торговле при анализе количества обслуживаемых покупателей и продолжительности их обслуживания (при условии высокого качества их обслуживания). На эти показатели оказывают влияние различные факторы (переменные величины). Они взаимодействуют между собой в условиях процесса обслуживания покупателей, носящего стохастический характер.

На основе теории массового обслуживания выбирается оптимальный вариант организации торгового обслуживания населения, обеспечивающий минимальное время обслуживания при минимизации затрат и высоком качестве обслуживания населения.

Рассматриваемая теория находит применение и в других отраслях экономики. Теория массового обслуживания заключается в том, что на базе теории вероятностей выводятся математические методы анализа процессов массового обслуживания, а также методы оценки качества работы обслуживающих систем.

# Теория игр

Практически все задачи, рассмотренные в предыдущих главах, формулировались для ситуаций индивидуального выбора оптимальных решений, т.е. для случаев, когда решение принимает отдельно взятый субъект, обладающий единственной целью.

Принципиально иная ситуация возникает при изучении процессов принятия решений несколькими субъектами, интересы которых могут не совпадать. При этом возникают задачи со многими целевыми функциями (критериями). Решение этих задач и составляет сущность математической теории игр.

# Теория игр

Задачи теории игр относятся к области принятия решений в условиях неопределенности, а их специфика состоит в том, что, как правило, подразумевается неопределенность, возникающая в результате действий двух или более «разумных» противников, способных оптимизировать свое поведение за счет других. Цель использования данного метода – поиск оптимальной стратегии действий играющего.

Игровыми ситуациями могут быть следующие: действия конкурирующих фирм на одном рынке, организация хозяйственных взаимоотношений между предприятиями различных отраслей; система научных и хозяйственных экспериментов; выбор производственного решения; поиск оптимального поведения предприятия при определенных трудностях в сбыте продукции, сезонных или погодных условиях, создание рациональных производственных запасов, вопросы качества продукции и т.д.

Особенностью теории игр как научной дисциплины стала употребляемая в ней специфическая терминология. Термин «игра» применяется для обозначения совокупности правил и соглашений, которыми руководствуются субъекты, поведение которых мы изучаем. Каждый такой субъект  $X$ , где  $X = 1: K$ , или игрок, характеризуется наличием индивидуальной системы целевых установок и стратегий:  $S_{1x}, S_{2x}, \dots, S_{nxx}$ , т.е. возможных вариантов действий в игре.

Изначально формулируются точные условия игры, основными из которых могут быть:

- ☐ постоянное количество игроков;
- ☐ неизменность правил игры;
- ☐ выявление возможных стратегий игроков; количество стратегий у каждого игрока может быть конечным и бесконечным. При исследовании конечной игры задаются матрицы выигрышей, а бесконечной – функции выигрышей;
- ☐ выявление возможных выигрышей.

# □ ПРИМЕР

- Рассмотрим деятельность небольшой мебельной фирмы «КОНТРАКТ», выпускающей три вида продукции – табуретки кухонные, уголки кухонные и мягкие уголки.
- На рынке присутствует крупный конкурент.
- Предприятие реализует свою продукцию через магазин «Мебель», который оставляет за собой право выбора товара, принимаемого к реализации у «Контракта» или у его основного конкурента.
- Затраты на производство «Контракта» составили: табуретки кухонные – 8 у.е. (за у.е. принимается курс устойчивой валюты – американского доллара); уголки кухонные – 60 у.е.; мягкие уголки – 370 у.е.
- Цена реализации соответственно – 12,5 у.е., 89 у.е., 430 у.е.
- При самой благоприятной ситуации на рынке «Контракт» сможет реализовать 500 табуреток, 20 уголков кухонных и 10 мягких уголков.
- При негативной ситуации -табуретки – 300; уголки кухонные –25 (из-за лучшего качества); мягкие уголки – 4 шт.

- Задача заключается в максимизации средней величины дохода от реализации с учетом изменения конъюнктуры рынка.

фирма «Контракт» имеет в своем распоряжении два варианта поведения, две стратегии: в расчете на благоприятную конъюнктуру рынка (стратегия 1) и с учетом неблагоприятной (стратегия 2).

- Если предприятие примет **стратегию 1 при благоприятной конъюнктуре рынка** продукция будет полностью реализована, то в этой ситуации доход «Контракта» составит

- $500 \cdot (12,5 - 8) + 20 \cdot (89 - 60) + 10 \cdot (430 - 370) = 3430 \text{ у.е.}$

- **При неблагоприятной конъюнктуре рынка** уголки кухонные будут проданы полностью, табуретки и мягкая мебель только в количествах 300 и 4 шт. соответственно.

