МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕС КИХ УРАВНЕНИЙ

Автор:

Кондрашева Светлана Михайловна, учитель математики

МОБУ СОШ№28

ст. Вознесенской Лабинского района

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ:

- тригонометрические уравнения из года в год встречаются среди заданий ЕГЭ;
- в школьной программе отводится мало времени на изучение данной темы;
- уравнения повышенной сложности изучаются на факультативных занятиях в ознакомительном порядке.

ЦЕЛЬ РАБОТЫ:

изучить методы решения тригонометрических уравнений; исследовать применение их к решению уравнений повышенной сложности и заданий различного содержания.

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ:

- рассмотреть исторические сведения о тригонометрических уравнениях;
- изучить общие сведения о простых тригонометрических уравнениях;
- изучить методы решения тригонометрических уравнений;
- исследовать применение методов решения тригонометрических уравнений к решению уравнений повышенной сложности и заданий на нахождение дополнительных условий;
- подготовить упражнения и составить тест для самостоятельного решения учащихся.

ПЛАН ИССЛЕДОВАНИЙ:

1.Анализ методов решения тригонометрических уравнений наиболее часто применяемых на практике.

2.Применение различных методов исследования: изучение литературы, материалов учебных интернет – сайтов по данной теме; консультации с преподавателем; применение различных методов решения тригонометрических уравнений на практике.

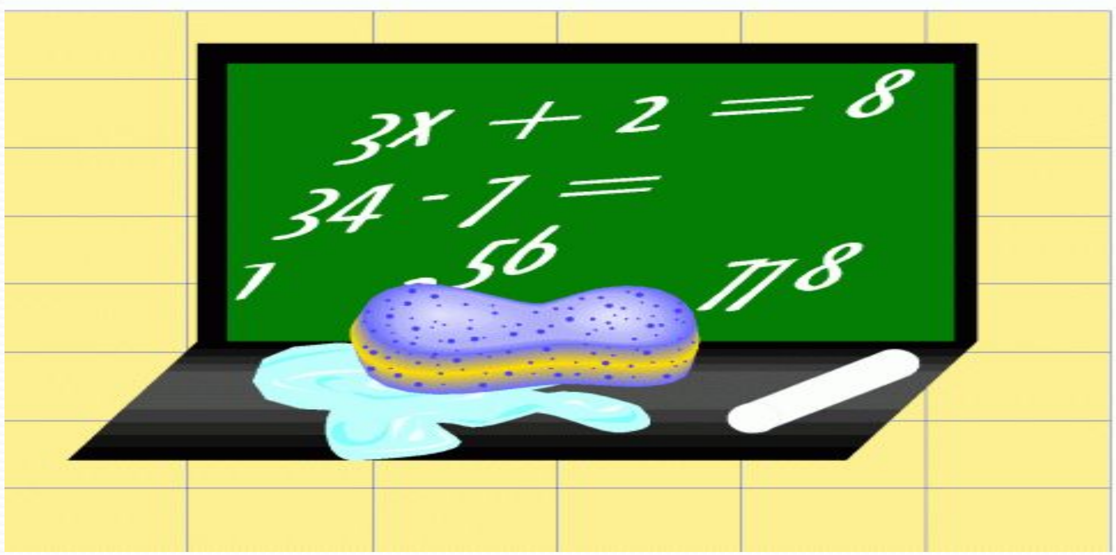
3. Анализ и подбор заданий для самостоятельного решения разной сложности.

4.Самостоятельное решение уравнений.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ:

1. Из истории тригонометрии.
2. Общие сведения о тригонометрических уравнениях.
3. Методы решения тригонометрических уравнений.
4. Приемы решения тригонометрических уравнений, требующих искусственных преобразований.
5. Приемы отбора корней в тригонометрических уравнениях.
6. Применение рассмотренных методов решения тригонометрических уравнений.
7. Приложение 1. Тест по теме «Тригонометрические уравнения» и ответы к нему.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИ Х УРАВНЕНИЙ



Алгебраические уравнения относительно одной из тригонометрических функций.

$2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$

$2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0,$

$2 - 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0,$

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$

Пусть $\cos x = t$, где $-1 \le t \le 1$, тогда

$2t^2 - t - 1 = 0,$

$D = 9$, $t_1 = 1$, $t_2 = -0{,}5$

$\cos x = 1$ $\qquad$ $\cos x = -0{,}5$

$x = 2\pi n$, $n \in Z$; $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$

Ответ: $2\pi n$, $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$

$2\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x - 1 = 0$

$2\operatorname{tg} x - \frac{3}{tgx} - 1 = 0$, $0 = \frac{2tg^2x - 3 - tgx}{tgx}$