- $300 \cdot (12,5 - 8) + 20 \cdot (89 - 60) + 4 \cdot (430 - 370) = 2\,170 \text{ у.е.}$

- Аналогично определим доход предприятия в случае применения им **стратегии 2.**

- **При благоприятной структуре рынка**  $300 \cdot (12,5 - 8) + 20 \cdot (89 - 60) + 4 \cdot (430 - 370) = 2\,170 \text{ у.е.}$

- **При неблагоприятной**  $300 \cdot (12,5 - 8) + 25 \cdot (89 - 60) + 4 \cdot (430 - 370) = 2315 \text{ у.е.}$

| игроки                | Конъюнктура рынка |               |                 |                |
|-----------------------|-------------------|---------------|-----------------|----------------|
|                       | стратегии         | Благоприятная | Неблагоприятная | Min по строкам |
| Стратегия предприятия | Стратегия 1       | 3430          | 2170            | 2170           |
|                       | Стратегия 2       | 2170          | 2315            | 2170           |
|                       | Max по столбцам   | 3430          | 2315            | x              |

□ Обозначим частоту применения игроком П1 стратегии 1 через  $x$ , тогда частота применения им стратегии 2 будет равна  $(1 - x)$ .

□ *Благ. кон. рынка* = *неблаг. конъюк. рынка*

$$3430x + 2170(1 - x) = 2170x + 2315(1 - x).$$

$$3430x + 2170 - 2170x - 2170x + 2315x - 2315 = 0.$$

$$1405x = 145, x = 0,103 \text{ или } 1/10; 1 - x = 0,897, \text{ или } 9/10.$$

$$\text{Благоприятная стратегия рынка: } 3430 * 0,103 + 2170 * 0,897 = 2299,78$$

$$\text{Неблагоприятная стратегия: } 2170 * 0,103 + 2315 * 0,897 = 2300,065$$

**Если игрок применяет смешанную стратегию, то его средний доход одинаков при любой рыночной конъюнктуре.**

**Определим объем производства необходимый для максимизации дохода при любой стратегии:**

$$(500 + 20 + 10) * 1/10 + (300 + 25 + 4) * 9/10 = (500 + 20 + 10 + 2700 + 225 + 36) / 10 = 320 + 25 + 5$$

**Определим максимальный доход:**

$$320(12,5 - 8) + 25(89 - 60) + 5(430 - 370) = 1440 + 725 + 300 = \mathbf{2465}$$

# Моделирование

В процессе проведения анализа при принятии финансовых решений используются в основном математические модели, которые могут описывать изучаемые явления с помощью систем неравенств, уравнений, функций. **Ранее рассматривались уравнения детерминированной факторной зависимости. Рассмотрим более сложные варианты обусловленные наличием сразу нескольких условий.**

Математическое моделирование в исследовании операций является, с одной стороны, очень важным и сложным, с другой – практически не поддающимся научной формализации процессом. Отметим, что неоднократно предпринимавшиеся попытки выделить общие принципы создания математической модели привели к декларированию рекомендаций самого общего характера, трудно применимых для решения конкретных экономических задач, либо, наоборот, к появлению рецептов, применимых только к очень узкому кругу задач, например модели факторного анализа жестко детерминированных связей.

Поэтому на конкретном примере рассмотрим процесс математического моделирования.

Экономическая модель есть условный, искусственно сформированный образец какого-либо экономического процесса.

Стандартный процесс моделирования включает следующие основные этапы:

1. Подготовительный. На этом этапе проводится предварительный анализ особенностей изучаемого объекта, формируется целевая функция и определяется критерий оптимальности.
2. Определение метода решения задачи. На этом этапе выбирают наиболее рациональный метод математического решения модели (симплекс-метод, динамическое программирование, метод потенциалов, корреляционно-регрессионный и т.д.).
3. Аналитический. На этом этапе методом, определенным на втором этапе, определяется математическая модель, ее числовые значения.
4. Апробация модели. Экономическая модель только тогда является достоверной, если она прошла процесс внедрения на практике. В результате этого, если полученные результаты не соответствуют реальным производственным условиям, определяются причины несоответствия, вносятся соответствующие корректировки.
5. Анализ полученных результатов. На этом этапе проводится комплексный экономический анализ модели, определяется экономическая эффективность внедрения.

## ПРИМЕР

- Рассмотрим проблему принятия инвестором решения о вложении имеющегося у него капитала. Стоит отметить, что вводятся следующие ограничения:
- 1. Суммарный объем капитала, который должен быть вложен, составляет 100 000 у.е.
- 2. Доля средств, вложенных в один объект (чтобы избежать высоких рисков потерь в случае разорения этого объекта), не может превышать  $1/4$  всего объема.
- 3. Более половины всех средств должны быть вложены в активы долгосрочного характера использования (предположим, на рассматриваемый момент таковыми являются активы со сроком погашения после 2014 г.).
- 4. Доля активов с низкой надежностью (менее 4 баллов) не может превышать трети от суммарного объема.
- Набор характеристик потенциальных объектов для инвестирования, имеющих условные названия от А до F, задается следующей таблицей:

# ПРИМЕР

| Название объекта<br>инвестирования | Доходность,<br>% | Срок выкупа<br>(год) | Надежность,<br>балл |
|------------------------------------|------------------|----------------------|---------------------|
| A                                  | 5,5              | 2015                 | 5                   |
| B                                  | 6,0              | 2017                 | 4                   |
| C                                  | 8,0              | 2019                 | 2                   |
| D                                  | 7,5              | 2022                 | 3                   |
| E                                  | 5,5              | 2014                 | 5                   |
| F                                  | 7,0              | 2016                 | 4                   |

# ПРИМЕР

- Тогда суммарная прибыль от размещения активов, которую получит инвестор, может быть представлена в виде
- $\Pi = 0,055 X_A + 0,06 X_B + 0,08 X_C + 0,075 X_D + 0,055 X_E + 0,07 X_F.$  (1)
- Сформируем систему ограничений:
- 1.  $X_A + X_B + X_C + X_D + X_E + X_F = 100\,000.$  (2)
- 2.  $X_A = 25000; X_B = 25000; X_C = 25000.$  (3)
- $X_D = 25000; X_E = 25000; X_F = 25000.$
- 3.  $X_B + X_C = 50000.$  (4)
- 4.  $X_C + X_D = 30000.$  (5)
- Система ограничений в соответствии с экономическим смыслом задачи должна быть дополнена условиями неотрицательности для искомых переменных:
- 5.  $X_A = 0, X_B = 0, X_C = 0, X_D = 0, X_E = 0, X_F = 0.$  (6)
- Выражения (1)–(6) образуют математическую модель оптимального поведения инвестора.

# Экономико-математические модели инфляции

В современных условиях особую актуальность приобретает принятие финансовых решений на основе правильного ведения учета, анализа и отчетности в условиях инфляции. Это связано, прежде всего, с тем, что процесс обесценения рубля не раз застигал врасплох многие российские предприятия и финансовые решения претерпевали полный крах.

Из-за снижения покупательной способности рубля и повышения общего уровня цен инвестор может потерять часть дохода (особенно это касается дебиторской задолженности), а заемщик соответственно может выиграть за счет погашения задолженности деньгами сниженной покупательной способности (кредиторская задолженность).

В финансовом менеджменте обычно рассчитывают показатели номинальные (в текущих ценах) и реальные (рассчитанные с учетом инфляции в сопоставимых ценах базисного периода).

# Пример

Предположим, что предприятие производит различные виды товаров, совокупный объем произведенной продукции представим в виде  $n$ -мерного вектора:

$$\bar{X} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_n),$$

где  $x_i$  — количество  $i$ -го вида товара в общем объеме произведенной продукции;

$n$  — общее количество произведенных товаров.

В базисном периоде  $t_0$  стоимость произведенной продукции можно представить в виде  $n$ -мерного вектора:

$$\bar{P}_0 = (P^0_1, P^0_2, P^0_3, \dots, P^0_n),$$

а в отчетном (анализируемом) периоде  $t_1$  соответственно вектором

$$\bar{P}_1 = (P^1_1, P^1_2, P^1_3, \dots, P^1_n).$$

Тогда стоимость выпущенной продукции описывается скалярным произведением векторов  $\bar{X}$  и  $\bar{P}$ .

$$S = \bar{X} \times \bar{P}.$$

Таким образом, стоимость произведенной продукции в базисном периоде  $t_0$  составит

$$S_0 = P^0_1 x_1 + P^0_2 x_2 + P^0_i x_i + \dots + P^0_n x_n = \sum_{i=1}^n P^0_i x_i,$$