$2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 3 = 0$. Пусть

$\operatorname{tg} x = t$, тогда $2t^2 - t - 3 = 0$

$D = 25$, $t_1 = 1{,}5$, $t_2 = -1$

$\operatorname{tg} x = 1{,}5$ $\qquad$ $\operatorname{tg} x = -1$

$x = \operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi n$, $n \in Z$

$x = -\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$

Ответ: $\operatorname{arctg} 1{,}5 + \pi n$,

$-\pi/4 + \pi n$, $n \in Z$

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ

$4\cos^2 x + \cos 2x = 5$

$4 \times 0{,}5(1 + \cos 2x) + \cos 2x = 5$, $2 + 2\cos 2x + \cos 2x = 5$,

$\cos 2x = 1$,

$2x = 2\pi n, n \in Z$,

$x = \pi n, n \in Z$

Ответ: $\pi n, n \in Z$

$\sin^4 x + \cos^2 2x = 2$

$\frac{1}{4}(1-\cos 2x)^2 + \cos^2 2x = 2$,

$\frac{1}{4}(1-2\cos 2x + \cos^2 2x) + \cos^2 2x = 2$,

$5\cos^2 2x - 2\cos 2x - 7 = 0$. Пусть $\cos 2x = t$, тогда $5t^2 - 2t - 7 = 0$, $D = 144$, $t_1 = 1{,}4$, $t_2 = -1$,

$\cos 2x = -1$

$X = \pi/2 + \pi n, n \in Z$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ И СЛЕДСТВИЙ ИЗ НИХ:

$\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0$

$(\sin 5X + \sin x) + \sin 3x =0$,

$2\sin 3x\cos 2x + \sin 3x = 0$,

$\sin 3x\ (2\cos 2x+ 1) = 0$,

$\sin 3x = 0$ или $2\cos 2x + 1 = 0$

$3x = \pi n$, $x = \pi n/3$, $n \in Z$ или

$\cos 2x = - 1/2$,

$x = \pm \pi/3 + \pi n$, $n \in Z$

Ответ: $\pi n/3$, $\pm \pi/3 + \pi n$,

$n \in Z$.

$\cos 2x+\cos 4x -\cos 3x = 0$

$(\cos 4x+ \cos 2x) -\cos 3x = 0$,

$2\cos 3x \cos x - \cos 3x = 0$,

$\cos 3x\ (2\cos x - 1) = 0$,

$\cos 3x = 0$ или $2\cos x - 1 = 0$;

тогда $x = \pi/6 + \pi n/3$ или

$x=\pm \pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$

Ответ: $x = \pi/6 + \pi n/3$,

$x=\pm \pi/3 + 2\pi n$, $n \in Z$

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ:

$7\sin^2 x = 8\sin x\cos x - \cos^2 x$

$7\sin^2 x - 8\sin X\cos X + \cos^2 x = 0,$

$7\,tg^2 x - 8tgX + 1 = 0$. Пусть $tgX = t$,

тогда $7t^2 - 8t + 1 = 0$

$D = 9,\ t_{1=}\ 1,\ t_{2=}1/7.$

$tg\,X = 1,\ X = \pi/4 + \pi n,\ n \in Z.$

$tgx = 1/7,\ x = arctg1/7 + \pi n,\ n \in Z$

Ответ: $\pi/4 + \pi n,\ arctg1/4 + \pi n,\ n \in Z$

$6\sin^2 x + 3\sin X\cos X - 2\cos^2 x = 3$

$3\sin^2 x + 3\sin X\cos X - 5\cos^2 x = 0,$

$3\,tg^2 x + 3\,tgX - 5 = 0,\ D = 69,$

$tgx = (\sqrt{69}-3)/6$,

$tgx = (\sqrt{69}+3)/6$,

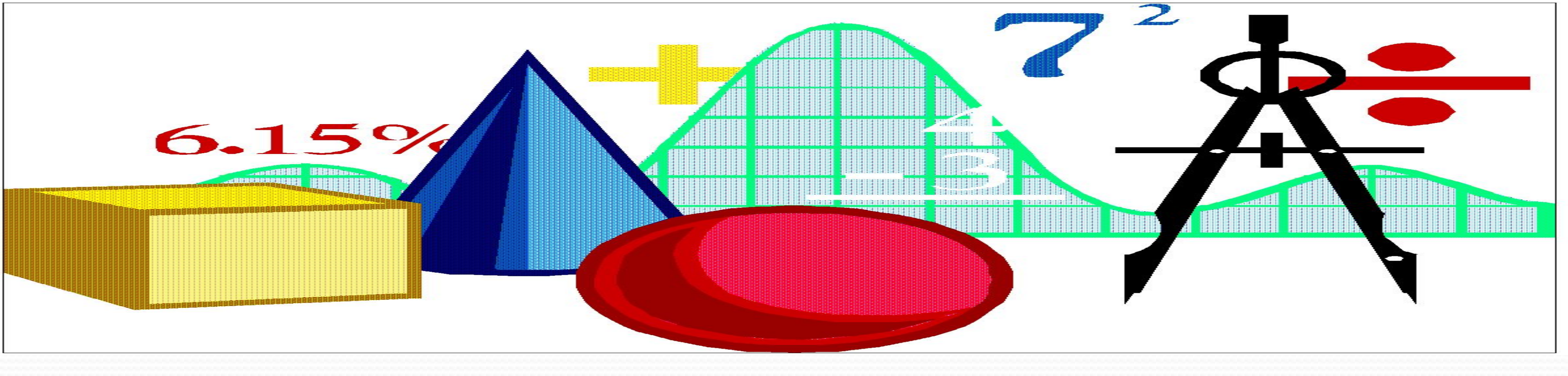
Ответ:

$X = arctg((\sqrt{69}-3)/6) + \pi n,\ n \in Z$

$X = -\,arctg((\sqrt{69}+3)/6) + \pi n,$

$n \in Z$

ПРИЕМЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ТРЕБУЮЩИХ ИСКУССТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ



уравнения
на одну и ту же
тригонометрическую функцию

cos 2X + cos 5X =0,5 + cos 4X (* на cos X)

cos 2Xcos X + cos 5X cos X =0,5 cos X + cos 4Xcos X

cos 2X 2cos X + cos 5X2cos X = cos X + cos 4X2cos X

2cos Xcos 2X + 2cos Xcos 5X – 2cos Xcos 4X = cos X

cos X + cos 3X + cos 6X + cos 4X–(cos 3X + cos 5X)–cos X = 0

cos 3X + cos 6X + cos 4X – cos 3X – cos 5X = 0

cos 6X – cos 5X + cos 4X = 0,   2cos 5Xcos X – cos 5X = 0,

cos 5X (2cos X – 1) = 0

cos 5X = 0 или 2cos X – 1 = 0.

X = π/10 + πn/5 , n ϵ Z ; X =π/3 + 2πn, n ϵ Z

Ответ: X = π/10 + πn/5 , n ϵ Z ; X =π/3 + 2πn, n ϵ Z

уравнения одного и того же числа, одной и той же тригонометрической функции

$$3 - 4\cos 2x + \cos 4x = 16\sin^6 x$$

$4 – 4\cos 2X – 1+\cos 4X = 16 \sin^6 x$,

$4–4\cos 2X + 2 \cos^2 2x - 1 -1 = 16 \sin^6 x$

$2–4\cos 2X + 2 \cos^2 2x = 16 \sin^6 x$,

$-2\cos 2X + \cos^2 2x + 1 = 8\sin^6 x$,

$\cos 2X (\cos 2X - 2) = 8 \sin^6 x – 1$

$\cos 2X (\cos 2X – 2) = (2 \sin^2 x - 1)(4 \sin^4 x + 2 \sin^2 x + 1)$

$\cos 2X (\cos 2X – 2) =- \cos 2X (4 \sin^4 x + 2 \sin^2 x + 1)$

$\cos 2X (\cos 2X – 2) + \cos 2X(4 \sin^4 x + 2 \sin^2 x + 1) = 0$

$\cos 2X (\cos 2X – 2 + 4\sin^4 x + 2\sin^2 x + 1) = 0$

$\cos 2X = 0$ или $\sin^4 x = 0$. $X = \pi/4 + \pi n/2$, $n \in Z$ или $X = \pi n$, $n \in Z$

Ответ: $\pi/4 + \pi n/2$, $n \in Z$ или πn, $n \in Z$

тождественные преобразования одной из частей уравнения:

$\sin 5X = -1/4 \sin X$

$(\sin 5X - \sin 3X) + (\sin 3X - \sin X) + \sin X = -1/4 \sin X$,

$2\cos 4X \sin X + 2\cos 2X \sin X + \sin X + 1/4 \sin X = 0$

$\sin X\,(2\cos 4X + 2\cos 2X + 5/4) = 0$. $\sin X = 0$, $X = \pi n$, $n \in Z$ или

$2\cos 4X + 2\cos 2X + 5/4 = 0$,

$2\,(2\cos^2 2x - 1) + 2\cos 2X + 5/4 = 0$, $4\cos^2 2x + 2\cos 2X - 2 + 5/4 = 0$,

$4\cos^2 2x + 2\cos 2X - 3/4 = 0$

$16\cos^2 2x + 8\cos 2X - 3 = 0$.Пустьcos $2X = t$,тогда$16t^2 + 8t - 3 = 0$, $D = 64$,

$t_1 = 1/4$, $t_2 = -3/4$

$\cos 2X = 1/4$, $\cos 2X = -3/4$. $X = \pm 0{,}5\arccos 1/4 + \pi n$, $n \in Z$,

$X = \pm 0{,}5(\pi - \arccos 3/4) + \pi n/2$, $n \in Z$

Ответ: $X = \pi n$, $\pm 0{,}5\arccos 1/4 + \pi n$; $\pm 0{,}5(\pi - \arccos 3/4) + \pi n/2$, $n \in Z$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