в анализируемом периоде

$$S_1 = P^1_1 x_1 + P^1_2 x_2 + P^1_i x_i + \dots + P^1_n x_n = \sum_{i=1}^n P^1_i x_i.$$



Таким образом, рост или падение стоимости произведенной продукции определяется показателем, называемым индексом инфляции, который показывает, во сколько выросли цены в стране:

$$I_{\text{и}} = \frac{S_1}{S_0},$$

а относительная величина уровня инфляции есть темп инфляции:

$$\alpha = \frac{S_1}{S_0} - \frac{S_0}{S_0} = \frac{\Delta S}{S_0} = (I_{\text{и}} - 1).$$

Отсюда следует, что индекс инфляции равен

$$I_{\text{и}} = 1 + \alpha.$$

Уровень инфляции в процентах определяется следующим образом:

$$\alpha \% = \left( \frac{S_1 - S_0}{S_1} \right) \cdot 100\%.$$

Индекс инфляции показывает, во сколько раз выросли цены, а уровень инфляции – на сколько процентов выросли цены за анализируемый период.

При проведении анализа стоимость выпущенной продукции предприятия фиксируется, например, через равные промежутки времени:

$t_0, \dots, t_1, \dots, t_N$ , получим  $S_0, \dots, S_1, \dots, S_N$ .

Аналогично для темпов инфляции на этих временных интервалах:

$$\alpha_0, \dots, \alpha_{1-1}, \dots, \alpha_{N-1, N}.$$

Тогда можно записать следующее уравнение связи между членами ряда:

$$S_1 = S_0 (1 + \alpha_{0,1}).$$

В общем виде выражение для определения стоимости товаров, выпущенных предприятием с учетом инфляционных изменений в стоимости:

$$S_N = S_0 \cdot \prod_{i=1}^N (1 + \alpha_{i-1,i}).$$



Тогда индекс инфляции за весь период будет равен

$$I_{\text{и}} = \frac{S_n}{S_0} \cdot \prod_{i=1}^N (1 + \alpha_{i-1,i}).$$

Кроме того, индекс инфляции связан с темпом инфляции выражением  $I_{\text{и}} = 1 + \alpha$ , откуда можно определить темп инфляции за весь период:

$$\alpha = I_{\text{и}} - 1.$$

Заметим, что при равенстве значений темпов инфляции на всех интервалах индекс инфляции определяется по формуле

$$I_{\text{и}} = (1 + \alpha_1)^N.$$



Экономико-математические модели могут строиться не только в виде формул (аналитическое представление модели- аддитивные, мультипликативные и пр.), но и в виде числовых примеров (численное представление), в виде таблиц (матричное) и в виде графов (сетевое представление).

Соответственно по этому принципу различают модели:

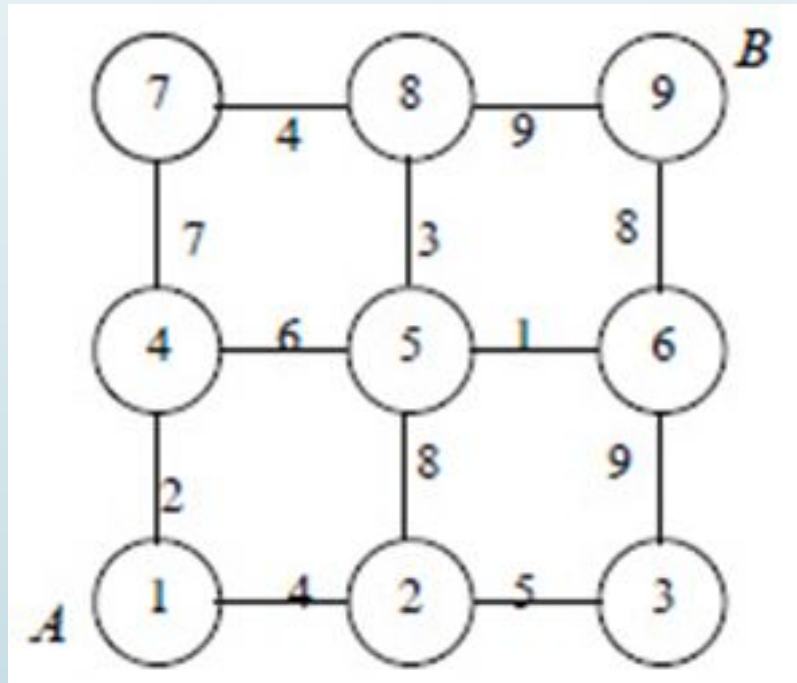
- Аналитические (рассмотрены ранее)
- Матричные. Эти методы базируются на линейной и векторно-матричной алгебре.
- Сетевые ( применяются чаще при планировании производственной и/или сбытовой деятельности)

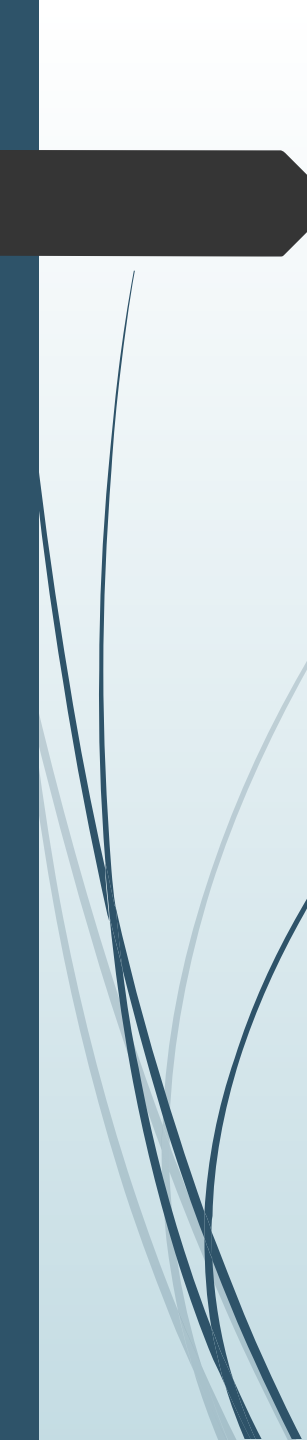


Достаточно часто используется метод сетевого планирования. Он базируется на применении сетевых графиков. Последние выражаются в виде определенной цепи работ и событий, связанных технологической последовательностью. Под работой здесь понимается процесс, который предшествует возникновению определенного события. Работа включает как технологические процессы, так и время ожидания, сопряженное с перерывами в этих процессах. Под событием понимают результат работы, без которого не могут быть начаты другие работы. В сетевых графиках события обозначаются кружками, где внутри пишется номер. Стрелки, помещающиеся между кружками, выражают намеченную последовательность выполнения работ. Числа, указанные возле стрелок, характеризуют намеченную длительность выполнения работ. С помощью сетевых графиков достигается либо оптимизация времени выполнения, либо оптимизация величины себестоимости осуществляемых работ.

- Модель сетевая (модель управления и планирования производством) — план выполнения некоторой совокупности взаимосвязанных операций (работ) заданный в специфической форме сети. Примером данной модели может служить сетевой график.

### Сетевой график





В кружках указаны номера событий, соединительными линиями (стрелками) работа, а цифры над ними указана ориентировочная стоимость, продолжительность или трудоемкость работ. В соответствии элементам графов (дугам и вершинам) ставятся числовые оценки (параметры операции: продолжительность, стоимость или трудоемкость). Что позволяет осуществлять глубокий анализ, а в ряде случаев оптимизацию.

Сетевая модель определяет с любой требуемой степенью детализации состав работ комплекса и порядок выполнения их во времени.

Отличительной особенностью сетевой модели в сравнении с другими формами представления планов является четкое определение всех временных взаимосвязей операций.

Сетевые модели используются не только как средство решения разнообразных задач планирования и прогнозирования. Сетевые модели также служат для построения специального класса системы организационного управления, получивших название систем сетевого планирования и управления. Могут также применяться и при финансовом планировании и разработки финансовой стратегии и тактики.

## Анализ чувствительности.

Анализ чувствительности состоит в определении будущего значения обобщающего экономического показателя при условии, что величина одного или нескольких факторов, оказывающих влияние на этот показатель, изменится.

Так, например, устанавливают, на какую величину изменится прибыль в перспективе при условии изменения количества продаваемой продукции на единицу. Этим самым мы анализируем чувствительность чистой прибыли к изменению одного из факторов, влияющих на нее, то есть в данном случае фактора объема продаж. Остальные же факторы, влияющие на величину прибыли, являются при этом неизменными. Можно определить величину прибыли также и при одновременном изменении в будущем влияния нескольких факторов. Таким образом анализ чувствительности дает возможность установить силу реагирования обобщающего экономического показателя на изменение отдельных факторов, оказывающих влияние на этот показатель.

Наиболее часто анализ чувствительности применяется в инвестиционной анализе и разработке инвестиционной стратегии. ( курс инвестиции, оценка инвестиционных проектов)